Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Теорема Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой и ее приложения в выпуклом анализе, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 329–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:17:46

УДК 517.982

ТЕОРЕМА БАНАХА–МАЗУРА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ С НЕСИММЕТРИЧНОЙ НОРМОЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ВЫПУКЛОМ АНАЛИЗЕ

П. А. Бородин

Устанавливается аналог теоремы Банаха–Мазура для вещественных сепарабельных линейных пространств с несимметричной нормой: всякое такое пространство может быть линейно изометрично вложено в пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций f с несимметричной нормой $\|f\|$. С помощью этого утверждения получены нетривиальные представления для произвольного выпуклого замкнутого тела $M \subset \mathbb{R}^n$, произвольного компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $F: K \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывной на K .

Библиография: 9 названий.

Известная теорема С. Банаха и С. Мазура [1, гл. XI, § 8] утверждает, что любое вещественное сепарабельное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ можно линейно изометрично вложить в пространство $C[0, 1]$ вещественнозначных функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$, т.е. существует такой линейный оператор $A: X \rightarrow C[0, 1]$, что $\|Ax\| := \max\{|(Ax)(t)|: t \in [0, 1]\} = \|x\|$ для каждого $x \in X$. В этом смысле пространство $C[0, 1]$ является универсальным для класса вещественных сепарабельных линейных нормированных пространств.

Основная цель настоящей работы – найти пространство, универсальное для более широкого класса вещественных сепарабельных линейных пространств X с так называемой несимметричной нормой.

Функция $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ называется *несимметричной нормой*, если она удовлетворяет всем аксиомам обычной нормы, за исключением того, что равенство $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ выполняется только при $\lambda \geq 0$ (см. [2, гл. 9, § 3]; там же введены название “несимметричная норма” и обозначение $\|\cdot\|$).

Примером пространства с несимметричной нормой является пространство

$$C([0, 1], p_+, p_-) := \left\{ f \in C[0, 1]; \|f\|_p = \max_{t \in [0, 1]} [f_+(t)p_+(t) + f_-(t)p_-(t)] \right\},$$

где $f_+(t) = \max\{f(t), 0\}$, $f_-(t) = f(t) - f_+(t)$, $p = (p_+(t), p_-(t))$ – пара фиксированных функций, неотрицательных и полунепрерывных сверху на отрезке $[0, 1]$. Эти пространства при непрерывных и не обращающихся в нуль функциях $p_{\pm}(t)$ были введены в [2],

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00119.

а в общем случае рассматриваются в [3], где изложена общая теория приближений в $C([0, 1], p_+, p_-)$. В последней работе пара $p = (p_+(t), p_-(t))$ называется *знакочувствительным весом*. Отметим, что норма $\|\cdot\|_p$ является несимметричной нормой в строгом смысле (т.е. $\|f\|_p = 0 \iff f(t) \equiv 0$) лишь тогда, когда каждая из компонент веса $p_+(t)$, $p_-(t)$ не обращается в нуль ни на каком интервале в $[0, 1]$.

Другие примеры пространств с несимметричной нормой см. в диссертациях [4]–[6].

Шары $B(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$ составляют по определению базу топологии в пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Заметим, что пространство X с такой топологией не является, вообще говоря, линейным топологическим пространством: в X может нарушаться аксиома непрерывности умножения на скаляр (если $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то для любой окрестности $U(\lambda x)$ точки λx найдется такая окрестность $U(x)$ точки x и такая окрестность $U(\lambda) \subset \mathbb{R}$ числа λ , что $\lambda' x' \in U(\lambda x)$ для любых $x' \in U(x)$, $\lambda' \in U(\lambda)$). Например, в пространстве

$$C_0([0, 1], 1, 0) = \left\{ f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(t) dt = 0; \quad \|f\| = \max_t f(t) \right\}$$

эта непрерывность нарушается для $x = 0$, $\lambda = -1$: $(-1) \cdot 0 = 0$, но $-B(0, r) \not\subset B(0, 1)$ ни для какого радиуса $r > 0$.

В каждом пространстве с несимметричной нормой $\|\cdot\|$ можно ввести согласованную с ней симметричную норму $\|x\| := \max\{\|x\|, \|-x\|\}$ (аксиомы нормы проверяются). Очевидно, $\|x\| \leq \|x\|$. Если выполнено обратное неравенство $\|x\| \leq c\|x\|$ с некоторой абсолютной константой $c > 0$, то нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны, порождают одну и ту же топологию и тогда $(X, \|\cdot\|)$ является линейным топологическим пространством.

Пространство $(X, \|\cdot\|)$ будем называть *сепарабельным*, если оно сепарабельно в своей симметричной норме $\|\cdot\|$, т.е. если существует такое счетное множество $\{a_n\} \subset X$, что для любого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется $a_k \in \{a_n\}$ с $\|x - a_k\| := \max\{\|x - a_k\|, \|-a_k - x\|\} < \varepsilon$. Более слабым свойством является *сепарабельность в несимметричной норме*, когда для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется $a_k \in \{a_n\}$ с $\|x - a_k\| < \varepsilon$ (при этом и для элемента $-x$ найдется такой элемент $a_l \in \{a_n\}$, что $\|(-x) - a_l\| = \|(-a_l) - x\| < \varepsilon$, так что множество $\{a_n\} \cup \{-a_n\}$ плотно в X уже “с обеих сторон”).

Приведем пример пространства, сепарабельного в своей несимметричной норме, но не сепарабельного в согласованной с ней симметричной норме. Возьмем пространство

$$l_\infty^0 := \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_\infty : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \right\}$$

и положим $\|x\| = \sup_k x_k$. Как нетрудно видеть, $\|x\| \neq 0$ при $x \neq 0$, так что $(l_\infty^0, \|\cdot\|)$ – пространство с несимметричной нормой. Согласованная с ней симметричная норма $\|x\| = \sup_k |x_k|$ – обычная норма в пространстве l_∞ . Поскольку l_∞^0 – подпространство коразмерности 1 в l_∞ , оно не является сепарабельным в норме $\|\cdot\|$. В то же время счетное множество

$$A = \{x \in l_\infty^0 : x_k \in \mathbb{Q}, \quad k = 1, 2, \dots, \text{ и } \exists n = n(x) : x_n = x_{n+1} = \dots\}$$

плотно в l_∞^0 по отношению к несимметричной норме $\|\cdot\|$. Действительно, для любых $x \in l_\infty^0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое n , что

$$\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2^j} - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{2^j} > \|x\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \quad (1)$$

(при $n \rightarrow \infty$ левая часть стремится к ε , а правая — к 0). Беря произвольные числа $a_k \in (x_k - 2\varepsilon, x_k - \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$, $k = 1, \dots, n$, положим

$$a_k = \alpha = - \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{2^j} \bigg/ \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$

при $k > n$ (как нетрудно видеть, $\alpha \in \mathbb{Q}$). Тогда вектор $a = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in A$ и $\varepsilon < x_k - a_k < 2\varepsilon$ при $k = 1, \dots, n$, а при $k > n$

$$a_k = \alpha > \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon - x_j}{2^j} \bigg/ \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} > \|x\|$$

в силу неравенства (1). Отсюда

$$\|x - a\| = \max_k (x_k - a_k) = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - a_k) < 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — произвольное пространство с несимметричной нормой. Линейный функционал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если $\|f\| := \sup_{x \neq 0} (f(x)/\|x\|) < \infty$ [2, гл. 9, § 5]. При этом если $f \neq 0$, то найдется такой элемент $x \in X$, $x \neq 0$, что $f(x) \neq 0$, т.е. либо $f(x) > 0$, либо $f(-x) > 0$, так что $\|f\| > 0$. Ограниченные линейные функционалы $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ образуют сопряженное пространство X^* с несимметричной нормой $\|f\|$. Отметим, что X^* является, вообще говоря, не линейным пространством, а конусом: если $f, g \in X^*$, то $f + g \in X^*$ и $\lambda \cdot f \in X^*$ при $\lambda \geq 0$, но функционал $-f$ может не быть ограниченным. Например, в уже упоминавшемся пространстве $C_0([0, 1], 1, 0)$ функционал $f: x \rightarrow x(1)$ ограничен, а $(-f)$ — нет: для $x(t) = 1 - nt^{n-1}$ имеем

$$\frac{(-f)(x)}{\|x\|} = \frac{n-1}{1} \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для любых $f \in X^*$, $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq \|f\| \cdot \|x\|$. Неравенство $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, вообще говоря, неверно, но зато справедливо более слабое неравенство $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, где $\|\cdot\|$ — симметричная норма, согласованная с нормой $\|\cdot\|$. Поэтому каждый ограниченный функционал f всегда является отображением, непрерывным в топологии нормы $\|\cdot\|$, а непрерывным в топологии нормы $\|\cdot\|$ он является лишь тогда, когда функционал $(-f)$ также ограничен.

Для пространств с несимметричной нормой справедлива теорема Хана–Банаха [2, гл. IX, § 5]: *всякий линейный функционал, заданный и ограниченный на линейном подпространстве $L \subset X$, можно линейно продолжить на все пространство X с сохранением нормы*. Это утверждение вытекает из общей теоремы Хана–Банаха о продолжении с сохранением нормы относительно произвольного выпуклого положительно однородного функционала (см. [1, гл. II, § 2]), роль которого в нашем случае играет норма $\|\cdot\|$.

Теперь можно сформулировать и доказать аналог теоремы Банаха–Мазура для пространств с несимметричной нормой (этот результат был анонсирован в [7]).

ТЕОРЕМА 1. *Всякое вещественное сепарабельное пространство X с несимметричной нормой $\|\cdot\|$ изометрически изоморфно подпространству пространства $C([0, 1], 1, 0)$ (т.е. существует такое линейное отображение $\varphi: X \rightarrow C[0, 1]$, $x \rightarrow \varphi_x$, что $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} \varphi_x(t)$ для любого $x \in X$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует доказательству теоремы Банаха–Мазура (см. [1, гл. XI, § 8] или [8, гл. IV, § 6], и мы лишь напомним его основные моменты.

1. Доказывается, что единичный шар $B^* = \{f \in X^*: \|f\| \leq 1\}$ сопряженного пространства компактен в $*$ -слабой топологии (как обычно, $*$ -слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f$ функционалов означает, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для каждого $x \in X$). Вначале на X^* вводится метрика Фреше

$$\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|(f - g)(a_k)|}{1 + |(f - g)(a_k)|},$$

где $\{a_k\}$ – счетное множество, всюду плотное в X относительно согласованной нормы $\|\cdot\|$. Далее доказывается эквиваленция $f_n \rightharpoonup f \Leftrightarrow \rho(f_n, f) \rightarrow 0$. Таким образом, $*$ -слабая топология на X^* оказывается метризуемой, и для доказательства компактности шара B^* остается только проверить его секвенциальную компактность, что и делается с помощью обычного диагонального процесса.

2. Строится непрерывное сюръективное отображение $F: P_0 \rightarrow B^*$ канторова множества $P_0 \subset [0, 1]$ на метрический компакт B^* (см. [8, лемма в § 6 главы IV]). Через F_t обозначим образ точки t при отображении F .

3. Для элемента $x \in X$ положим $\varphi_x(t) = F_t(x)$ ($t \in P_0$). Функция $\varphi_x: P_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на множестве P_0 , так как $F_t \rightarrow F_\tau$ при $t \rightarrow \tau$ ($t, \tau \in P_0$) в силу непрерывности отображения $F: P_0 \rightarrow B^*$. Продолжая эту функцию линейно и непрерывно на каждый интервал, смежный с P_0 , получим функцию $\varphi_x \in C[0, 1]$. Очевидно, отображение $x \rightarrow \varphi_x$ линейно.

4. Осталось доказать, что $\|\varphi_x\|_{(1,0)} := \max_{t \in [0, 1]} \varphi_x(t) = \|x\|$ для каждого $x \in X$. Для $x = 0$ это очевидно. Пусть $x \neq 0$. Имеем

$$\max_{t \in [0, 1]} \varphi_x(t) = \max_{t \in P_0} \varphi_x(t) = \max_{t \in P_0} F_t(x) \leq \max_{t \in P_0} \|F_t\| \|x\| = \|x\|.$$

С другой стороны, существует функционал $g \in B^*$ с $g(x) = \|x\|$ (на одномерном подпространстве $\langle x \rangle$, порожденном вектором x , определяем g равенством $g(\lambda x) = \lambda \cdot \|x\|$ и продолжаем его на все X по теореме Хана–Банаха). В силу сюръективности отображения F найдется точка $\tau \in P_0$, для которой $F_\tau = g$. Отсюда $\varphi_x(\tau) = F_\tau(x) = g(x) = \|x\|$, а значит, $\max_{t \in [0, 1]} \varphi_x(t) = \|x\|$.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любое изометрическое вложение $\varphi: (X, \|\cdot\|) \rightarrow C([0, 1], 1, 0)$ осуществляет и изометрическое вложение пространства $(X, \|\cdot\|)$ с согласованной симметричной нормой в обычное пространство $C[0, 1]$ с равномерной нормой

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\| &= \max_t |\varphi_x(t)| = \max_t \max\{\varphi_x(t), -\varphi_x(t)\} \\ &= \max\{\|\varphi_x\|, \|-\varphi_x\|\} = \max\{\|x\|, \|-x\|\} = \|x\|. \end{aligned}$$

Поэтому в теореме 1 существенно условие сепарабельности пространства X именно в симметричной норме $\|\cdot\|$. Не обладающее такой сепарабельностью пространство просто не может быть изометрично вложено в $C([0, 1], 1, 0)$.

Теорема 1 находит непосредственное применение в конечномерном выпуклом анализе.

Пусть M – произвольное замкнутое выпуклое тело в вещественном n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, содержащее внутри себя начало координат O . Это множество определяет в $\mathbb{R}^n$ несимметричную норму (“масштабную функцию” Г. Минковского – см. [2, гл. I, § 2]):

$$\|x\|_M := \inf\{\alpha > 0: \alpha^{-1}x \in M\}.$$

По теореме 1 пространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_M)$ изометрически изоморфно некоторому n -мерному подпространству пространства $C([0, 1], 1, 0)$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого выпуклого замкнутого тела $M \subset \mathbb{R}^n$, содержащего внутри себя начало координат O , найдутся такие линейно независимые функции $f_1, \dots, f_n \in C[0, 1]$, что*

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \max_t [x_1 f_1(t) + \dots + x_n f_n(t)] \leq 1 \right\}. \quad (2)$$

Обратно, любое множество вида (2) выпукло, замкнуто и содержит внутри себя точку O (вообще говоря, оно может не быть ограниченным).

Про множество M вида (2) будем говорить, что оно порождается набором $(f_1, \dots, f_n)$ непрерывных функций. Оказывается возможным установить достаточно простой критерий порождаемости данного множества M данным набором функций.

Ниже $\bar{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, $t \in [0, 1]$; $\text{conv } A$ обозначает выпуклую оболочку множества $A \subset \mathbb{R}^n$, а $A^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in A} (x, y) \leq 1\}$ – полярное множество (полюсу) множества A относительно начала координат O (здесь $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$; о поляре см. [9, определение 6.4]).

ТЕОРЕМА 3. *Выпуклое замкнутое тело $M \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда порождается набором $(f_1, \dots, f_n)$ в смысле (2), когда*

$$M^0 = \text{conv}\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть множество M порождается набором $(f_1, \dots, f_n)$. Тогда $(x, \bar{f}(t)) \leq 1$ для всех $x \in M$ и $t \in [0, 1]$. Следовательно, кривая $\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\}$ вместе со своей выпуклой оболочкой лежит в M^0 (полюса всегда выпукла). С другой стороны, для любой точки $y \notin \text{conv}\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\}$ найдется отделяющий вектор z :

$$(z, y) > 1, \quad \max_{t \in [0, 1]} (z, \bar{f}(t)) < 1$$

(эти неравенства можно сделать строгими в силу замкнутости множества $\text{conv}\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\}$). Согласно (2) из второго неравенства следует, что $z \in M$, но тогда из первого неравенства $(z, y) > 1$ получаем $y \notin M^0$. Равенство (3) установлено.

Достаточность. Из равенства (3) вытекает, что для любого $t \in [0, 1]$ имеет место неравенство $\sup_{x \in M} (x, \bar{f}(t)) \leq 1$. Отсюда для любого $x \in M$ имеем $\max_t (x, \bar{f}(t)) \leq 1$,

так что M входит во множество, порождаемое набором $(f_1, \dots, f_n)$. С другой стороны, если для какого-то вектора $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\max_t(x, \bar{f}(t)) \leq 1$, то $(x, y) \leq 1$ для любого $y \in \operatorname{conv}\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\} = M^0$, откуда по определению $x \in (M^0)^0 = M$ (последнее равенство см., например, в [9, теорема 6.4]). Таким образом, в случае выполнения равенства (3) множество M действительно порождается набором $(f_1, \dots, f_n)$.

Теорема 3 доказана.

Как показывает теорема 3, одно и то же выпуклое тело $M \subset \mathbb{R}^n$ может порождаться разными наборами непрерывных функций. В силу теоремы Крейна–Мильмана [9, теорема 4.2] для выполнения равенства (3) необходимо и достаточно, чтобы кривая $\{\bar{f}(t) : t \in [0, 1]\}$ целиком лежала внутри поляр M^0 и проходила через все ее крайние точки. Кривую такого типа легко предъявить, например, когда M – выпуклый многогранник: в этом случае M^0 – двойственный многогранник, и любая ломаная $\bar{f}(t)$, проходящая внутри многогранника M^0 и “обходящая” все его вершины, будет порождать M в смысле (2). Обратно, любая конечнозвенная ломаная $\bar{f}(t)$, выпуклая оболочка которой содержит внутри себя точку O , порождает некоторый выпуклый многогранник. В случае же гладкой границы ∂M все точки на поверхности ∂M^0 будут крайними, и тогда при $n \geq 3$ задать порождающую кривую $\bar{f}(t)$ в явном виде довольно трудно – она должна быть типа кривой Пеано, обходящей всю поверхность ∂M^0 поляр.

Идея следующего построения принадлежит И. Г. Царькову, и мы используем эту идею с его любезного разрешения. Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ – стереографическая проекция пространства $\mathbb{R}^n$ на единичную n -мерную сферу

$$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} : \varphi(x) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n+1}(x_1, \dots, x_n)), \quad \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k^2(x) \equiv 1.$$

Внутри сферы S^n можно найти такое не более чем $(n+1)$ -точечное множество $A = A(K)$, что выпуклая оболочка $M = \operatorname{conv}(\varphi(K) \cup A)$ содержит внутри себя начало координат пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. В силу компактности объединения $\varphi(K) \cup A$ выпуклое тело M замкнуто, откуда по теореме 2

$$M = \left\{ (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \max_t \left[\sum_{k=1}^{n+1} y_k f_k(t) \right] \leq 1 \right\},$$

где $(f_1, \dots, f_{n+1})$ – некоторый набор функций из $C[0, 1]$. Точки $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \varphi(K)$ составляют пересечение границы множества M со сферой S^n , поэтому для них, и только для них, выполнена система равенств

$$\begin{cases} \max_t \left[\sum_{k=1}^{n+1} y_k f_k(t) \right] = 1, \\ y_k = \varphi_k(x) \text{ для некоторого } x = x(y) \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдутся такие функции $f_1, \dots, f_{n+1} \in C[0, 1]$, что

$$K = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \max_t \left[\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(x) f_k(t) \right] = 1 \right\},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – стереографическая проекция.

Пусть теперь $F : K \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция, определенная и непрерывная на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$; $\Gamma_F := \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in K, \lambda = F(x)\}$ – график функции F . Отображение $\Phi : (x, \lambda) \rightarrow (\varphi(x), \lambda)$, где φ – как в теореме 4, переводит Γ_F в замкнутое подмножество $\Phi(\Gamma_F)$ цилиндра $S^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$. Внутри этого цилиндра можно найти такое не более чем $(n+2)$ -точечное множество $A = A(F)$, что выпуклая оболочка $M = \text{conv}(\Phi(\Gamma_F) \cup A)$ содержит внутри себя начало координат пространства $\mathbb{R}^{n+2}$. В силу компактности объединения $\Phi(\Gamma_F) \cup A$ выпуклое тело M замкнуто, и, опять применяя теорему 2, имеем

$$M = \left\{ (y_1, \dots, y_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : \max_t \left[\sum_{k=1}^{n+2} y_k f_k(t) \right] \leq 1 \right\},$$

где $(f_1, \dots, f_{n+2})$ – некоторый набор функций из $C[0, 1]$. Точки $y = (y_1, \dots, y_{n+2}) \in \Phi(\Gamma_F)$ составляют пересечение границы множества M с цилиндром $S^n \times \mathbb{R}$, поэтому для них, и только для них, выполнена система равенств

$$\begin{cases} \max_t \left[\sum_{k=1}^{n+2} y_k f_k(t) \right] = 1, \\ y_k = \varphi_k(x) \text{ для некоторого } x = x(y) \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

Таким образом, для каждого $x \in K$ имеем

$$\max_t \left[\sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(x) f_k(t) + F(x) f_{n+2}(t) \right] = \max_t [\Sigma(x, t) + F(x) f_{n+2}(t)] = 1. \quad (4)$$

При этом для любого числа $\lambda \neq F(x)$ выполняется неравенство

$$\max_t [\Sigma(x, t) + \lambda f_{n+2}(t)] > 1,$$

поскольку точка $(\Phi(x), \lambda) \notin M$. Это наблюдение позволяет разрешить уравнение (4) относительно $F(x)$. В самом деле, при каждом $x \in K$ число $\lambda = F(x)$ является единственным решением совокупности неравенств

$$\Sigma(x, t) + \lambda f_{n+2}(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1],$$

каждое из которых решается так:

$$\begin{cases} \lambda \leq \frac{1 - \Sigma(x, t)}{f_{n+2}(t)}, & \text{если } f_{n+2}(t) > 0, \\ \lambda \geq \frac{1 - \Sigma(x, t)}{f_{n+2}(t)}, & \text{если } f_{n+2}(t) < 0, \\ \lambda \in \mathbb{R}, & \text{если } f_{n+2}(t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

(в случае $f_{n+2}(t) = 0$ обязательно должно быть $\Sigma(x, t) \leq 1$, иначе равенство (4) невозможно). Так как $\lambda = F(x)$ – единственное значение λ , удовлетворяющее системе (5) при всех $t \in [0, 1]$, то

$$F(x) = \inf_t \left\{ \frac{1 - \Sigma(x, t)}{f_{n+2}(t)} : f_{n+2}(t) > 0 \right\} = \sup_t \left\{ \frac{1 - \Sigma(x, t)}{f_{n+2}(t)} : f_{n+2}(t) < 0 \right\}.$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и любой вещественнозначной функции $F \in C(K)$ найдется такое открытое множество $G = G(K, F) \subset [0, 1]$ и такие непрерывные на G функции $g_0(t), g_1(t), \dots, g_{n+1}(t)$ (эти функции могут быть, вообще говоря, неограниченными на G), что*

$$F(x) = \inf_{t \in G} \left\{ g_0(t) + \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(x) g_k(t) \right\},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – стереографическая проекция. При этом $g_0(t) > 0$ на множестве G .

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 5 открытое множество $G = G(K, F)$ нельзя заменить всем отрезком $[0, 1]$. Дело в том, что функция

$$F(x) = \min_{t \in [0, 1]} \left\{ g_0(t) + \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(x) g_k(t) \right\}, \quad (6)$$

где $g_k \in C[0, 1]$ ($k = 0, \dots, n+1$), в случае выпуклого компакта K обладает некоторой выпуклостью. Если, например, векторы $x, y \in K$ коллинеарны, то

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \lambda \cdot (\theta \varphi(x) + (1-\theta) \varphi(y)),$$

где $\lambda = \lambda(x, y) > 1$, $\theta = \theta(x, y) \in (0, 1)$. Тогда для функции F имеем

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \min_t \left\{ g_0(t) + \sum \varphi_k\left(\frac{x+y}{2}\right) g_k(t) \right\} \\ &= \min_t \left\{ g_0(t) + \sum \lambda(\theta \varphi_k(x) + (1-\theta) \varphi_k(y)) g_k(t) \right\} \\ &= \min_t \left\{ (1-\lambda) g_0(t) + \lambda \left[\theta \left(g_0(t) + \sum \varphi_k(x) g_k(t) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\theta) \left(g_0(t) + \sum \varphi_k(y) g_k(t) \right) \right] \right\} \\ &\geq \min_t \{ (1-\lambda) g_0(t) \} + \lambda(\theta F(x) + (1-\theta) F(y)) \\ &= (1-\lambda) \max_t g_0(t) + \lambda(\theta F(x) + (1-\theta) F(y)), \end{aligned}$$

т.е.

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq (1-\lambda) \max_t g_0(t) + \lambda(\theta F(x) + (1-\theta)F(y)). \quad (7)$$

Поскольку при сближении точек x и y параметр $\lambda = \lambda(x, y)$ стремится к 1, ясно, что не всякая непрерывная на K функция F удовлетворяет неравенству (7). Однако, как показывает более детальный анализ конструкции, предшествовавшей теореме 5, любая достаточно гладкая функция F , заданная на выпуклом компакте K , уже может быть представлена в виде (6).

Автор глубоко благодарен А.Р. Алимову и И.Г. Царькову за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ, 1948.
- [2] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [3] Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 6. С. 59–102; 1999. Т. 63. № 3. С. 77–118.
- [4] Алимов А. Р. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах с несимметричной сферой. Дисс. . . к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1997.
- [5] Рамазанов А.-Р. К. Полиномиальная и рациональная аппроксимации относительно знакочувствительных весов и Φ -метрик Орлича. Дисс. . . д. ф.-м. н. Махачкала, 1998.
- [6] Козко А. И. Экстремальные задачи в пространствах с несимметричной нормой.. Дисс. . . к. ф.-м. н. М.: МГУ, 1998.
- [7] Долженко Е. П. Обзор результатов по теории знакочувствительных аппроксимаций // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Всероссийской школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова. Казань: Каз. матем. общ-во, 1999. С. 83–86.
- [8] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Наука, 1982.
- [9] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
24.01.2000