Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, Об одном условии сходимости в среднем тригонометрических рядов, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 323–328

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:15:10

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ СХОДИМОСТИ В СРЕДНЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. С. Белов

В статье строится пример тригонометрического ряда, который показывает неулучшаемость одного условия, тесно связанного со сходимостью в среднем тригонометрических рядов.

Библиография: 6 названий.

Пусть задан произвольный тригонометрический ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (1)$$

Как обычно,

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x),$$
$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^n i(-c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx})$$

при всех $n \geq 0$. Если $f \in L_{2\pi}$, то

$$\|f\| = \|f\|_1 = \|f\|_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Известно (см. [1, гл. 1, § 60]), что если ряд (1) является рядом Фурье, то его частные суммы S_n сходятся (ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда

$$\|\sigma_n - S_n\| = o(1) \quad (\text{соответственно} = O(1)). \quad (2)$$

В (2) и далее в аналогичных соотношениях предполагаем, конечно, что n стремится к бесконечности.

В статье [2] доказана следующая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00062, и фонда INTAS, грант № 99-01080.

ТЕОРЕМА А. Пусть существует положительная постоянная C такая, что

$$2^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|c_k - c_{k+1}|^2 + |c_{-k} - c_{-k-1}|^2) \leq Cn^2 \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (3)$$

Тогда условие (2) эквивалентно условию

$$(|c_n| + |c_{-n}|) \ln n = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)). \quad (4)$$

Из теоремы А как следствие (см. [2]) вытекает

ТЕОРЕМА В. Пусть существует положительная постоянная C такая, что

$$|c_n - c_{n+1}| + |c_{-n} - c_{-n-1}| \leq C \frac{\ln(n+1)}{n} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (5)$$

Тогда условия (2) и (4) эквивалентны.

Совершенно аналогично может быть доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторого натурального m существует положительная постоянная C такая, что

$$2^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|c_k - c_{k+m}|^2 + |c_{-k} - c_{-k-m}|^2) \leq Cn^2 \quad \text{при всех } n \geq 1.$$

Тогда условия (2) и (4) эквивалентны.

В частности, если для некоторого натурального m и положительной постоянной C выполнено условие

$$|c_n - c_{n+m}| + |c_{-n} - c_{-n-m}| \leq C \frac{\ln(n+1)}{n} \quad \text{при всех } n \geq 1,$$

то условия (2) и (4) эквивалентны.

Теоремы А и В являются частными случаями теоремы 1 при $m = 1$. Однако теорема 1 довольно легко может быть выведена из теоремы А стандартным разделением тригонометрического ряда (1) на m рядов и применением к каждому из них теоремы А.

В теоремах А, В и 1 тригонометрический ряд (1) не обязан являться рядом Фурье. Если же ряд (1) является рядом Фурье, то теорема В утверждает, что при условии (5) частные суммы ряда (1) сходятся (ограничены) в метрике L тогда и только тогда, когда выполнено условие (4). Последнее утверждение улучшает результат Г. А. Фомина [3], который получается из сформулированного, если в правой части (5) взять $O(1/n)$.

Цель этой статьи – доказать неулучшаемость условия (3) в теореме А и условия (5) в теореме В. Из неулучшаемости теорем А и В следует и неулучшаемость теоремы 1 в том же смысле.

Справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность положительных чисел $\{\varphi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что величина

$$m(\varphi; n) = \min_{k=n, \dots, 2n-1} \varphi(k)$$

удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2^n m(\varphi; 2^n) n^{-1} = \infty. \quad (6)$$

Тогда можно построить последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такую, что для тригонометрического ряда (1), где

$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2} \quad \text{при всех } n \geq 0, \quad (7)$$

будет выполнено условие

$$|c_n - c_{n+1}| + |c_{-n} - c_{-n-1}| \leq \varphi(n) \quad \text{при всех } n \geq 1 \quad (8)$$

и условие (4), однако

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n - S_n\| = +\infty. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть последовательность положительных чисел $\{\psi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \psi(n) n^{-2} = \infty. \quad (10)$$

Тогда можно построить последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ такую, что для тригонометрического ряда (1), определенного соотношением (7), будет выполнено условие

$$2^n \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (|c_k - c_{k+1}|^2 + |c_{-k} - c_{-k-1}|^2) \leq \psi(n) \quad \text{при всех } n \geq 1 \quad (11)$$

и условия (4) и (9).

Отметим, что, поскольку (см. [2, лемма 3]) условие (2) всегда эквивалентно условию

$$\|\tilde{\sigma}_n - \tilde{S}_n\| = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)), \quad (12)$$

в теоремах 2 и 3 вместо (7) можно взять соотношение

$$c_n = -c_{-n} = -i \frac{a_n}{2} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (13)$$

При этом теоремы 2 и 3 останутся справедливыми, просто (7) приводит к четному, а (13) к нечетному тригонометрическому ряду (1).

Отметим также, что (см. [2, лемма 3]) и в случае (7) и в случае (13) условие (2) эквивалентно условию (12) и эквивалентно условию

$$\max_{m=n, \dots, 2n} \left\| \sum_{k=n}^m a_k e^{ikx} \right\| = o(1) \quad (\text{соответственно } = O(1)).$$

В частности, условие (9) эквивалентно условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \max_{m=n, \dots, 2n} \left\| \sum_{k=n}^m a_k e^{ikx} \right\| = \infty. \quad (14)$$

Теорема 3 показывает, что в теореме А в правой части условия (3) вместо n^2 нельзя подставить никакую функцию $\psi(n)$, которая удовлетворяет условию (10). Теорема 2 утверждает, что не улучшаем порядок функции, стоящей в правой части условия (5) теоремы В. Доказательство теорем 2 и 3 и является целью этой статьи.

Прежде всего заметим, что теорема 3 легко вытекает из теоремы 2. Действительно, пусть выполнено условие (10). Положим

$$\varphi(n) = n^{-1} \sqrt{\psi(\lceil \log_2 n \rceil)} \quad \text{при всех } n \geq 2, \quad \varphi(1) = \varphi(2).$$

Тогда условие (6) выполнено. По теореме 2 построим ряд (1) с условиями (8), (4) и (9). Из условия (8) видим, что левая часть (11) не больше, чем $2^{2n} \varphi^2(2^n) \leq \psi(n)$. Значит, (11) выполнено и теорема 3 доказана, если доказана теорема 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ – последовательность Рудина–Шапиро, т.е. $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{2k} = \varepsilon_k$, $\varepsilon_{2k+1} = (-1)^k \varepsilon_k$ при $k \geq 0$. Пусть далее квадратные скобки обозначают целую часть числа. При любых натуральных n, m , где $n \geq 3m - 1$, положим

$$U(n, m; x) = \sum_{k=\lceil n/(2m-1) \rceil+1}^{\lceil 2n/(2m-1) \rceil-1} \varepsilon_k e^{ikx}, \quad (15)$$

$$T(n, m; x) = \frac{1}{\sqrt{nm}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} e^{ijx} \right)^2 U(n, m; (2m-1)x). \quad (16)$$

Тогда из (15) и (16) имеем

$$T(n, m; x) = \sum_{\nu=n+1}^{2n-1} d_\nu(n, m) e^{i\nu x}, \quad (17)$$

$$|T(n, m; x)| = \frac{1}{\sqrt{nm}} \left| \frac{\sin(mx/2)}{\sin(x/2)} \right|^2 |U(n, m; (2m-1)x)|. \quad (18)$$

Далее через $C_1, C_2, \dots$ обозначается абсолютная положительная постоянная, в каждом случае своя. По известному свойству полиномов Рудина–Шапиро (см. [4], [5], [6, гл. 4, теорема 1]) верна оценка

$$C_1 \sqrt{n} \leq \sqrt{m} \|U(n, m)\| \leq C_2 \sqrt{n} \quad \text{при всех } n \geq 3m - 1. \quad (19)$$

Из (18) и (19), полагая $I(j) = [\pi(2j-1)/(2m-1), \pi(2j+1)/(2m-1)]$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{nm} \|T(n, m)\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{x \in I(0)} m^2 |U(n, m; (2m-1)x| dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \in I(j)} \frac{(2m-1)^2}{(2j-1)^2} |U(n, m; (2m-1)x| dx \\ &= \frac{m^2}{(2m-1)} \|U(n, m)\| + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(2m-1)}{(2j-1)^2} \|U(n, m)\| \leq C_3 \sqrt{nm}. \end{aligned}$$

Следовательно, всегда $\|T(n, m)\| \leq C_3$. С другой стороны, при $n \geq 3m - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{nm} \|T(n, m)\| &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{x \in I(0)} \frac{(2m)^2}{\pi^2} |U(n, m; (2m-1)x)| dx \\ &= \frac{(2m)^2}{\pi^2(2m-1)} \|U(n, m)\| \geq C_4 \sqrt{nm}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$C_4 \leq \|T(n, m)\| \leq C_3 \quad \text{при всех } n \geq 3m - 1. \quad (20)$$

Поскольку

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1} e^{ijx} \right)^2 = \sum_{s=0}^{m-1} (s+1) e^{isx} + \sum_{s=m}^{2m-2} (2m-1-s) e^{isx},$$

то из (16) и (17) выводим, что

$$d_{k(2m-1)+s}(n, m) = \frac{\varepsilon_k \min(s+1, 2m-1-s)}{\sqrt{nm}}$$

при $s = 0, \dots, 2m-2$, $k = [n/(2m-1)] + 1, \dots, [2n/(2m-1)] - 1$ и

$$d_\nu(n, m) = 0$$

при $\nu < (2m-1)([n/(2m-1)] + 1)$ и $\nu > (2m-1)([2n/(2m-1)] - 1) + 2m - 2$. Поэтому

$$\max_\nu |d_\nu(n, m)| = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} \quad \text{при всех } n \geq 3m - 1, \quad (21)$$

$$\max_\nu |d_\nu(n, m) - d_{\nu+1}(n, m)| \leq \frac{2}{\sqrt{nm}}. \quad (22)$$

Возьмем теперь любую стремящуюся к бесконечности последовательность положительных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, например $\gamma_k = k$. Построим строго возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ так, что при всех натуральных k выполнены следующие условия: n_k — степень двойки, $\log_2 n_k \geq 2\gamma_k^{-2}$, $\sqrt{n_k} \geq \gamma_k^2 \log_2 n_k$, $n_k m(\varphi; n_k) \geq 4\gamma_k^3 \log_2 n_k$. Такое построение возможно в силу условия (6). Пусть

$$m_k = [n_k(\gamma_k^2 \log_2 n_k)^{-2}] \quad \text{при } k \geq 1.$$

Тогда натуральные m_k удовлетворяют условию: $n_k \geq 3m_k$ при всех $k \geq 1$. Последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ определим из формального равенства

$$\sum_{k=1}^\infty \gamma_k T(n_k, m_k; x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n e^{inx}.$$

Тогда в силу (20)

$$\left\| \sum_{n=n_k}^{2n_k-1} a_n e^{inx} \right\| = \|\gamma_k T(n_k, m_k)\| \geq C_4 \gamma_k \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и условие (14), а значит и (9), выполнено. Из (17) и (21) при $n \in [n_k, n_{k+1})$ имеем $|a_n| \log_2 n = 0$, если $n \geq 2n_k$, и $|a_n| \log_2 n \leq \gamma_k \sqrt{m_k/n_k} \log_2(2n_k) \leq \gamma_k^{-1}(1 + 1/\log_2 n_k)$ при $n < 2n_k$. Поэтому $a_n \ln n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и условие (4) выполнено. Наконец, при $n \in [n_k, n_{k+1})$ в силу (22) и (17) верна оценка

$$|a_n - a_{n+1}| \leq 2\gamma_k(n_k m_k)^{-1/2} \leq \frac{2\sqrt{2}\gamma_k^3 \log_2 n_k}{n_k} \leq m(\varphi; n_k) \leq \varphi(n),$$

если $n < 2n_k$, и $|a_n - a_{n+1}| = 0$, если $n \geq 2n_k$. Следовательно, условие (8) также выполнено. Теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Белов А. С. // Изв. Тульского гос. ун-та. Сер. Матем. Мех. Информатика. 1998. Т. 4. № 1. С. 40–46.
- [3] Фомин Г. А. Über die Konvergenz im Mittel von Fourierreihen // Матем. сб. 1979. Т. 110. № 2. С. 251–265.
- [4] Rudin W. Some theorems on Fourier coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10. № 4. P. 855–859.
- [5] Brillhart J., Carlitz L. Note on the Shapiro polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 25. № 1. P. 114–118.
- [6] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

Ивановский государственный университет
E-mail: asbel@ivanovo.ac.ru

Поступило
10.07.2000