Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 277–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:20:01

УДК 517.9+517.43

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

А. М. Савчук

В заметке рассматриваются операторы Штурма–Лиувилля, порожденные на отрезке $[0, \pi]$ дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и краевыми условиями Дирихле. Здесь $q(x)$ есть обобщенная функция первого порядка, т.е. $\int q(x) dx \in L_2[0, \pi]$. Получены асимптотические формулы собственных значений и собственных функций таких операторов, зависящие от степени гладкости $q(x)$.

Библиография: 6 названий.

Рассмотрим на конечном отрезке $[a, b]$ дифференциальное выражение

$$-y'' + q(x)y. \quad (1)$$

Это дифференциальное выражение при добавлении к нему подходящих граничных условий определяет оператор L в $L_2[a, b]$, если $q(x) \in L_1[a, b]$ (см., например, [1]). В работе [2] было показано, как можно определить этот оператор в случае, когда $q(x)$ является обобщенной функцией первого порядка, т.е. $q(x) = u'(x)$, где $u(x) \in L_2[a, b]$. В случае вещественной функции $q(x)$ можно описать все граничные условия, гарантирующие самосопряженность оператора L . В той же работе [2] были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций самосопряженного оператора, отвечающего краевым условиям Дирихле. В этой работе предполагается уточнить эти асимптотические формулы в зависимости от степени гладкости $q(x)$.

Рассмотрим оператор L_0 , порождаемый дифференциальным выражением (1) на отрезке $[0, \pi]$ с условиями Дирихле. Этот оператор можно задать следующим образом (см. [2]):

$$\begin{aligned} L_0 y = l(y) &:= -(y' - u(x)y)' - u(x)(y' - u(x)y) - u^2(x)y, & q(x) = u'(x), \\ \mathcal{D}(L_0) &= \{y \mid y, y' - u(x)y \in W_1^1[0, \pi], l(y) \in L_2[0, \pi], y(0) = y(\pi) = 0\}. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем через Λ_α , $0 < \alpha \leq 1$, мы будем обозначать функции класса Липшица на отрезке $[0, \pi]$, т.е. функции, чей модуль непрерывности

$$\omega(\delta; f) := \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [0, \pi] \\ |x_1 - x_2| < \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000 и № 96-15-96091.

допускает оценку

$$\omega(\delta; f) \leq C\delta^\alpha,$$

где C не зависит от δ . Через V обозначим класс функций ограниченной вариации на отрезке $[0, \pi]$.

Всюду в дальнейшем потенциал $q(x)$ предполагается вещественной функцией (хотя предлагаемый метод позволяет получить аналогичные результаты и для комплексных $q(x)$). В работе [2] была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Если $q(x) = u'(x)$ и $u(x) \in L_2[0, \pi]$, то спектр оператора L_0 в $L_2[0, \pi]$ дискретен и собственные значения имеют асимптотику*

$$\lambda_n = n^2 + o(n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

а собственные функции имеют асимптотику

$$y_n(x) = \sin nx + o(1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где функция $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по x .

Результаты, уточняющие эти асимптотические формулы, сформулируем в двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *В общем случае, когда $q(x) = u'(x)$, а $u(x) \in L_2$, собственные значения оператора L_0 имеют асимптотику*

$$\lambda_n = n^2 + ns_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где числовая последовательность $s_n \in l_2$. Если $u(x) \in \Lambda_\alpha$, то собственные значения оператора L_0 имеют асимптотику

$$\lambda_n = n^2 + O(n^{1-\alpha}), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (4)$$

Если же $u(x) \in V$, то

$$\lambda_n = n^2 + O(1), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с определением оператора L_0 (2) уравнение на собственные значения можно записать в виде системы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_1 = y, \quad y_2 = y' - u(x)y.$$

Сделаем замену

$$y_1(x) = r(x) \sin \theta(x), \quad y_2(x) = \lambda^{1/2} r(x) \cos \theta(x), \quad (6)$$

которая является модификацией замены Прюфера (см. [3]). Тогда функция $\theta(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'(x, \lambda) = \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2} u^2(x) \sin^2 \theta(x, \lambda) + u(x) \sin 2\theta(x, \lambda). \quad (7)$$

Вначале мы докажем одну полезную оценку, из которой в дальнейшем легко будет получить требуемые асимптотики.

ЛЕММА 1. *Обозначим*

$$a(x, \lambda) = \int_0^x u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) dt, \quad A^2(\lambda) = \int_0^\pi |a(x, \lambda)|^2 dx. \quad (8)$$

Тогда для функции $\theta(x, \lambda)$ выполнена следующая асимптотика:

$$\theta(x, \lambda) = \lambda^{1/2}x + a(x, \lambda) + \rho(x, \lambda), \quad (9)$$

где для остатка выполнена оценка

$$|\rho(x, \lambda)| \leq M(A(\lambda) + \lambda^{-1/2}) \quad (10)$$

с константой M , не зависящей от x и λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод последовательных приближений к уравнению (7) на отрезке $[0, a_1]$ (число a_1 будет выбрано позднее). Обозначим

$$U(x) = \int_0^x u^2(t) dt.$$

Тогда

$$\theta_1(x, \lambda) = \lambda^{1/2}x + a(x, \lambda) + \rho_1(x, \lambda),$$

где $|\rho_1(x, \lambda)| \leq U(x)\lambda^{-1/2}$. Для следующего приближения получим

$$\begin{aligned} \theta_2(x, \lambda) &= \lambda^{1/2}x + \int_0^x u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) \cos(2a(t, \lambda) + 2\rho(t, \lambda)) dt \\ &\quad + \int_0^x u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \sin(2a(t, \lambda) + 2\rho(t, \lambda)) dt \\ &\quad + \lambda^{-1/2} \int_0^x u^2(t) \sin^2 \theta_1(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Разложим косинус во втором интеграле в ряд в нуле и оценим остатки. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_2(x, \lambda) &= \lambda^{1/2}x + a(x, \lambda) + \rho_2(x, \lambda), \\ |\rho_2(x, \lambda)| &\leq 3U^{1/2}(x)(2A(\lambda) + 2\rho_1(x, \lambda)) + \lambda^{-1/2}U(x) \\ &\leq \lambda^{-1/2}U(x) + 6U^{1/2}(x)(A(\lambda) + \lambda^{-1/2}U(\pi)). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\theta(x, \lambda) = \lambda^{1/2}x + a(x, \lambda) + \rho(x, \lambda)$$

на отрезке $[0, a_1]$. При этом число a_1 мы выберем так, чтобы $U(a_1) = 1/100$. Тогда $6U^{1/2}(a_1) < 1$ и для остатка выполнена оценка

$$|\rho(x, \lambda)| \leq 6U^{1/2}(x) \frac{A(\lambda) + \lambda^{-1/2}U(\pi)}{1 - 6U^{1/2}(a_1)} + \lambda^{-1/2}U(x).$$

Функция $U(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, \pi]$. Обозначим через a_k точки, где $U(a_k) = k/100$. Так как $U(x)$ ограничена, число этих точек будет конечным: $1 \leq k \leq n-1$. Положим $a_0 = 0$, $a_n = \pi$. На каждом отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ проведем те же рассуждения, что и на первом отрезке $[0, a_1]$, с той лишь разницей, что в оценках будут присутствовать начальные данные функции $\theta(x, \lambda)$, т.е. ее значения в точках a_{k-1} . Так, на отрезке $[a_{k-1}, a_k]$ получим

$$\begin{aligned} \theta(x, \lambda) &= \lambda^{1/2}x + a(x, \lambda) + \rho(x, \lambda), \\ |\rho(x, \lambda)| &\leq 6(U(x) - U(a_{k-1}))^{1/2} \frac{A(\lambda) + \lambda^{-1/2}U(\pi)}{1 - 6(U(a_k) - U(a_{k-1}))^{1/2}} \\ &\quad + \lambda^{-1/2}U(x) + \rho(a_{k-1}, \lambda). \end{aligned}$$

На n -м шаге мы получим (10).

Собственные значения определяются равенствами $\theta(\pi, \lambda) = \pi n$, и для получения асимптотик нам необходимо оценить $a(\pi, \lambda_n)$ и $A(\lambda_n)$.

Рассмотрим вначале случай произвольной функции $u(x) \in L_2$. Отметим, что $a(x, \lambda)$ и $\rho(x, \lambda)$ равномерно ограничены при $0 \leq x \leq \pi$ и $\lambda \geq 1$. Отсюда легко следует грубая асимптотика

$$\lambda_n^{1/2} = n + O(1). \quad (11)$$

Для получения более точной асимптотики нам потребуется следующее утверждение (см. [4, лемма 3.2]).

ЛЕММА 2. Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $\lambda_n \in \Pi_a = \{z \mid |\operatorname{Im} z| < a\}$ для некоторого a ;
- 2) для любого квадрата с вершинами в точках $\tau + ia$, $\tau - ia$, $\tau + 2a + ia$, $\tau + 2a - ia$ количество чисел λ_n внутри него ограничено постоянной, не зависящей от τ .

Тогда для любой $f \in L_2$ последовательность

$$c_n = \int_0^\pi f(x) e^{i\lambda_n x} dx$$

принадлежит l_2 и выполнена оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq C \|f\|_{L_2}^2.$$

Из уже полученной грубой асимптотики (11) видно, что последовательность $\lambda_n^{1/2}$ удовлетворяет условиям леммы. Если функция $a(x, \lambda)$ определена формулой (8), то согласно лемме 2 для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ последовательность $a(x, \lambda_n) \in l_2$, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a^2(x, \lambda_n)$ сходится равномерно по x . Отсюда следует, что и последовательность $A(\lambda_n) \in l_2$, и мы получаем $\pi n = \pi \lambda_n^{1/2} + s_n$, $s_n \in l_2$, откуда следует асимптотика (3).

Предположим теперь, что $u(x) \in \Lambda_\alpha$. Используя найденную асимптотику (3), перепишем $a(x, \lambda_n)$ в виде

$$a(x, \lambda_n) = \int_0^x u(t) \sin(2nt) \cos(s_n t) dt + \int_0^x u(t) \cos(2nt) \sin(s_n t) dt. \quad (12)$$

Учитывая известную оценку

$$\omega(\delta; fg) \leq \omega(\delta; g) \sup_{x \in [0, \pi]} |f| + \omega(\delta; f) \sup_{x \in [0, \pi]} |g|,$$

получим

$$\omega(\delta; u(t) \cos(s_n t)) \leq C_1 \delta + C_2 \delta^\alpha,$$

где C_1 и C_2 не зависят от n и δ , так как числа s_n ограничены. Аналогичное неравенство выполнено для второго слагаемого в (12).

Известно (см. [5, т. I, гл. II, § 4]), что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$ допускают оценку

$$|c_\nu(f)| \leq \frac{1}{2} \omega\left(\frac{\pi}{|\nu|}; f\right).$$

Хотя это неравенство установлено на отрезке $[0, \pi]$ в предположении, что ν – целое число, легко показать, что

$$\left| \int_0^l f(x) e^{-i\nu x} dx \right| \leq C(f) \frac{l}{|\nu|} + \frac{l}{2\pi} \omega\left(\frac{l}{|\nu|}; f\right)$$

для любого отрезка $[0, l]$ и действительного ν . Отсюда получим

$$a(x, \lambda_n) = O(n^{-\alpha})$$

равномерно по x . Эта оценка влечет асимптотику (4).

Пусть, наконец, $u(x) \in V[0, \pi]$. Оценим вариацию функции $u(t) \cos(s_n t)$. Хорошо известны оценки

$$\text{Var}(fg) \leq \sup_{x \in [0, \pi]} |f| \text{Var}(g) + \sup_{x \in [0, \pi]} |g| \text{Var}(f), \quad (13)$$

если f и g – функции ограниченной вариации;

$$\text{Var}(f) \leq \sup_{x \in [0, \pi]} |f'(x)|, \quad (14)$$

если f имеет на $[0, \pi]$ ограниченную производную. Тогда

$$\text{Var}(u(t) \cos(s_n t)) \leq C_1 + C_2 \text{Var}(\cos(s_n t)) \leq C_3,$$

где константа C_3 не зависит от n (напомним еще раз, что s_n ограничены). Та же оценка верна для второго слагаемого в (12). Воспользуемся другим неравенством для коэффициентов Фурье (см. [5, т. I, гл. II, § 4])

$$|c_\nu(f)| \leq \frac{2 \text{Var}(f)}{|\nu|}. \quad (15)$$

Поскольку подобная оценка также верна для интеграла

$$\int_0^l f(x) e^{-i\nu x} dx,$$

то

$$a(x, \lambda_n) = O(n^{-1})$$

равномерно по x , что влечет асимптотику (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае функций ограниченной вариации утверждение теоремы другим методом получено Аткинсоном [6, гл. XI].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы получили асимптотику собственных значений для случая краевых условий Дирихле. Изложенный здесь метод может быть модифицирован для условий типа Штурма, но его реализация для нераспадающихся краевых условий требует привлечения другой техники, развитой в работах Владимирова, Гринива и Шкаликова.

ТЕОРЕМА 2. В общем случае, когда $u(x) \in L_2$, собственные функции оператора L_0 с потенциалом $q(x) = u'(x)$ имеют асимптотику

$$y_n(x) = \sin nx + \psi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\psi_n(x)\|_{L_2}^2 < C \int_0^x |u(t)|^2 dt. \quad (16)$$

Если $u(x) \in \Lambda_\alpha$, то

$$y_n(x) = \sin nx (1 + O(n^{-\alpha})), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

а если $u(x) \in V$, то

$$y_n(x) = \sin nx (1 + O(n^{-1})), \quad n = 1, 2, \dots. \quad (18)$$

Здесь остаточные члены $O(\cdot)$ равномерны по x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кроме уравнения (7) для $\theta(x, \lambda)$ нам потребуется уравнение для функции $r(x, \lambda)$

$$r'(x, \lambda) = -r(x, \lambda) \left(u(x) \cos 2\theta(x, \lambda) + \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} u^2(x) \sin 2\theta(x, \lambda) \right). \quad (19)$$

Обозначим

$$b(x, \lambda) = \int_0^x u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) dt, \quad B^2(\lambda) = \int_0^\pi |b(x, \lambda)|^2 dx.$$

Решая уравнение (19), аналогично лемме 1 получим

$$r(x, \lambda) = 1 + \rho(x, \lambda),$$

где $|\rho(x, \lambda)| \leq 2|b(x, \lambda)| + M(B(\lambda) + \lambda^{-1/2})$. Согласно (6) собственные функции определяются равенством

$$y_n(x) = r(x, \lambda_n) \sin \theta(x, \lambda_n) = \sin nx + \psi_n(x).$$

Для доказательства асимптотики (16) остается еще раз применить лемму 2. Для доказательства асимптотик (17) и (18) нужно оценить функцию $b(x, \lambda_n)$ так же, как это было сделано для функции $a(x, \lambda_n)$.

ТЕОРЕМА 3. Для $u(x) \in V$ верна более точная асимптотика собственных значений

$$\sqrt{\lambda_n} = n - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin(2nx) dx + O(n^{-2}). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта асимптотика не может быть получена из (9), так как остаток $\rho(x, \lambda)$ оценивается там слишком грубо. Докажем (20) независимым способом. Решение уравнения (7) запишем в виде $\theta(x, \lambda) = \lambda^{1/2}x + \eta(x, \lambda)$ и найдем асимптотику функции $\eta(x, \lambda)$. Легко видеть, что $\eta(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\eta(x, \lambda) = \lambda^{-1/2} \int_0^x u^2(t) \sin^2 \theta(t, \lambda) dt + \int_0^x u(t) \sin 2\theta(t, \lambda) dt.$$

Очевидно, что $\eta(x, \lambda)$ абсолютно непрерывна и равномерно по x ограничена при $\lambda \rightarrow \infty$ вместе со своей производной, а из доказанной асимптотики (7) следует, что $\eta(x, \lambda) = O(\lambda^{-1/2})$ равномерно по x . Тогда

$$\begin{aligned} \eta(\pi, \lambda) &= \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) dt - \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) \cos(2\lambda^{1/2}t + 2\eta(t, \lambda)) dt \\ &\quad + \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t + 2\eta(t, \lambda)) dt. \end{aligned}$$

Распишем второй интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u^2(t) \cos(2\lambda^{1/2}t + 2\eta(t, \lambda)) dt &= \int_0^\pi u^2(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \cos(2\eta(t, \lambda)) dt \\ &\quad - \int_0^\pi u^2(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) \sin(2\eta(t, \lambda)) dt. \end{aligned}$$

Применяя оценки (13) и (14) для функций $u^2(t) \cos(2\eta(t, \lambda))$ и $u^2(t) \sin(2\eta(t, \lambda))$, а затем неравенство (15), мы видим, что этот интеграл есть $O(\lambda^{-1/2})$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta(\pi, \lambda) &= \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) dt + O(\lambda^{-1}) + \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) \cos(2\eta(t, \lambda)) dt \\ &\quad + \int_0^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \sin(2\eta(t, \lambda)) dt \\ &= \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) dt + O(\lambda^{-1}) + \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) dt + O(\lambda^{-1}) \\ &\quad + 2 \int_0^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \eta(t, \lambda) dt + O(\lambda^{-3/2}). \end{aligned}$$

Обратимся к последнему интегралу

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u(t) \eta(t, \lambda) \cos(2\lambda^{1/2}t) dt &= \lambda^{-1/2} \int_0^\pi \int_0^t u^2(s) \sin^2 \theta(s, \lambda) ds u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) dt \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^t u(t) u(s) \sin 2\theta(s, \lambda) \cos(2\lambda^{1/2}t) ds dt. \end{aligned}$$

Функция

$$\int_0^t u^2(s) \sin^2 \theta(s, \lambda) ds u(t)$$

имеет ограниченную вариацию, и из (15) следует, что первое слагаемое в сумме есть $O(\lambda^{-1})$. Второе слагаемое рассмотрим отдельно:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s) \sin(2\lambda^{1/2}s + 2\eta(s, \lambda)) \cos(2\lambda^{1/2}t) ds dt \\ &= \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s) \sin(2\lambda^{1/2}s) \cos(2\eta(s, \lambda)) \cos(2\lambda^{1/2}t) ds dt \\ &+ \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s) \cos(2\lambda^{1/2}s) \sin(2\eta(s, \lambda)) \cos(2\lambda^{1/2}t) ds dt \\ &= \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s) \sin(2\lambda^{1/2}s) \cos(2\eta(s, \lambda)) ds dt + O(\lambda^{-1}) \\ &+ \int_0^\pi 2\eta(s, \lambda)u(s) \cos(2\lambda^{1/2}s) \int_s^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) dt ds. \end{aligned}$$

Учитывая доказанные асимптотики, получаем, что

$$\eta(s, \lambda) \int_s^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) dt = O(\lambda^{-1})$$

равномерно по s , и нам остается оценить первый интеграл

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \int_0^t u(t)u(s) \sin(2\lambda^{1/2}s) \cos(2\lambda^{1/2}t) ds dt \\ &= -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \int_0^t u(s) d \cos(2\lambda^{1/2}s) dt \\ &= -\frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) [u(s) \cos(2\lambda^{1/2}s)] \Big|_0^t dt \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^\pi u(t) \cos(2\lambda^{1/2}t) \int_0^t \cos(2\lambda^{1/2}s) du(s) dt. \end{aligned}$$

Здесь интегрирование по частям законно, так как $u(t)$ есть заряд. Заметим, что $u(t)$ можно считать непрерывной в нуле и выбрать $u(0) = 0$. Учитывая, что второе слагаемое есть $O(\lambda^{-1})$ (действительно, функция $\int_0^t \cos(2\lambda^{1/2}s) du(s)$ имеет ограниченное изменение и нужно только в очередной раз применить (13) и (14)), получим

$$\begin{aligned} \eta(\pi, \lambda) &= \frac{1}{2}\lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) dt + \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) dt \\ &- \lambda^{-1/2} \int_0^\pi u^2(t) \cos^2(2\lambda^{1/2}t) dt + O(\lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Отметим, что последний интеграл можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u^2(t) \cos^2(2\lambda^{1/2}t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(t) \cos(4\lambda^{1/2}t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(t) dt + O(\lambda^{-1/2}). \end{aligned}$$

Итак, окончательно имеем

$$\eta(\pi, \lambda) = \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda^{1/2}t) dt + O(\lambda^{-1}).$$

Уравнение на собственные значения теперь имеет вид

$$\pi n = \theta(\pi, \lambda_n) = \pi \lambda_n^{1/2} + \int_0^\pi u(t) \sin(2\lambda_n^{1/2}t) dt + O(\lambda_n^{-1}).$$

Отсюда

$$\lambda_n^{1/2} = n - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t) \sin(2nt + O(n^{-1})t) dt + O(n^{-2}).$$

Здесь $O(n^{-1})$ не зависит от t и

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi u(t) \sin(2nt + O(n^{-1})t) dt \\ &= \int_0^\pi u(t) \sin(2nt) \cos(O(n^{-1})t) dt + \int_0^\pi u(t) \cos(2nt) \sin(O(n^{-1})t) dt \\ &= \int_0^\pi u(t) \sin(2nt) dt + O(n^{-2}) + O(n^{-1}) \int_0^\pi tu(t) \cos(2nt) dt \\ &= \int_0^\pi u(t) \sin(2nt) dt + O(n^{-2}), \end{aligned}$$

так как вариация функции $tu(t)$ ограничена. Отсюда следует асимптотика (20).

Автор благодарит А. А. Шкаликова за постановку задач и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
- [2] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
- [3] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [4] Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190–229.
- [5] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
- [6] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

29.05.2000

Исправленный вариант

05.07.2000