Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Детерминантное разрешение универсальной подсхемы в $\mathcal{S} \times H_{d+1}$, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 286–294

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:41:52

УДК 517.2

ДЕТЕРМИНАНТНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОДСХЕМЫ В $\mathcal{S} \times H_{d+1}$

Н. В. Тимофеева

В статье построено детерминантное разрешение особенностей универсальной под-
схемы в $\mathcal{S} \times H_{d+1}$ и доказано, что оно изоморфно многообразию полных пар $\mathcal{S} \times H_d$.
Библиография: 9 названий.

Введение. Пусть $\mathcal{S}$ – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверх-
ность над алгебраически замкнутым полем k , $H_{d+1} = \text{Hilb}^{d+1} \mathcal{S}$ – схема Гильберта
нульмерных подсхем длины $d+1$ поверхности $\mathcal{S}$. Образует произведение $X := \mathcal{S} \times H_{d+1}$
и рассмотрим в нем универсальную подсхему Γ – график инциденции

$$\Gamma := \{(q, Z_{d+1}) \in X \mid q \in Z_{d+1}\}$$

со структурой приведенной замкнутой подсхемы в X . Она особа в коразмерностях вы-
ше 3 [1, утверждение 7.1].

Известно [1, лемма 4.7], что Γ представляет собой подмногообразие Коэна–Маколея
коразмерности 2 в X . Тем самым, согласно теореме Ауслендера–Буксбаума [2] пучок
идеалов $\mathcal{I}_\Gamma$ в $\mathcal{O}_X$ обладает локально свободной $\mathcal{O}_X$ -резольвентой длины 1:

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} F \rightarrow \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0 \quad (1)$$

и $\text{rk } F = \text{rk } E + 1 = p + 1$.

Рассмотрим многообразие $V := \text{Proj}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X} E^\vee) = \mathbf{P}(E^\vee)$, где $E^\vee$ – двойствен-
ный к E пучок, определенный стандартным образом: $E^\vee := \text{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$. Много-
образие V обладает естественной проекцией $p: V \rightarrow X$ и обратимым пучком $\mathcal{O}_V(1)$,
 $p_* \mathcal{O}_V(1) = E^\vee$.

Дуализируя тройку (1), имеем

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow F^\vee \xrightarrow{u^\vee} E^\vee \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Пусть $s^\vee \in H^0(V, p^* F \otimes \mathcal{O}_V(1))$ таково, что

$$p_* s^\vee = u^\vee \in H^0(X, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F^\vee, E^\vee)).$$

Оно существует в силу стандартных изоморфизмов

$$p_*(p^*F \otimes \mathcal{O}_V(1)) \simeq F \otimes E^\vee \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F^\vee, E^\vee).$$

Согласно [3, лемма А.7.1] $s^\vee$ регулярно.

Положим по определению $\bar{\Gamma} := (s^\vee)_0$, где $(s^\vee)_0$ – схема нулей сечения $s^\vee$. Заметим, что $s^\vee$ локально представляет собой $p+1$ линейное уравнение в p -мерном проективном пространстве. Таким образом, проекция $\mathbf{P}$ ограничивается до бирационального морфизма $\pi: \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$. В настоящей статье исследуется проблема гладкости многообразия $\bar{\Gamma}$ и доказывается его изоморфность многообразию полных пар $\widetilde{\mathcal{S}} \times H_d$.

1. Многообразие $\bar{\Gamma}$ и ранговое отображение Кодаиры–Спенсера. Рассмотрим $u^\vee$ в виде

$$u^\vee: \mathcal{O}_X \rightarrow F \otimes E^\vee.$$

Можно считать, что $u^\vee$ не обращается в нуль ни в одной из точек $x \in X$. В противном случае можно прибавить тривиальное $\mathcal{O}_X$ -слагаемое к E и F и продолжить на него u тождественным образом. Тогда $u^\vee$ определяет вложение $i: X \hookrightarrow D$ многообразия X в универсальную детерминанталь $D := \operatorname{Proj}(F \otimes E^\vee)$.

В D имеется естественная ранговая фильтрация подмногообразиями

$$D_r = \{(x, ku_x^\vee) \mid x \in X, u_x^\vee \in F_x \otimes E_x^\vee, \operatorname{rk} u_x^\vee \leq r\}.$$

Тогда для всякой точки $y \in i(X)$ ($y = i(x)$) возьмем такое (единственное) r , $r \leq \operatorname{rk} E$, что $y \in D_r - D_{r-1}$, и определим, следуя [4], ранговое отображение Кодаиры–Спенсера (RKS) формулой

$$\theta_x: T_x X \xrightarrow{\operatorname{di}|_x} T_y D \xrightarrow{\operatorname{can}_y} N_{D_r} D|_y,$$

где $N_{D_r} D = \ker(u|_x)^\vee \otimes \operatorname{coker} u|_x = \operatorname{coker} u^\vee|_x \otimes \ker(u^\vee|_x)^\vee$. Последнее равенство имеет место в силу стандартных изоморфизмов

$$(\ker u^\vee|_x)^\vee \simeq \operatorname{coker} u|_x, \quad \operatorname{coker} u^\vee|_x \simeq (\ker u|_x)^\vee. \quad (2)$$

Для проверки гладкости многообразия $\bar{\Gamma}$ будем использовать критерий Хиршовица [4, утверждение 3.5]:

ЛЕММА 1. *Для произвольной точки $y = (x, kv) \in \bar{\Gamma}$, где $y \in \ker u^\vee|_x$, рассмотрим эпиморфизм*

$$\varepsilon_v: \operatorname{Hom}_k(\ker u^\vee|_x, \operatorname{coker} u^\vee|_x) \rightarrow \operatorname{Hom}_k(kv, \operatorname{coker} u^\vee|_x).$$

Тогда многообразие $\bar{\Gamma}$ гладко в точке y , если композиция $\varepsilon_v \circ \theta_x$ сюръективна.

Применение к (1) функтора $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, k(x))$ с учетом (2) дает изоморфизмы

$$\ker u^\vee|_x \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)), \quad \operatorname{coker} u^\vee|_x \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)). \quad (3)$$

Имеется естественный изоморфизм $T_x X \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x))$ и, тем самым,

$$\operatorname{Hom}_k(\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x)), \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x))) \simeq \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), T_x X^\vee \otimes k(x)). \quad (4)$$

Тогда RKS можно записать в виде:

$$\theta_x: \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee \otimes \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))$$

либо

$$\theta_x: \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)). \quad (5)$$

Применяя к морфизму $u: E \rightarrow F$ функтор $-\otimes A'$, где A' – расширение

$$A': 0 \rightarrow T_x X^\vee \otimes k(x) \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^2 \mathcal{O}_X \rightarrow k(x) \rightarrow 0,$$

соответствующее нулевому элементу в (4), и используя (2), (3) и лемму о змее, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee \otimes T_x X^\vee & \longrightarrow & \ker u & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \xrightarrow{\delta} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & E|_x \otimes T_x X^\vee & \longrightarrow & E/\mathfrak{m}_x^2 E & \longrightarrow & E|_x & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow u|_x \otimes \text{id} & & \downarrow \bar{u} & & \downarrow u|_x & \\ 0 \longrightarrow & F|_x \otimes T_x X^\vee & \longrightarrow & F/\mathfrak{m}_x^2 F & \longrightarrow & F|_x & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee \otimes T_x X^\vee & \longrightarrow & \text{coker } u & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array},$$

где $\bar{u} = u \otimes \text{id}_{\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^2 \mathcal{O}_X}$. Связывающий гомоморфизм

$$\delta: \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee \otimes T_x X^\vee$$

можно переписать в виде

$$\delta: \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(k(x), k(x)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x)). \quad (6)$$

Согласно [5, § 7, предложение 5.а] справедлива

ЛЕММА 2. *Гомоморфизм δ в (6) совпадает со спариванием Йонеды.*

Далее, выберем произвольный вектор $\omega \in T_x X$, и пусть Ω – соответствующая ему неприведенная подсхема длины 2, $\mathcal{O}_\Omega = k(x)[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$. Применяя функтор $-\otimes B'$, где

$$B': 0 \rightarrow k(x) \rightarrow \mathcal{O}_\Omega \rightarrow k(x) \rightarrow 0,$$

к морфизму $u: E \rightarrow F$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \longrightarrow & \ker u|_\Omega & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^1(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \xrightarrow{\delta_\omega} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & \\
 0 \longrightarrow & E|_x & \longrightarrow & E \otimes \mathcal{O}_\Omega & \xrightarrow{\beta} & E|_x & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow u|_x & & \downarrow u|_\Omega & & \downarrow u|_x & \\
 0 \longrightarrow & F|_x & \xrightarrow{\gamma} & F \otimes \mathcal{O}_\Omega & \longrightarrow & F|_x & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \tau & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \xrightarrow{\delta_\omega} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \longrightarrow & \text{coker } u|_\Omega & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_\Gamma, k(x))^\vee & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \quad (7)$$

Покажем, что

$$\theta_x(\omega) = \delta_\omega. \quad (8)$$

Выберем произвольные тривиализации расслоений E и F в открытой окрестности $U \supset \Omega$, и пусть $e_i \in \Gamma(U, E)$, $i = 1, \dots, p$, и $f_j \in \Gamma(U, F)$, $j = 1, \dots, p+1$, — их базисы. Тогда $\bar{e}_i = e_i \bmod \mathcal{I}_\Omega$, $\bar{f}_j = f_j \bmod \mathcal{I}_\Omega$ — базисы свободных $\mathcal{O}_\Omega$ -модулей $E \otimes \mathcal{O}_\Omega$ и $F \otimes \mathcal{O}_\Omega$ соответственно, и $e_i = \bar{e}_i \bmod \varepsilon$, $f_j = \bar{f}_j \bmod \varepsilon$ — базисы $k(x)$ -векторных пространств $E|_x$ и $F|_x$.

Пусть $r = \text{rk } u|_x$ и базисы e_i и f_j выбраны так, что

$$\begin{aligned}
 (u|_x)e_i &= \sum_j a_{ij} f_j, & p+1-r \leq i \leq p, \\
 (u|_x)e_i &= 0, & 1 \leq i \leq p-r.
 \end{aligned}$$

Таким образом, матрица A_x гомоморфизма $u|_x$ имеет блочный вид

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_Ω гомоморфизма $u|_\Omega$ такова:

$$A_\Omega = \begin{pmatrix} \varepsilon b_{ij} & a_{ij} + \varepsilon a'_{ij} \\ \varepsilon c_{ij} & \varepsilon d_{ij} \end{pmatrix}, \quad a'_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in k(x),$$

так что $A_x = A_\Omega \bmod \varepsilon$. По построению в (7) $\alpha(e_i) = \beta(\bar{e}_i)$, $1 \leq i \leq p-r$, и

$$(u|_\Omega)(\bar{e}_i) = \varepsilon \sum_{j=1}^r b_{ij} \bar{f}_j + \varepsilon \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} \bar{f}_j, \quad 1 \leq i \leq p-r.$$

Так как $\gamma(f_j) = \varepsilon \bar{f}_j$, то

$$(u|_{\Omega})(\bar{e}_i) = \gamma \left(\sum_{j=1}^r b_{ij} f_j + \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} f_j \right), \quad 1 \leq i \leq p-r.$$

По определению отображения τ и выбору базисов

$$\tau \left(\sum_{j=1}^r b_{ij} f_j + \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} f_j \right) = \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} \tilde{f}_j, \quad 1 \leq i \leq p-r,$$

где $\{\tilde{f}_j = f_j \bmod (im u|_x)\}$ – базис в $\text{соker } u|_x$.

По построению связывающего гомоморфизма δ_{ω} имеют место равенства

$$\delta_{\omega}(e_i) = \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} \tilde{f}_j, \quad 1 \leq i \leq p-r,$$

и, таким образом,

$$\delta_{\omega} = \sum_{i=1}^{p-r} \sum_{j=r+1}^{p+1} c_{ij} \tilde{f}_j \otimes e_i^{\vee}.$$

Теперь обратимся к универсальной детерминантальной

$$\mathbf{D} := \mathbf{V}(E^{\vee} \otimes F) \stackrel{\text{set}}{=} \{(x, u^{\vee}) \mid x \in X, u^{\vee} \in \text{Hom}_k(F^{\vee}|_x, E^{\vee}|_x)\}$$

с фильтрацией подмногообразиями

$$\mathbf{D}_r = \{(x, u^{\vee}) \in \mathbf{D} \mid x \in X, \text{rk } u^{\vee} = r\}$$

и проекцией $\text{pr}: \mathbf{D} \rightarrow X$. Далее, пусть $x_1, \dots, x_n$ – локальные координаты в открытой окрестности U , $\Omega \subset U \supset x$. Выбранные ранее тривиализации расслоений E и F дают локальные координаты (y_{ij}, x_l) , $1 \leq i \leq p+1$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq l \leq n$, в $\text{pr}^{-1}(U)$. В этой системе координат точка $y_0 = (x, A_x) \in \mathbf{D}$ имеет координаты

$$y_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } 1 \leq i \leq r, p+1-r \leq j \leq p, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad x_l = 0, \quad 1 \leq l \leq n.$$

В координатах (y_{ij}, x_l) уравнения подмногообразия $\mathbf{D}_r \cap \text{pr}^{-1}(U)$ в окрестности y можно написать в следующей матричной форме

$$Y_c - Y_d Y_a^{-1} Y_b = 0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} Y_a &= (y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ p+1-r \leq j \leq p}}, & Y_b &= (y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p-r}}, \\ Y_c &= (y_{ij})_{\substack{r+1 \leq i \leq p+1 \\ 1 \leq j \leq p-r}}, & Y_d &= (y_{ij})_{\substack{r+1 \leq i \leq p+1 \\ p+1-r \leq j \leq p}}. \end{aligned}$$

Матрицы Y_b и Y_d обращаются в нуль в точке y_0 ; тогда, дифференцируя (9), получим следующие уравнения в $T_{y_0}\mathbf{D}$ касательного пространства к $T_{y_0}\mathbf{D}_r$:

$$dy_{ij} = 0, \quad r+1 \leq i \leq p+1, \quad 1 \leq j \leq p-r, \quad (10)$$

где dy_{ij} , $1 \leq i \leq p+1$, $1 \leq j \leq p$, — координаты в $T_{y_0}\mathbf{D}$.

Рассмотрим морфизм $u^\vee$ как сечение $\mathcal{O}_X \rightarrow E \otimes F^\vee$. Двойственный к нему морфизм определяет вложение $\varphi_{u^\vee}: X \hookrightarrow \mathbf{D}$, и вектор $v = (d\varphi_{u^\vee}|_x)(\omega)$ имеет координаты

$$(dy_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{ij} & a'_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

По определению θ_x $\theta_x(\omega) = v \bmod T_{y_0}\mathbf{D}_r \in N_{\mathbf{D}_r}\mathbf{D} = (\ker u|_x)^\vee \otimes \operatorname{coker} u|_x$. В базисе $e_i^\vee \otimes \tilde{f}_j$ пространства $(\ker u|_x)^\vee \otimes \operatorname{coker} u|_x$ вектор v в силу (10), (11) имеет вид

$$\theta_x(\omega) = \sum_{i=1}^{p+1-r} \sum_{j=r+1}^p c_{ij} e_i^\vee \otimes \tilde{f}_j,$$

что доказывает (8). Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Отображение RKS в виде (5) совпадает со спариванием Йонеды.*

В работе Тихомирова [6] доказана сюръективность спаривания (5). В силу леммы 1 и предложения доказана

ТЕОРЕМА 1. *Многообразие $\bar{\Gamma}$ гладко.*

2. Построение изоморфизма $\widetilde{\mathcal{S} \times H_d} \simeq \bar{\Gamma}$. Введем некоторые обозначения. Пусть $p_2: X \rightarrow H = H_{d+1}$ — проекция произведения $X = \mathcal{S} \times H$ на второй сомножитель и $\Gamma \rightarrow H$ — индуцированный ею морфизм универсальной подсхемы $\Gamma \subset X$ на H . Далее, обозначим через $\mathbb{G}$ расслоенное произведение $\Gamma \times_H \Gamma$; $\sigma: \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ — детерминантное разрешение и $\mathbb{G} := \bar{\Gamma} \times_H \mathbb{G}'$. Пусть $\Gamma'_1 \simeq \Gamma$ — диагональ в $\mathbb{G}'$ и $\Gamma_1 \simeq \bar{\Gamma}$ — ее прообраз в $\mathbb{G}$. Имеет место следующая расслоенная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{X} := \bar{\Gamma} \times \mathcal{S} & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \Gamma \times \mathcal{S} & \xrightarrow{\pi'} & X \\ \text{pr} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \bar{\Gamma} & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma & \longrightarrow & H \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{G} & \longrightarrow & \mathbb{G}' & \longrightarrow & \Gamma \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \Gamma_1 & \longrightarrow & \Gamma'_1 & & \end{array}$$

и $\pi: \mathbb{X} \rightarrow X$ — композиция $\pi = \pi' \circ \bar{\sigma}$.

Применение к (1) замены базы $\Gamma \rightarrow H$ приводит к точной тройке $\mathcal{O}_{\Gamma \times \mathcal{S}}$ -пучков:

$$0 \rightarrow \pi'^* E \rightarrow \pi'^* F \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{G}'} \rightarrow 0. \quad (12)$$

Все пучки в (12) плоские над Γ , поэтому замена базы $\sigma: \bar{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ снова приводит к точной последовательности:

$$0 \rightarrow \bar{\sigma}^* \pi'^* E \rightarrow \bar{\sigma}^* \pi'^* F \rightarrow \bar{\sigma}^* \mathcal{I}_{\mathbb{G}'} \rightarrow 0. \quad (13)$$

С другой стороны, применяя функтор σ^* к стандартной точной тройке

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{G}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\Gamma \times \mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}'} \rightarrow 0,$$

получим

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \rightarrow 0.$$

Тем самым, согласно (13) по построению π имеем

$$0 \rightarrow \pi^* E \rightarrow \pi^* F \rightarrow \mathcal{I}_{\Gamma} \rightarrow 0. \quad (14)$$

Обозначим ω_{pr} относительный дуализирующий пучок при проекции $\text{pr}: \omega_{\text{pr}} = \omega_{\mathbb{X}/\bar{\Gamma}} = \omega_{\mathcal{S}} \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}$. В нашем случае пучок ω_{pr} обратим [7, гл. III, § 7] и удовлетворяет соотношению $\omega_{\text{pr}} \otimes \text{pr}^* \omega_{\bar{\Gamma}} = \omega_{\mathbb{X}}$. Это позволяет вычислить следующие пучки Ext :

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbb{X}}^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1}, \omega_{\text{pr}}) &= \text{Ext}_{\mathbb{X}}^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1}, \mathcal{O}_{\mathbb{X}}) = \mathcal{O}_{\Gamma_1}, \\ \text{Ext}_{\mathbb{X}}^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1} \otimes \omega_{\text{pr}}^{-1}, \pi^* E) &= \sigma^* E \otimes \text{Ext}_{\mathbb{X}}^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1}, \omega_{\text{pr}}) = \sigma^* E, \\ \text{Ext}_{\mathbb{X}}^2(\mathcal{O}_{\Gamma_1} \otimes \omega_{\text{pr}}^{-1}, \pi^* F) &= \sigma^* F. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем обозначать $\mathcal{O}_{\Gamma_1} \otimes \omega_{\text{pr}}^{-1} =: \omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}$. Также ввиду того, что $\text{codim}_{\mathbb{X}} \Gamma_1 = 2$, следующие пучки Ext обращаются в нуль:

$$\text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \pi^* E) = \text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \pi^* F) = 0.$$

Тем самым, применение к (14) функтора $\text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, -)$ приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \rightarrow \sigma^* E \rightarrow \sigma^* F. \quad (15)$$

В прообразе $p^* E$ векторного расслоения E при проекции $p: V \rightarrow X$ имеется каноническое линейное подрасслоение $\mathcal{O}_V(-1) \hookrightarrow p^* E$; после ограничения на $\bar{\Gamma}$ это дает подрасслоение $\mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(-1) \hookrightarrow \sigma^* E$. Вместе с тем, по построению $\bar{\Gamma} = (s^\vee)_0$, где $s^\vee \in H^0(p^* F \otimes \mathcal{O}_V(1))$, и композиция s в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) & \longrightarrow & \sigma^* E & \longrightarrow & \sigma^* F \\ & & & & \uparrow & \nearrow s & \\ & & & & \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}}(-1) & & \end{array} \quad (16)$$

— нулевой морфизм. Поэтому определено сечение

$$\rho: \mathcal{O}_{\bar{\Gamma}} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}(-1)|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}). \quad (17)$$

Ограничивая (16) и (17) на слой над точкой $z \in \bar{\Gamma}$, где $z = (q, Z_{d+1}, \varphi)$, $q \in \mathcal{S}$, $Z_{d+1} \in H$, φ – точка слоя морфизма σ над $(q, Z_{d+1}) \in \Gamma$, получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \otimes k(z) & \longrightarrow & E|_z & \longrightarrow & F|_z \\ & \nearrow \rho|_z & & \uparrow & & \\ & & & k(z) & & \end{array}.$$

Также имеется морфизм замены базы

$$\mathrm{bch}: \mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\mathcal{O}_{\Gamma_1} \otimes \omega_{\mathrm{pr}}^{-1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \otimes k(z) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(k, \mathcal{I}_{Z_{d+1}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(k, \mathcal{O}_{Z_{d+1}}).$$

Применение к (1) функтора σ^* приводит к точной тройке

$$0 \rightarrow \sigma^* E \rightarrow \sigma^* F \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbb{G}} \rightarrow 0.$$

Ограничим ее на слой над $\bar{z} := \sigma(z)$:

$$0 \rightarrow \sigma^* E|_{\mathcal{S}} \rightarrow \sigma^* F|_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{I}_{Z_{d+1}} \rightarrow 0. \quad (18)$$

В силу того, что спектральная последовательность локальных и глобальных Ext -функторов вырождается, имеются изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^2(k(\bar{z}), E|_{\mathcal{S}}) &= H^0(\mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^2(k(\bar{z}), E|_{\mathcal{S}})) = E|_{\bar{z}}, \\ \mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^2(k(\bar{z}), F|_{\mathcal{S}}) &= H^0(\mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^2(k(\bar{z}), F|_{\mathcal{S}})) = F|_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

группы Ext^1 для локально свободных пучков обращаются в 0:

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(k(\bar{z}), E|_{\mathcal{S}}) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(k(\bar{z}), F|_{\mathcal{S}}) = 0,$$

и применение к (18) функтора $\mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(k(\bar{z}), -)$ приводит к диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{S}}^1(k(\bar{z}), \mathcal{I}_{Z_{d+1}}) & \longrightarrow & E|_{\bar{z}} & \longrightarrow & F|_{\bar{z}}, \\ & \nearrow \bar{\rho} & & \uparrow & & \\ & & & k & & \end{array}$$

где строка точна, а морфизм $\bar{\rho}$ – ненулевой. Таким образом, сечение ρ , будучи ограничено на точку $z \in \bar{\Gamma}$, ставит ей в соответствие одномерное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(k, \mathcal{O}_{Z_{d+1}})$.

Применяя к (15) функтор pr_* и замечая, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})$ и $\mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})$ – пучки относительной размерности 0, получим вырождение спектральной последовательности локальных и относительных функторов Ext и, как следствие, изоморфизм $\mathrm{pr}_* \mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{pr}}^1(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})$ и точную тройку

$$0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{pr}}^1(\omega_{\mathrm{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \rightarrow \mathrm{pr}_* \sigma^* E \rightarrow \mathrm{pr}_* \sigma^* F.$$

Наконец, выпишем длинную точную последовательность, ассоциированную со спектральной последовательностью глобальных и относительных функторов Ext для пучков $(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})$:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^1(\text{Hom}_{\text{pr}}(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})) &\rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \rightarrow H^0(\text{Ext}_{\text{pr}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})) \\ &\rightarrow H^2(\text{Hom}_{\text{pr}}(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Пучок $\text{Hom}_{\text{pr}}(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}})$ равен нулю, и отсюда имеем изоморфизм $\text{Ext}_{\mathbb{X}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}) \simeq H^0(\text{Ext}_{\text{pr}}^1(\omega_{\text{pr}}^{-1}|_{\Gamma_1}, \mathcal{I}_{\mathbb{G}}))$.

Таким образом, сечение ρ задает глобально универсальное семейство флагов 0-подсхем вида $q \in Z_{d+1} \supset Z_d$, так что точна тройка

$$0 \rightarrow k \rightarrow \mathcal{O}_{Z_{d+1}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_d} \rightarrow 0.$$

Согласно [8] тем самым построен морфизм многообразия $\bar{\Gamma}$ в многообразие полных пар $\widetilde{\mathcal{S} \times H_d} = \text{Bl}_{\Gamma_{1d}}(\mathcal{S} \times H_d)$. По построению это бирациональный биективный морфизм гладких многообразий. Согласно основной теореме Зарисского [9] он является изоморфизмом. Тем самым, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – универсальная подсистема в X , и $\bar{\Gamma}$ – схема нулей регулярного сечения $s^\vee$ векторного расслоения $p^*F \otimes \mathcal{O}_V(1)$ на многообразии $V = \mathbf{P}(E^\vee)$, такого, что $p_*s^\vee = u^\vee \in H^0(V, F \otimes E^\vee)$. Тогда $\bar{\Gamma}$ изоморфно $\widetilde{\mathcal{S} \times H_d}$.

СЛЕДСТВИЕ. Схема $\bar{\Gamma}$ не зависит от выбора резольвенты пучка $\mathcal{I}_\Gamma$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fogarty J. Algebraic families on an algebraic surface. II. The Picard scheme of the punctual Hilbert scheme // Amer. J. Math. 1974. V. 96. P. 660–687.
- [2] Matsumura H. Commutative Algebra. New York: Benjamin Co., 1970.
- [3] Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
- [4] Hirschowitz A. Rank Techniques and Jump Stratifications // Vector Bundles on Algebraic Varieties. Bombay Colloquium. Oxford: Univ. Press, 1984. P. 195–205.
- [5] Бурбаки Н. Элементы математики. Алгебра. Гл. X. Гомологическая алгебра. М.: Наука, 1987.
- [6] Тихомиров А.С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 153–180.
- [7] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
- [8] Тихомиров А.С. Гладкая модель пунктуальных схем Гильберта поверхности // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 318–334.
- [9] Данилов В.И. Алгебраические многообразия и схемы // Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1988. С. 172–302.

Ярославский государственный университет им. К. Д. Ушинского
E-mail: timof@yspu.yar.ru

Поступило
24.09.1999
Исправленный вариант
01.03.2000