Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О свойствах плезиоравномерных под-
групп в группах Ли, *Матем. заметки*, 2001, том 69, вы-
пуск 3, 338–345

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:54:03

УДК 519.4

О СВОЙСТВАХ ПЛЕЗИОРАВНОМЕРНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ ЛИ

В. В. Горбачевич

Работа посвящена изучению свойств одного класса подгрупп H в группах Ли G , который был ранее введен автором. Замкнутая подгруппа H в группе Ли G называется плезиоравномерной, если существует некоторая замкнутая подгруппа P в G , содержащая H и такая, что P равномерна в G , а H квазиравномерна в P . В статье даются ответы на несколько естественных вопросов о плезиоравномерных подгруппах. Доказано, что если в определении плезиоравномерности поменять местами равномерность и квазиравномерность подгрупп, получается то же понятие плезиоравномерности. Если замкнутая подгруппа H в G содержит плезиоравномерную подгруппу, то H сама будет плезиоравномерна. Рассмотрены и другие свойства плезиоравномерных подгрупп.

Библиография: 11 названий.

Эта работа посвящена изучению свойств одного класса подгрупп H в группах Ли G , который был введен автором в работе [1]. (Здесь и во всей работе под подгруппой группы Ли мы понимаем подгруппу Ли.) Эти подгруппы H изучались там в связи с соответствующими однородными пространствами G/H , которые получили название плезиокомпактных однородных пространств. Оказалось, что на плезиокомпактные однородные пространства распространяются многие результаты, которые ранее были получены (в том числе и автором, см., например, обзор [2]) для компактных однородных пространств (см. [1], [3], [4]). В данной же работе мы посмотрим на ситуацию несколько с другой стороны и будем изучать не столько однородные пространства, сколько сами подгруппы (хотя, конечно, оба эти подхода эквивалентны).

Подгруппа Ли H в группе Ли G называется *равномерной*, если она замкнута в G и однородное пространство G/H компактно. Еще один важный класс подгрупп в G – это те, для которых однородное пространство G/H имеет конечную инвариантную меру (конечность меры означает, что объем пространства G/H относительно указанной инвариантной меры конечен). Такие подгруппы H называют *квазиравномерными*, а соответствующие однородные пространства G/H – *квазикомпактными*. Далеко не всякое компактное однородное пространство будет квазикомпактно, ибо на нем может просто не оказаться инвариантной меры. Однако любое компактное однородное пространство компактной или разрешимой группы Ли будет, как хорошо известно, квазикомпактно (для однородных пространств разрешимых групп Ли это утверждение нетривиально и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00329.

было доказано [5]). Понятие плезиоравномерной подгруппы можно рассматривать как обобщение для обоих понятий – как равномерных, так и квазиравномерных подгрупп.

Замкнутая подгруппа H в группе Ли G (такая H автоматически является подгруппой Лив G) называется *плезиоравномерной*, если существует некоторая замкнутая подгруппа $P = P_H$ в G , содержащая H и такая, что P равномерна в G , а H квазиравномерна в P . Ясно, что понятия равномерности и квазиравномерности – частные случаи понятия плезиоравномерности. Есть еще несколько эквивалентных определений плезиоравномерной подгруппы (см. [1]). Нетрудно привести примеры плезиоравномерных подгрупп, которые не являются ни равномерными, ни квазиравномерными. Например, пусть G_1 и G_2 – две группы Ли, а H_1 и H_2 – две замкнутые подгруппы в них, причем H_1 равномерна в G_1 , но G_1/H_1 не имеет конечной инвариантной меры (например, таковы пространства G/B , где B – борелевская подгруппа в комплексной полупростой группе Ли G) и H_2 квазиравномерна в G_2 , но не равномерна в ней (например, $SL_2(\mathbb{Z})$ в $SL_2(\mathbb{R})$). Тогда, очевидно, подгруппа $H_1 \times H_2$ – плезиоравномерная подгруппа в $G_1 \times G_2$ (см. предложение 1 ниже). Однако эта подгруппа не будет, как легко понять, ни равномерной, ни квазиравномерной. Другими словами, плезиоравномерные подгруппы как новый объект появляются уже при столь естественной операции, как прямое произведение равномерных и квазиравномерных подгрупп.

В связи с понятием плезиоравномерности возникает немало естественных вопросов. Например, что произойдет, если в определении плезиоравномерности поменять местами равномерность и квазиравномерность подгрупп (т.е. предполагать, что подгруппа P из этого определения квазиравномерна в G , а H равномерна в P)? Не получится ли при этом новый класс подгрупп и соответствующих однородных пространств? Оказывается, что не получится (см. лемму ниже). Еще вопрос (навеянный случаями компактных и квазикompактных однородных пространств, где ответ на него положителен): если замкнутая подгруппа в G содержит плезиоравномерную подгруппу H , то будет ли она сама плезиоравномерна? Есть немало других естественных вопросов, ответам на некоторые из них и посвящена данная статья. Основные результаты доказаны в теоремах 1 и 2.

Некоторые результаты этой статьи были анонсированы еще десять лет назад в [6], но только недавно удалось выделить все основные свойства плезиоравномерных подгрупп и оформить их в виде законченной статьи.

Одним из важных технических приемов при доказательстве результатов данной статьи является использование понятия оператора алгебраического замыкания на произвольной почти связной группе Ли. Поэтому начнем с изложения определения этого оператора и перечисления некоторых его основных свойств. Более подробное изложение можно найти, например, в [7], [8].

Вначале рассмотрим наиболее важный для нас частный случай односвязных групп Ли. Для произвольной связной и односвязной группы Ли G в [7] построено (следуя идеям А. И. Мальцева, Л. Ауслендера и Г. Хохшильда–Дж. Мостова) *алгебраическое расщепление*. Так называется вложение G в некоторую односвязную группу Ли $A(G)$ такую, что ее факторгруппа $A_l = A(G)/L(S)$ по линеаризатору $L(S)$ полупростой части (т.е. фактора Леви) S группы Ли G изоморфна связной компоненте единицы некоторой линейной алгебраической группы Ли, определенной над $\mathbb{R}$, точнее, ее группы вещественных точек. Напомним, что *линеаризатором* $L(F)$ связной группы Ли F называется наименьший нормальный делитель, факторгруппа по которому линейна (т.е. имеет точное линейное представление). Если группа Ли F полупроста, то ее линеаризатор

дискретен (и содержится в центре этой группы Ли, имея в нем конечный индекс). Для односвязной группы Ли ее линейаризатор совпадает с линейаризатором ее полупростой части (подробнее см., например, [8]).

Следует отметить, что при построении алгебраического расщепления вместо связных групп Ли G можно рассматривать и почти связные, т.е. имеющие только конечное число связных компонент. Для них можно повторить все этапы конструкции, приведенные в [7], и тоже получить конструкцию алгебраического расщепления. Далее, в [7] определен оператор δ алгебраического замыкания, действующий на произвольных подмножествах X в $A(G)$, а также порожденный им оператор δ_G .

Приведем конструкции этих операторов. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi: A(G) \rightarrow A_l = A(G)/L(S)$ на линейную группу Ли, которая является связной компонентой единицы некоторой алгебраической группы A (см. выше). Пусть δ_A обозначает оператор алгебраического замыкания (относительно обычной топологии Зарисского) в A . Для произвольного подмножества X в $A(G)$ рассмотрим $\delta_A(\pi(X)) \cap A_l$ – некоторое подмножество в A_l , имеющее конечное число связных компонент. Рассмотрим теперь подмножество $\pi^{-1}(\delta_A(\pi(X)) \cap A_l)$ и через $\delta(X)$ обозначим объединение тех связных (в евклидовой топологии) компонент этого подмножества, которые имеют непустое пересечение с X . Полученное подмножество $\delta(X)$ и называется алгебраическим замыканием подмножества X в $A(G)$. Легко проверить, что оператор δ удовлетворяет всем аксиомам оператора топологического замыкания. Более того, его можно рассматривать как некоторое обобщение классического оператора алгебраического замыкания в топологии Зарисского.

Если X – подгруппа в $A(G)$, то легко убедиться в том, что $\delta(X) = X \cdot \pi^{-1}(\delta_A(X) \cap A_l)_0$ (где $(\)_0$ обозначает связную компоненту единицы). Положим, наконец, $\delta_G(X) = \delta(X) \cap G$, где группа G рассматривается как подгруппа в $A(G)$ (в силу упомянутого выше алгебраического расщепления). Перечислим некоторые свойства оператора δ_G (подробнее см. [7], [8]). Ясно, что $\delta_G(H) \supset H$ для любой подгруппы H . Далее, $\delta_G(H)$ нормализует H и H_0 . Наконец, $\delta_G(H)$ почти связна по модулю $L(S)$, т.е. $\delta_G(H)/\delta_G(H) \cap L(S)$ имеет только конечное число связных компонент (хотя сама подгруппа $\delta_G(H)$ может иметь и бесконечное число связных компонент, в отличие от случая классического алгебраического замыкания).

Первое рассматриваемое нами свойство плезиоравномерных подгрупп – транзитивность. Отметим, что для свойства компактности подобное свойство совершенно очевидно, для квазикompактности оно тоже доказывается без особого труда.

ТЕОРЕМА 1 (транзитивность плезиоравномерности). *Пусть G – некоторая группа Ли, а H и F – некоторые ее замкнутые подгруппы, причем H содержится в F . Предположим, что H плезиоравномерна в F , а F плезиоравномерна в G . Тогда H плезиоравномерна в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения плезиоравномерности следует, что существуют замкнутые равномерные подгруппы $P_H \subset F$ и $P_F \subset G$, которые содержат H и F соответственно в качестве квазиравномерных подгрупп. В результате имеем последовательность включений

$$H \subset P_H \subset F \subset P_F \subset G.$$

Ниже будет доказано, что P_H плезиоравномерна в P_F . Предположим на минуту, что это уже сделано, т.е. существует такая замкнутая равномерная подгруппа $P \subset P_F$, ко-

торая содержит P_H в качестве квазиравномерной подгруппы. Так как P_F равномерна в G , то P тоже равномерна в G (это очевидная транзитивность свойства равномерности). Далее, так как H квазиравномерна в P_H , она будет квазиравномерна и в P (это транзитивность свойства квазикompактности; она вытекает из теоремы Фубини, доказательство можно найти в [9]). В результате получаем, что P – равномерная подгруппа в G , содержащая H в качестве квазиравномерной подгруппы. В силу определения плезиоравномерности это и означает, что H плезиоравномерна в G .

Итак, нам остается только доказать, что P_H плезиоравномерна в P_F . Предварительно сделаем два упрощения.

Во-первых, мы можем считать, что группа Ли G связна. Дело в том, что если Q – некоторая плезиоравномерная подгруппа в произвольной группе Ли G , то $Q/Q \cap G_0$ – подгруппа конечного индекса в G/G_0 – группе связных компонент группы Ли G (здесь G_0 – связная компонента единицы группы Ли G). Поэтому мы можем перейти, не нарушая справедливости предположений и утверждений теоремы, к рассмотрению подгруппы $Q \cap G_0$ в связной группе Ли G_0 .

Во-вторых, мы можем считать группу Ли G односвязной, ибо если это не так, то переходим к универсальному накрытию и все подгруппы в G заменяем на их прообразы при этом накрытии. На свойствах равномерности, квазиравномерности и плезиоравномерности подгрупп такой переход не отразится.

Из сказанного следует, что доказательство теоремы 1 сводится к доказательству следующей леммы, которая представляет собой основной технический результат данной статьи.

ЛЕММА. Пусть G – связная, односвязная группа Ли, а H и F – две ее замкнутые подгруппы, причем H содержится в F . Предположим, что H равномерна в F , а F квазиравномерна в G . Тогда H будет плезиоравномерна в G , причем в качестве подгруппы P_H , фигурирующей в определении плезиоравномерности для H , можно взять $\delta_G(H)$.

Это означает, что в определении плезиоравномерности понятия равномерности и квазиравномерности можно менять местами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $N = N_G(F_0)$ – нормализатор в G связной компоненты единицы F_0 подгруппы F . Как доказано в [10], из квазиравномерности F в G вытекает, что этот нормализатор N равномерен в G (это утверждение можно назвать леммой Мостова–Вана). Поэтому мы можем использовать его в качестве P_F в определении плезиоравномерности подгруппы F . Отсюда вытекает, что, заменив G на N , мы можем считать F_0 нормальной подгруппой в G .

Пусть δ – оператор алгебраического замыкания, а $A(G)$ – алгебраическая оболочка односвязной группы Ли G . Рассмотрим подгруппу $\delta_G(H) = \delta(H) \cap G$ и докажем, что она равномерна в G .

Положим $\Phi = \overline{F \cdot \delta_G(H)}$, где черта сверху обозначает обычное топологическое замыкание. Переходя к подгруппе конечного индекса в F (что не влияет на справедливость утверждения леммы), мы можем считать, что $\delta_G(H) \cdot F_0 \supset F$, и тогда будет $\Phi = \overline{\delta_G(H) \cdot F_0}$. Так как $\Phi \supset F$, то Φ тоже квазиравномерна в G (это иногда называют наследственностью свойства квазикompактности).

Подгруппа $\delta_G(H)$ почти связна по модулю $L(S)$ – линеаризатора полупростой части S группы Ли G (см. выше). С другой стороны, подгруппа $F_0 \cdot \delta_G(H)$ имеет конечный

индекс в $F \cdot \delta_G(H)$. Это следует из того, что $\delta_G(H) \supset H$, а F/H почти связно в силу равномерности H в F . Но тогда из сказанного выше получаем, что Φ почти связна по модулю $L(S)$. В силу леммы Мостова–Вана [9], примененной к $G/L(S)$, получаем, что Φ равномерна в G . Заменяя в случае необходимости G на Φ , мы можем считать, что $\Phi = G$, т.е. $F \cdot \delta_G(H)$ плотна в G (в обычной топологии). Отсюда, в частности, следует, что $F_0 \cdot (\delta_G(H))_0$ нормальна в G . Так как группа Ли G односвязна, любой нормальный делитель в ней обязательно замкнут. Следовательно, $F_0 \cdot (\delta_G(H))_0$ – замкнутый нормальный делитель в G .

Подгруппа $F \cdot \delta_G(H)$ почти связна по модулю $L(S)$, поэтому она почти совпадает с $F_0 \cdot (\delta_G(H))_0$ по модулю $L(S)$. В силу этого из замкнутости $F_0 \cdot (\delta_G(H))_0$ в G следует, что $\delta_G(H) \cdot F_0 = G$.

Имеем следующие естественные отождествления пространств смежных классов (являющиеся диффеоморфизмами гладких многообразий):

$$G/\delta_G(H) = F_0 \cdot \delta_G(H)/\delta_G(H) = F_0/F_0 \cap \delta_G(H).$$

Но $\delta_G(H) \supset H$ и H равномерна в G . Поэтому пространство $F_0/F_0 \cap \delta_G(H)$ компактно. Отсюда вытекает, что $\delta_G(H)$ – равномерная подгруппа в G .

Докажем теперь, что H квазиравномерна в $\delta_G(H)$. По условию F квазиравномерна в G . Однородное пространство G/F можно естественно отождествить с $F \cdot \delta_G(H)/F = \delta_G(H)/F \cap \delta_G(H)$. Далее, имеем вложения $H \subset \delta_G(H) \cap F \subset \delta_G(H)$.

Рассмотрим однородное пространство $M = \delta_G(H)/H$. В силу указанного выше свойства оператора δ_G подгруппа H_0 нормальна в $\delta_G(H)$. Положим $U = \delta_G(H)/H_0$, $\Gamma = H/H_0$. Тогда $M = U/\Gamma$, где Γ – дискретная подгруппа в U . На U/Γ имеется, очевидно, естественная инвариантная мера. Поэтому на M имеется инвариантная мера.

Подгруппа H равномерна в G , поэтому H равномерна и в $\delta_G(H) \cap F$. Далее, подгруппа $\delta_G(H) \cap F$ квазиравномерна в $\delta_G(H)$, ибо в силу равенства $\delta_G(H) \cdot F_0 = G$ квазикомпактное однородное пространство G/F естественным образом можно отождествить с $\delta_G(H)/F \cap \delta_G(H)$. Из сказанного вытекает, что инвариантная мера на $\delta_G(H)/H$ конечна, т.е. H квазиравномерна в $\delta_G(H)$. Тем самым, подгруппа H является плезиоравномерной в G , причем в качестве P_H в определении плезиоравномерности можно взять подгруппу $\delta_G(H)$. Лемма доказана.

Как уже было показано выше, утверждение теоремы 1 вытекает из доказанной леммы.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие, которое представляет собой транзитивность свойства плезиоравномерности в максимально широкой форме. Его можно также назвать свойством сокращения цепочек подгрупп.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть для некоторой группы Ли G имеется цепочка замкнутых подгрупп

$$H = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{k-1} \subset F_k = G,$$

причем каждая из подгрупп F_i равномерна или квазиравномерна в F_{i+1} . Тогда подгруппа H плезиоравномерна в G .

Следующая теорема показывает, что свойство плезиоравномерности обладает наследственностью (справедливость которой для свойств равномерности и квазиравномерности хорошо известна).

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – некоторая группа Ли, а H – плезиоравномерная подгруппа в G . Тогда любая замкнутая подгруппа F в G , содержащая H , тоже будет плезиоравномерной в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_H – та подгруппа в G , которая в силу определения плезиоравномерности подгруппы H является равномерной подгруппой в G , содержащей H в качестве квазиравномерной подгруппы. Как видно из доказательства теоремы 1, в качестве такой P_H можно взять $\delta_G(H)$.

Рассмотрим подгруппу $\delta_G(F)$. Она содержит $\delta_G(H)$, а так как последняя равномерна в G , то и $\delta_G(F)$ тоже равномерна в G (мы использовали очевидную наследственность свойства равномерности).

Докажем теперь, что F квазиравномерна в $\delta_G(F)$. Рассмотрим два семейства включений:

$$H \subset F \subset \delta_G(F) \subset G, \quad H \subset \delta_G(H) \subset \delta_G(F),$$

в которых H квазиравномерна в $\delta_G(H)$, $\delta_G(H)$ равномерна в $\delta_G(F)$, а та, в свою очередь, равномерна в G . Заменяя G на $\delta_G(F)$, мы можем при доказательстве теоремы 2 считать, что $\delta_G(F) = G$. Но тогда, в частности, F_0 будет нормальна в G . Докажем, что F квазиравномерна в G .

На однородном пространстве G/F существует инвариантная мера. Это утверждение доказывается точно так же, как при доказательстве леммы выше, и основывается на том, что F_0 нормальна в G . Остается доказать, что эта мера конечна.

Рассмотрим $\overline{\delta_G(H) \cdot F_0}$; эта подгруппа почти содержит F (т.е. ее пересечение с F имеет в F конечный индекс). Имеем последовательность включений

$$H \subset F \subset \delta_G(H) \cdot F_0 = U \subset G.$$

Подгруппа U , определенная выше, равномерна в G . Снова, как и при доказательстве леммы, мы можем, заменяя в случае необходимости G на U , считать, что $U = G$. Из этого равенства так же, как при доказательстве леммы, выводится, что $\delta_G(H) \cdot F_0 = G$.

Рассмотрим однородное пространство G/F . Его можно естественным образом отождествить с $\delta_G(H) \cdot F/F = \delta_G(H)/F \cap \delta_G(H)$. Из условия доказываемой теоремы вытекает, что H квазиравномерна в $\delta_G(H)$. Так как H содержится в $F \cap \delta_G(H)$, то на однородном пространстве $\delta_G(H)/F \cap \delta_G(H)$ существует конечная мера. Поэтому и инвариантная мера на G/F тоже конечна. Этим доказано, что F квазиравномерна в G (при условии, что $\delta_G(F) = G$) и потому плезиоравномерна в G .

Еще одно свойство, которое интересно рассмотреть для плезиоравномерных подгрупп, – это мультипликативность, которую можно понимать несколькими разными способами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть H_1, H_2 – плезиоравномерные подгруппы в группах Ли G_1, G_2 соответственно. Тогда $H_1 \times H_2$ – плезиоравномерная подгруппа в $G_1 \times G_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую цепочку подгрупп в $G_1 \times G_2$:

$$H = H_1 \times H_2 \subset F = H_1 \times G_1 \subset G = G_1 \times G_2.$$

Ясно, что H плезиоравномерна в F , а F плезиоравномерна в G . Но тогда из теоремы 1 следует, что $H = H_1 \times H_2$ плезиоравномерна в $G = G_1 \times G_2$.

Мультипликативность в таком понимании имеет место, очевидно, и для свойств равномерности и квазиравномерности. Другое понимание мультипликативности можно сформулировать так: если H_1, H_2 – две замкнутые плезиоравномерные подгруппы в G , то $\langle H_1 \cdot H_2 \rangle$ – замкнутая подгруппа, порожденная их произведением, – тоже плезиоравномерна. Но в такой формулировке свойство мультипликативности очевидно и вытекает из наследственности, так как $\langle H_1 \cdot H_2 \rangle$ содержит плезиоравномерную подгруппу H_1 (или H_2) группы Ли G .

В заключение рассмотрим один отрицательный результат. Речь идет об ответе на следующий естественный вопрос: во всякой ли группе Ли G имеется нетривиальная плезиоравномерная подгруппа H ? При этом, конечно, нужно ограничиться случаем локально эффективных подгрупп, т.е. таких, которые не содержат нетривиальных связных нормальных делителей группы Ли G (в противном случае, например, в любой разрешимой группе Ли легко построить плезиоравномерную подгруппу). Оказывается, что даже для разрешимых групп Ли ответ на этот вопрос отрицательный и контрпример доставляет простейшая неабелева разрешимая группа Ли R_2 . Эту группу Ли можно рассматривать как связную компоненту единицы группы аффинных преобразований прямой. Группа R_2 может быть представлена в виде полупрямого произведения $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R}$, множители которого можно рассматривать соответственно как группы переносов и растяжений аффинной прямой. Оказывается, что в этой группе Ли нет нетривиальных локально эффективных плезиоравномерных подгрупп.

Вначале покажем, что в разрешимой группе Ли понятия равномерности, квазиравномерности и плезиоравномерности эквивалентны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – разрешимая группа Ли, а H – замкнутая подгруппа в G . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) подгруппа H равномерна в G ;
- ii) подгруппа H квазиравномерна в G ;
- iii) подгруппа H плезиоравномерна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений i) и ii) доказана в [5]. По определению плезиоравномерности и из i) и из ii) вытекает iii). Докажем, что из iii) вытекает i).

Пусть H плезиоравномерна в G . Тогда существует такая замкнутая равномерная подгруппа P в G , которая содержит H в качестве квазиравномерной подгруппы. Но тогда в силу импликации ii) $\Rightarrow$ i) получаем, что H равномерна в P , а потому равномерна и в G .

Докажем теперь, что в R_2 нет нетривиальных локально эффективных плезиоравномерных подгрупп. Предположим обратное и пусть H – одна из таких подгрупп. Так как $\dim R_2 = 2$, то $\dim H = 0$ или 1.

Если $\dim H = 0$, то H – дискретная подгруппа. Из ее плезиоравномерности в силу предложения 2 следует, что она и равномерна, а потому содержащая ее группа Ли должна быть унимодулярна (см. [8]). Но группа Ли R_2 не унимодулярна. Получили противоречие.

Пусть теперь $\dim H = 1$. Рассмотрим нильрадикал N группы Ли R_2 ; он одномерен. Для равномерных подгрупп разрешимых групп Ли известно, что их связная компонента единицы содержится в N [11]. Плезиоравномерная подгруппа в разрешимой группе Ли равномерна в силу предложения 2. Поэтому должно быть $H_0 \subset N$. Но $\dim H_0 = 1 = \dim N$ и потому $H_0 = N$. Однако N – нормальный делитель в R_2 , и

мы снова получаем противоречие с предположением о локальной эффективности подгруппы H . Итак, во всех возможных случаях предположение о существовании в R_2 нетривиальной плезиоравномерной локально эффективной подгруппы приводит к противоречию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Горбацевич В. В. О плезиокомпактных однородных пространствах I // Сиб. матем. ж. 1989. Т. 30. № 2. С. 61–72.
- [2] Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли преобразований // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. М.: ВИНТИ, 1988. С. 103–240.
- [3] Горбацевич В. В. О плезиокомпактных однородных пространствах II // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 2. С. 13–25.
- [4] Горбацевич В. В. Расслоение Зейферта для плезиокомпактного однородного пространства // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 2. С. 301–313.
- [5] Mostow G. Factor spaces of solvable groups // Ann. Math. 1954. V. 60. № 1. P. 1–27.
- [6] Горбацевич В. В. О некоторых классах однородных пространств, близких к компактным // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 4. С. 785–788.
- [7] Горбацевич В. В. Расщепление групп Ли и его применения к изучению однородных пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 6. С. 1227–1258.
- [8] Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 41. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–258.
- [9] Рагунатан М. Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.
- [10] Wang S. P. Homogeneous spaces with finite invariant measure // Amer. J. Math. 1973. V. 98. № 2. P. 311–324.
- [11] Auslander L. An exposition of the structure of solvmanifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. № 2. P. 227–261.

Московский государственный технологический университет

Поступило

02.11.1999

Исправленный вариант

19.05.2000