Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Токарев, Обобщение формулы Березина на некоммутативный случай, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 295–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:54:00

УДК 517

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ БЕРЕЗИНА НА НЕКОММУТАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ

А. Г. Токарев

В пространствах Фока с помощью функциональных интегралов построены представления экспонент от операторов, являющихся квадратичными функциями от операторов рождения и уничтожения с некоммутирующими коэффициентами (удовлетворяющими некоторым ограничениям аналитического характера).

Библиография: 7 названий.

В работе с помощью функциональных интегралов построена сильно непрерывная полугруппа унитарных операторов с генератором $i\bar{A}$, где $\bar{A}$ – самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}(L)$ вида

$$\bar{A} = I \otimes \hat{a}^\dagger E \hat{a} + \hat{K} \otimes \hat{a}^\dagger C \hat{a} + \hat{R}^\dagger \otimes \hat{a}(f^*) + \hat{R} \otimes \hat{a}^\dagger(f) + \hat{H}_0 \otimes I.$$

Здесь L – гильбертово пространство с инволюцией $*$, $\mathcal{F}(L)$ – симметризованное пространство Фока над L , $f \in L$, $\hat{a}^\dagger(f)$, $\hat{a}(f^*)$ – операторы рождения и уничтожения, C, E – самосопряженные операторы в L и C – ограниченный оператор; $\hat{K}, \hat{R}, \hat{H}_0$ – псевдодифференциальные операторы в $L^2(\mathbb{R}^l)$, символы которых являются преобразованиями Фурье мер ограниченной вариации, символ $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение и I – тождественный оператор в соответствующем пространстве. Дано описание таких полугрупп как в представлении Фока, так и в представлении Баргмана–Фока.

Результаты этой статьи по существу являются некоммутативными аналогами формулы Березина [1, гл. III, § 6, теорема II] и позволяют в рамках описанного выше подхода устанавливать связи между квантовыми стохастическими дифференциальными уравнениями и унитарными однопараметрическими полугруппами в некоммутативном случае.

1. Некоторые обозначения. Терминология и обозначения из [2] и [3] используются обычно без объяснений. Все встречающиеся здесь банаховы пространства являются сепарабельными. Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Пусть Z_1, Z_2 – банаховы пространства. Пусть $\mathcal{L}(Z_1, Z_2)$ – пространство ограниченных линейных отображений из Z_1 в Z_2 со стандартной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(Z, Z)$.

Пусть $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(X)$ – борелевская σ -алгебра подмножеств топологического пространства X . Во всех банаховых пространствах и их борелевских подмножествах фиксируются борелевские σ -алгебры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-012012.

Пусть (X, Σ_X) – измеримое пространство. Мерой на X со значениями в Z будем называть счетно-аддитивную функцию $\mu: \Sigma_X \rightarrow Z$, обладающую конечной полной вариацией $\text{var}(\mu)$. Вариация меры μ обозначается символом $|\mu|$. Таким образом, вариация – это положительная мера на X и $|\mu|(X) = \text{var}(\mu)$.

Символом $L^2(X, \mu, Z)$ обозначим банахово пространство классов эквивалентности совпадающих почти всюду относительно меры μ μ -измеримых отображений $\varphi: X \rightarrow Z$ таких, что

$$\int_X \|\varphi(q)\|_Z^2 dq < \infty,$$

с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством

$$\|\varphi\|^2 = \int_X \|\varphi(x)\|_Z^2 dx.$$

Если L – комплексное гильбертово пространство, то $L^2(X, \mu, L)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_X \langle \varphi_1(x), \varphi_2(x) \rangle_L \mu(dx).$$

При этом существует канонический изоморфизм между пространством $L^2(X, \mu, L)$ и гильбертовым тензорным произведением пространств $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ и L . В случае, когда $X = \mathbb{R}^l$ и μ – мера Лебега, положим $L^2(\mathbb{R}^l, Z) = L^2(\mathbb{R}^l, \mu, Z)$ и $L^2(\mathbb{R}^l) = L^2(\mathbb{R}^l, \mu, \mathbb{C})$.

Псевдодифференциальный оператор $\hat{H}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ с qp -символом $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющим определенным условиям, определяется с помощью выражения

$$(\hat{H}\varphi)(q) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} H(q, p) e^{ip(q'-q)} \varphi(q') dq' dp.$$

Нетрудно показать, что если

$$H(q, p) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{iqy + ipx} \mu(dy, dx)$$

– преобразование Фурье меры $\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, то псевдодифференциальный оператор $\hat{H}$ с qp -символом H определен и для $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство

$$(\hat{H}\varphi)(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i\langle \cdot, y \rangle} \varphi(\cdot - x) \mu(dy, dx).$$

Поскольку символы всех встречающихся здесь псевдодифференциальных операторов являются преобразованиями Фурье ограниченных мер, мы примем эту формулу в качестве определения псевдодифференциального оператора $\hat{H}$ с qp -символом H .

2. Интегралы по векторнозначным мерам. Утверждения этого пункта являются обобщениями теорем классической теории меры и могут быть доказаны аналогичными методами.

Пусть Z, T, L – банаховы пространства. Пусть (X, Σ_X) – измеримое пространство и $\mu: \Sigma_X \rightarrow Z$ – мера на X . Определим интеграл $\int_X f(x) \mu(dx)$ отображения $f: X \rightarrow T$ по мере μ при фиксированной непрерывной билинейной форме $p: T \times Z \rightarrow L$.

Предположим сначала, что $f: X \rightarrow T$ – простая функция, т.е. $f = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{E_k}$, где χ_{E_k} – характеристическая функция множества $E_k \in \Sigma_X$ и $b_k \in T$. Определим интеграл f по мере μ равенством

$$\int_X f(x) \mu(dx) = \sum_{k=1}^n p(b_k, \mu(E_k)).$$

Произвольную функцию f назовем *интегрируемой по мере μ* , если существует последовательность простых функций $f_m: X \rightarrow T$ такая, что $f_m(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду относительно меры $|\mu|$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$\int \|f_m(x) - f_k(x)\|_T |\mu|(dx) < \varepsilon$$

для всех $m, k > N$. В этом случае последовательность $\int_X f_m(x) \mu(dx)$ фундаментальна в L , ее предел назовем *интегралом f по μ* при фиксированной форме p и обозначим $\int_X f(x) \mu(dx)$.

В дальнейшем при интегрировании мы часто будем использовать описанную конструкцию. При этом всегда будет ясно, какая конкретно используется форма p , хотя в записи интеграла $\int_X f(x) \mu(dx)$ мы ее указывать не будем.

3. Функциональные интегралы. Всюду ниже $P = Q = \mathbb{R}^l$. Здесь эти обозначения используются лишь для удобства, хотя пространствам Q и P можно придать смысл конфигурационного и импульсного пространств соответственно. Пусть

$$\langle q, p \rangle = qp = pq = \sum_{k=1}^l p_k q_k$$

для $p = (p_1, \dots, p_l) \in P, q = (q_1, \dots, q_l) \in Q$.

Через F_P и F_Q обозначим пространства мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ со значениями в P и Q соответственно. Пусть $F = F_P \times F_Q$. Элементы F будем обозначать $y = (y_P, y_Q)$, $y_P \in F_P, y_Q \in F_Q$.

Вещественное линейное пространство всех ограниченных кусочно-непрерывных, непрерывных справа функций на $[0, \infty)$ со значениями в Q обозначим через F'_Q , а со значениями в P – через F'_P . Положим $F' = F'_Q \times F'_P$. Элементы F' будем обозначать $x = (x_Q, x_P)$, $x_Q \in F'_Q, x_P \in F'_P$.

Определим билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle: F' \times F \rightarrow \mathbb{R}$ равенством

$$\langle (x_Q, x_P), (y_P, y_Q) \rangle = \int_0^\infty x_Q(\tau) y_P(d\tau) + \int_0^\infty x_P(\tau) y_Q(d\tau).$$

Обозначим через Σ_F σ -алгебру подмножеств F , порожденную функционалами $\langle x, \cdot \rangle$, $x \in F'$.

Определим отображение

$$g: F \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: (y_P, y_Q) \mapsto \int_0^\infty y_Q(\tau, \infty) y_P(d\tau).$$

Пусть T, L – комплексные банаховы пространства. Пусть $f: F' \rightarrow \mathcal{L}(T, L)$ – преобразование Фурье меры $\mu: \Sigma_F \rightarrow \mathcal{L}(T, L)$. Зафиксируем непрерывное билинейное отображение $p: L^2(\mathbb{R}^l, T) \times \mathcal{L}(T, L) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l, L)$, $p: (\psi, A) \mapsto A\psi$, где $(A\psi)(q) = A\psi(q)$, $q \in \mathbb{R}^l$. Тогда для $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^l, T)$ отображение

$$\Psi_\varphi: F \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l, T), \quad \Psi_\varphi: (y_P, y_Q) \mapsto \exp(i\langle \cdot, y_P[0, \infty) \rangle - ig(y_P, y_Q))\varphi(\cdot - y_Q[0, \infty))$$

интегрируемо по мере μ . Определим оператор $I_g(f): L^2(\mathbb{R}^l, T) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l, L)$ равенством

$$I_g(f)\varphi = \int_F \Psi_\varphi(y)\mu(dy) = \int_F e^{i\langle \cdot, y_P[0, \infty) \rangle - ig(y_P, y_Q)} \varphi(\cdot - y_Q[0, \infty)) \mu(dy_P, dy_Q), \quad (1)$$

где $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^l, T)$. Отметим, что $\|I_g(f)\| \leq \text{var}(\mu)$.

Между пространствами L и $\mathcal{L}(\mathbb{C}, L)$ существует естественный изометрический изоморфизм $j: L \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}, L)$, $j: b \mapsto \hat{b}$, где $\hat{b} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, L)$, $\hat{b}: z \mapsto bz$. В силу этого и приведенной выше конструкции каждой функции $f: F' \rightarrow L$, являющейся преобразованием Фурье меры $\mu: \Sigma_F \rightarrow L$, поставим в соответствие оператор $I_g(f): L^2(\mathbb{R}^l) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l, L)$ по формуле (1).

Заметим, что оператор $I_g(f)\varphi$ можно представить в виде

$$(I_g(f)\varphi)(q) = \int_{F'} f(x_Q + q, x_P)\varphi(x_Q(0) + q) \Phi_g(dx_Q, dx_P),$$

где интеграл в правой части можно понимать как функциональный интеграл по траекториям в фазовом пространстве, определенный с помощью равенства Парсеваля (ср. [4, гл. 3, § 2], [5], [6]).

Используя [2, гл. III, п. 5, следствие 9], можно показать, что любая мера на F однозначно определяется своим преобразованием Фурье. Поэтому функция f однозначно определяет некоторый оператор $I_g(f)$ по формуле (1).

4. Основные меры, их преобразования Фурье и свойства. Далее мы будем использовать следующую конструкцию. Пусть (Ω, Σ_Ω) – измеримое пространство и $\mu: \Sigma_\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ – скалярная мера на Ω . Пусть L – сепарабельное гильбертово пространство и отображение $\rho: \Omega \rightarrow \mathcal{L}(L)$ удовлетворяет следующим условиям. Функция $\|\rho(\cdot)\|_{\mathcal{L}}$ измерима и

$$\int_\Omega \|\rho\|_{\mathcal{L}} d|\mu| < \infty;$$

отображение $\rho(\cdot)b: \Omega \rightarrow L$, $\rho(\cdot)b: \omega \mapsto \rho(\omega)b$ измеримо по Бохнеру для всех $b \in L$. Для $M \in \Sigma_\Omega$ определим интеграл $\int_M \rho(\omega) \mu(d\omega)$ как ограниченный линейный оператор в L такой, что

$$\left(\int_M \rho d\mu \right) (b) = \int_M \rho(\omega)b \mu(d\omega).$$

Это определение корректно, так как

$$\left\| \int_M \rho(\omega) b \mu(d\omega) \right\|_L \leq \int_M \|\rho\|_{\mathcal{L}} d|\mu| \cdot \|b\|_L$$

и, следовательно,

$$\left\| \int_M \rho d\mu \right\|_{\mathcal{L}} \leq \int_M \|\rho\|_{\mathcal{L}} d|\mu|.$$

Отсюда вытекает, что функция множества $\rho\mu: \Sigma_{\Omega} \rightarrow \mathcal{L}(L)$, $\rho\mu: M \mapsto \int_M \rho d\mu$ счетно аддитивна и

$$\text{var}(\rho\mu) \leq \int_{\Omega} \|\rho\|_{\mathcal{L}} d|\mu|.$$

Поэтому $\rho\mu$ – мера. Ясно, что если $\rho(\cdot)$ – измеримое по Бохнеру отображение, то $\int_M \rho d\mu$ совпадает с интегралом Бохнера функции ρ .

Пусть $\lambda(dr)$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ и $\lambda_M(dr)$ – сужение λ на ограниченное борелевское множество $M \subset \mathbb{R}_+^n$. Для $r \geq 0$ и комплексной борелевской меры μ на $P \times Q$ обозначим через μ_r образ меры μ при отображении $j_r: P \times Q \rightarrow F$, $j_r: (p, q) \mapsto (p, q)\delta_r$. Определим меру $\int_0^t \mu_{\tau} d\tau: \Sigma_F \rightarrow \mathbb{C}$ как образ меры $\lambda_{[0,t]} \times \mu$ при отображении $[0, t] \times P \times Q \rightarrow F$, $(r, p, q) \mapsto (p, q)\delta_r$. Пусть $\rho: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathcal{L}(L)$ – ограниченное отображение такое, что отображения $\|\rho(\cdot)\|_{\mathcal{L}}$ и $\rho(\cdot)b$, $b \in L$, измеримы по Бохнеру. Для комплексных борелевских мер $\mu^1, \dots, \mu^n$ на $P \times Q$ и ограниченного борелевского множества $M \subset \mathbb{R}_+^n$ определим меру $\varkappa: \Sigma_F \rightarrow \mathcal{L}(L)$,

$$\varkappa = \int \cdots \int_M \rho(r_1, \dots, r_n) \mu_{r_1}^1 * \cdots * \mu_{r_n}^n d^n r$$

как образ меры $\rho \lambda_M \times \mu^1 \times \cdots \times \mu^n$ при отображении $\pi_n|_{M \times (P \times Q)^n}$, которое является сужением на множество $M \times (P \times Q)^n$ измеримого отображения $\pi_n: \mathbb{R}_+^n \times (P \times Q)^n \rightarrow F$, $\pi_n: (r_1, \dots, r_n, (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)) \mapsto (p_1, q_1)\delta_{r_1} + \cdots + (p_n, q_n)\delta_{r_n}$. Из определения вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{var}(\varkappa) &\leq \text{var}(\mu^1) \cdots \text{var}(\mu^n) \int_M \|\rho(r)\|_{\mathcal{L}} \lambda(dr) \\ &\leq \text{var}(\mu^1) \cdots \text{var}(\mu^n) \lambda(M) \sup_{r_k \geq 0} \|\rho(r_1, \dots, r_n)\|_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Пусть $C \in \mathcal{L}(L)$ и E – самосопряженный, возможно неограниченный оператор в L . Определим ограниченные отображения

$$\rho_n: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathcal{L}(L), \quad \rho_n: (r_1, \dots, r_n) \mapsto e^{-ir_n E} C e^{ir_n E} \cdots e^{-ir_1 E} C e^{ir_1 E}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что для каждого $b \in L$ отображения $\rho_n(\cdot)b: \mathbb{R}_+^n \rightarrow L$ непрерывны. Пусть $\mu, \nu, \nu^\dagger, \theta$ – комплексные борелевские меры ограниченной вариации на $P \times Q$.

Пусть $t \geq 0$, δ_0 – мера Дирака на F , сосредоточенная в точке 0, и I – тождественный оператор в L . Определим четыре операторнозначные меры:

$$\mu_{s,t} = e^{itE} \left(I\delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int \cdots \int_{s \leq r_1 \leq \cdots \leq r_n \leq t} \rho_n(r) \mu_{r_1} * \cdots * \mu_{r_n} d^n r \right) e^{-isE}, \quad (2)$$

$$0 \leq s \leq t < \infty,$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \mu_{0,\tau} * \nu_{\tau}^{\dagger} d\tau &= \int_0^t e^{i\tau E} \nu_{\tau}^{\dagger} d\tau \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^t d\tau \int \cdots \int_{0 \leq r_1 \leq \cdots \leq r_n \leq \tau} e^{i\tau E} \rho_n(r) \mu_{r_1} * \cdots * \mu_{r_n} * \nu_{\tau}^{\dagger} d^n r, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \nu_{\sigma} * \mu_{\sigma,t} d\sigma &= \int_0^t e^{i(t-\sigma)E} \nu_{\sigma} d\sigma \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^t d\sigma \int \cdots \int_{\sigma \leq r_1 \leq \cdots \leq r_n \leq t} e^{itE} \rho_n(r) e^{-i\sigma E} \nu_{\sigma} * \mu_{r_1} * \cdots * \mu_{r_n} d^n r, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\sigma \nu_{\sigma} * \mu_{\sigma,\tau} * \nu_{\tau}^{\dagger} &= \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\sigma e^{i(\tau-\sigma)E} \nu_{\sigma} * \nu_{\tau}^{\dagger} + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\sigma \\ &\times \int \cdots \int_{\sigma \leq r_1 \leq \cdots \leq r_n \leq \tau} e^{i\tau E} \rho_n(r) e^{-i\sigma E} \nu_{\sigma} * \mu_{r_1} * \cdots * \mu_{r_n} * \nu_{\tau}^{\dagger} d^n r. \end{aligned} \quad (5)$$

В формулах (2)–(5) правые части являются определением левых, а символы интегралов в левых частях формул используются лишь для обозначения.

Так как вариация n -го члена ряда в (2) не превосходит $\|C\|_{\mathcal{L}}^n \text{var}(\mu)^n/n!$, то ряд в (2) сходится по вариации. То же справедливо для мер (3)–(5).

Пусть $K, R, R^{\dagger}, H_0$ – преобразования Фурье мер $\mu, \nu, \nu^{\dagger}, \theta: \mathcal{B}(P \times Q) \rightarrow \mathbb{C}$ на $P \times Q$ соответственно. Пусть $W_s^t, f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t}: F' \rightarrow \mathcal{L}(L)$ – преобразования Фурье мер $\mu_{s,t}$, (3), (4), (5) соответственно и отображение $f_{4,t}: F' \rightarrow \mathbb{C}$ – преобразование Фурье меры $\int_0^t \theta_{\tau} d\tau$. Тогда можно доказать, что

$$\begin{aligned} f_{1,t}(x) &= \int_0^t R^{\dagger}(x(\tau)) W_0^{\tau}(x) d\tau, & f_{2,t}(x) &= \int_0^t W_{\sigma}^t(x) R(x(\sigma)) d\sigma, \\ f_{3,t}(x) &= \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} d\sigma R^{\dagger}(x(\tau)) W_{\sigma}^{\tau}(x) R(x(\sigma)), & f_{4,t}(x) &= \int_0^t H_0(x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

для $x = (x_Q, x_P) \in F'$.

5. Основные понятия метода вторичного квантования. Пусть L – сепарабельное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, антилинейным по второму аргументу. Пусть $*$: $L \rightarrow L$ – инволюция в L , т.е. антилинейное отображение такое, что $\langle f_1^*, f_2^* \rangle_L = \langle f_2, f_1 \rangle_L$ и $(f_1^*)^* = f_1$ для всех $f_1, f_2 \in L$. Определим билинейное отображение $L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ так, что $f_1 f_2 = \langle f_1, f_2^* \rangle_L$. Для $C \in \mathcal{L}(L)$ определим правое действие C на вектор $f \in L$: $fC = (C^{\dagger} f^*)^*$, где $C^{\dagger}$ – оператор, эрмитово сопряженный к C . Тогда $f_1(Cf_2) = (f_1 C) f_2 = f_1 C f_2$.

Пусть $\mathcal{F}_n(L)$ ($n \in \mathbb{N}$) – симметризованное тензорное произведение n экземпляров пространства L и $\mathcal{F}_0(L) = \mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{F}(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(L)$ – симметричное пространство Фока над L . Для $a \in L$ обозначим через $e(a) = (a^{\otimes n} / \sqrt{n!}) \in \mathcal{F}(L)$ экспоненциальный вектор, соответствующий a .

Будем отождествлять пространства $L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}(L)$ и $\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}_n(L)$. В силу этого n -ю компоненту вектора $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}(L)$ в $\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}_n(L)$ будем обозначать через $(\Phi)_n \in L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}_n(L)$.

Пусть E – самосопряженный оператор в L . Самосопряженный оператор $\hat{a}^\dagger E \hat{a}$ в $\mathcal{F}(L)$ определяется тем, что в $\mathcal{F}_n(L)$ он равен $\sum_{k=1}^n I^{\otimes(k-1)} \otimes E \otimes I^{\otimes(n-k)}$ для $n \neq 0$ и 0 в $\mathcal{F}_0(L)$, где I – тождественный оператор.

Пусть $\hat{K}, \hat{R}, \hat{H}_0 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^l))$, $\hat{K}$ – самосопряженный оператор и $\hat{R}^\dagger$ – оператор, эрмитово сопряженный к $\hat{R}$. Пусть E и C – самосопряженные операторы в L , $C \in \mathcal{L}(L)$ и $f \in L$. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^l) \otimes \mathcal{F}(L)$ определим оператор

$$\bar{A} = I \otimes \hat{a}^\dagger E \hat{a} + \hat{K} \otimes \hat{a}^\dagger C \hat{a} + \hat{R} \otimes \hat{a}^\dagger(f) + \hat{R}^\dagger \otimes \hat{a}(f^*) + \hat{H}_0 \otimes I,$$

где область определения $\bar{A}$ совпадает с естественной областью определения выражения в правой части, $\hat{a}^\dagger(f)$ и $\hat{a}(f^*)$ – операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{F}(L)$ соответственно (см. [1]), I – тождественный оператор в соответствующем пространстве. Тогда оператор $\bar{A}$ самосопряжен.

6. Теорема о представлении решений. Пусть L – сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Зафиксируем $b, f \in L$ и $t \geq 0$. Для $\varkappa = \rho, \alpha, \beta, \gamma, u, v$ определим меры $\hat{\varkappa}_t$ на Σ_F и их преобразования Фурье $\varkappa_t$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_t &= \mu_{0,t}, \quad \rho_t: F' \rightarrow \mathcal{L}(L), \quad \rho_t(x) = W_0^t(x); \\ \hat{\alpha}_t &= i f^* \int_0^t \mu_{0,\tau} * \nu_\tau^\dagger d\tau, \quad \alpha_t: F' \rightarrow L, \quad \alpha_t(x) = i f^* \int_0^t R^\dagger(x(\tau)) W_0^\tau(x) d\tau; \\ \hat{\beta}_t &= i \int_0^t \nu_\tau * \mu_{\tau,t} d\tau f, \quad \beta_t: F' \rightarrow L, \quad \beta_t(x) = i \int_0^t W_\tau^t(x) R(x(\tau)) d\tau f; \\ \hat{\gamma}_t &= i f^* \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\sigma \nu_\sigma * \mu_{\sigma,\tau} * \nu_\tau^\dagger f + i \int_0^t \theta_\tau d\tau, \\ \gamma_t: F' &\rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_t(x) = i f^* \int_0^t d\tau \int_0^\tau d\sigma R^\dagger(x(\tau)) W_\sigma^\tau(x) R(x(\sigma)) f + i \int_0^t H_0(x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K, R, R^\dagger, H_0: Q \times P \rightarrow \mathbb{C}$ – преобразования Фурье мер ограниченной вариации $\mu, \nu, \nu^\dagger, \theta: \mathcal{B}(P \times Q) \rightarrow \mathbb{C}$ соответственно. Пусть $\hat{K}, \hat{R}, \hat{R}^\dagger, \hat{H}_0: L^2(\mathbb{R}^l) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l)$ – псевдодифференциальные операторы с q -символами $K, R, R^\dagger, H_0$ соответственно. Предположим, что меры $\mu, \nu, \nu^\dagger$ и θ таковы, что оператор $\hat{R}^\dagger$ является эрмитово сопряженным к оператору $\hat{R}$, а $\hat{K}$ и $\hat{H}_0$ – самосопряженные операторы.

Пусть E и C – самосопряженные операторы в сепарабельном комплексном гильбертовом пространстве L и C – ограниченный оператор.

Тогда для сильно непрерывной полугруппы $U_t = e^{it\bar{A}}$, $t \geq 0$, с генератором $i\bar{A}$ справедливо равенство $(U_t(\psi \otimes e(b)))_k = I_g((\rho_t b + \beta_t)^{\otimes k} e^{\alpha_t b + \gamma_t} / \sqrt{k!}) \psi$ для всех $\psi \in L^2(\mathbb{R}^l)$, $b \in L$ и $k = 0, 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Определим функции $g_{pq}, g_w: F \rightarrow \mathbb{R}$ так, что

$$g_{pq}(y_P, y_Q) = \int_0^\infty y_Q[\tau, \infty) y_P(d\tau), \quad g_w(y_P, y_Q) = \frac{1}{2}(g(y_P, y_Q) + g_{pq}(y_P, y_Q)).$$

Теорема 1 останется справедливой, если заменить функцию g на g_w (соответственно на g_{pq}) и считать, что функции $K, R, R^\dagger, H_0$ являются символами Вейля (соответственно pq -символами) операторов $\hat{K}, \hat{R}, \hat{R}^\dagger, \hat{H}_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Используя аналогичные конструкции и рассуждения, можно доказать аналог теоремы 1 для псевдодифференциальных операторов $\hat{K}: L^2(\mathbb{R}^l) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^l)$ вида

$$(\hat{K}\varphi)(q) = (2\pi)^{-l} \iint K(q, q', p) e^{ip(q'-q)} \varphi(q') dq' dp, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^l),$$

где $K(\cdot, \cdot, \cdot): Q \times Q \times P \rightarrow \mathbb{C}$ – символ оператора $\hat{K}$.

Автор благодарит О.Г. Смолянова и А.М. Чеботарева за ряд полезных советов и стимулирующее внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. М.: ИЛ, 1962.
- [3] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [4] Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т. Континуальные интегралы. М.: МГУ, 1990.
- [5] Смолянов О. Г. Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шредингеру // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 3. С. 558–561.
- [6] Смолянов О. Г., Хренников А. Ю. Алгебра бесконечномерных псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1310–1314.
- [7] Smolyanov O. G., Weizsaecker H. v. Smooth probability measures and associated differential operators // Infinitely Dimensional Analysis. Quantum Probability and Related Topics. 1999. V. 2. № 1. P. 51–79.

Московский государственный университет им М. В. Ломоносова

Поступило
29.05.2000