Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. де Филиппис, Ф. Раниа, Коммутирующие и централизирующие обобщенные дифференцирования на идеалах Ли в первичных кольцах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 778–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5073>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:28:15

Коммутирующие и централизующие обобщенные дифференцирования на идеалах Ли в первичных кольцах

В. де Филиппис, Ф. Рания

Пусть R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, U – кольцо частных Утуми кольца R , C – расширенный центроид кольца R и L – нецентральный идеал Ли кольца R . Если F и G – обобщенные дифференцирования R и $k \geq 1$ – фиксированное целое число, удовлетворяющее условию $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ для любого $x \in L$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) либо существуют такие $a \in U$ и $\alpha \in C$, что $F(x) = xa$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ для всех $x \in R$;
- 2) либо R удовлетворяет одному из стандартных тождеств $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и выполнено одно из следующих условий:
 - (а) существуют $a, b, c, q \in U$, для которых $a - b + c - q \in C$ и выполнены равенства $F(x) = ax + xb$ и $G(x) = cx + xq$ при всех $x \in R$;
 - (б) существуют $a, b, c \in U$ и дифференцирование d кольца частных U , для которых $F(x) = ax + d(x)$ и $G(x) = bx + xc - d(x)$ при всех $x \in R$, причем $a + b - c \in C$.

Библиография: 22 название.

1. Введение. Пусть R – первичное кольцо с центром $Z(R)$ и расширенным центроидом C , и пусть U – кольцо частных Утуми этого кольца. В этой статье мы рассмотрим некоторые проблемы, связанные с обобщенными дифференцированиями первичных колец, удовлетворяющими определенным условиям коммутирования.

Напомним, что отображение G из R в R называется *обобщенным дифференцированием*, если существует дифференцирование d кольца R , для которого $G(xy) = G(x)y + xd(y)$ при всех $x, y \in R$. Важный пример обобщенного дифференцирования – отображение вида $G(x) = ax + xb$ для некоторых $a, b \in R$; такие обобщенные дифференцирования называются *внутренними*. До недавнего времени главным образом изучались обобщенные дифференцирования операторных алгебр, так что любой алгебраический подход представлял интерес (см., например, [1], [2]).

Первый важный результат об отображениях, удовлетворяющих условиям коммутирования, – это теорема Познера [3], [4] которая утверждает, что существование ненулевого дифференцирования d первичного кольца R , для которого $[d(x), x] \in Z(R)$ при всех $x \in R$, влечет коммутативность кольца R .

Теорема Познера послужила отправной точкой нескольких исследований, непосредственно вытекающих из ее формулировки и связанных с коммутирующими дифференцированиями, коммутирующими аддитивными отображениями и коммутирующими следами мультиаддитивных отображений, а также разнообразными обобщениями понятия коммутирующего отображения; эти исследования имеют многочисленные приложения в разных областях, в частности, в теории Ли (полное и подробное изложение этих вопросов можно найти в обзоре Брешара по теории коммутирующих отображений [5]). Основная роль в этой области принадлежит отображениям двух типов, коммутирующим отображениям и централизующим отображениям. Напомним, что аддитивное отображение g кольца R называется *коммутирующим на подмножестве* S в R , если $[g(x), x] = 0$ для всех $x \in S$; отображение g называется *централизующим* на S , если $[g(x), x] \in Z(R)$ для всех $x \in S$. Кроме того, мы будем говорить, что отображение g является *гиперкоммутирующим* (или, что то же самое, *гиперцентрализующим*) на S , если существует фиксированное целое число $k \geq 2$, для которого $[g(x), x]_k = 0$, т.е. $[g(x), x]_{k-1}x - x[g(x), x]_{k-1} = 0$, при всех $x \in S$. Обычно цель исследования коммутирующих, централизующих и гиперкоммутирующих отображений состоит в описании вида таких отображений или в получении информации о структуре кольца R .

Было получено два важных результата, основанных на идее описания таких отображений в терминах идеала Ли первичного кольца.

- 1) Если R – некоммутативное первичное кольцо, L – некоммутативный идеал Ли кольца R и g – дифференцирование кольца R , удовлетворяющее условию $[g(x), x]y - y[g(x), x] = 0$ для всех $x \in L$, то либо $g = 0$, либо $\text{char}(R) = 2$ и R удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ (теорема 3 в [6]).
- 2) Если R – первичное кольцо характеристики $\neq 2$ с расширенным центроидом C , L – некоммутативный идеал Ли кольца R и $g: L \rightarrow R$ – коммутирующее аддитивное отображение, то существуют $\lambda \in C$ и аддитивное отображение $\xi: L \rightarrow C$, для которых $g(v) = \lambda v + \xi(v)$ при всех $v \in L$ [7].

Позже, в статье [8], Лански изучил дифференцирования, удовлетворяющие условиям гиперкоммутирования и гиперцентрализации на двусторонних идеалах и идеалах Ли первичного кольца R . Точнее, теорема 3 в этой статье утверждает, что если g – ненулевое дифференцирование кольца R , L – некоммутативный идеал Ли в R и $k \geq 1$ – фиксированное целое число, для которого $[g(x), x]_{k+1}$ при всех $x \in L$, то $\text{char}(R) = 2$ и кольцо R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$.

Еще позднее, в [9], этот результат был обобщен на случай обобщенного дифференцирования G . А именно, было доказано, что если $[G(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ для всех x в нецентральной идеале Ли L , то либо $G(x) = \alpha x$ при всех $x \in R$ для некоторого фиксированного $\alpha \in C$, либо кольцо R удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$, причем в последнем случае если $\text{char}(R) \neq 2$, то $G(x) = ax + xa + \alpha x$ при всех $x \in R$ для некоторых фиксированных $a \in U$ и $\alpha \in C$.

В этой статье мы продолжаем эти исследования и рассматриваем условие, обобщающее коммутирование, а именно, изучаем следующий естественный вопрос: что происходит, когда действуют два разных отображения F и G , удовлетворяющие условию $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$? Основным результатом статьи таков.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, U – кольцо частных Утуми кольца R , C – расширенный цент-

роид кольца R и L – нецентральный идеал Ли кольца R . Если F и G – обобщенные дифференцирования кольца R и $k \geq 1$ – фиксированное целое, для которого $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ при всех $x \in L$, то выполнено одно из следующих условий:

- 1) либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = \alpha x$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ при всех $x \in R$,
- 2) либо кольцо R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и справедливо одно из следующих утверждений:
 - (а) существуют $a, b, c, q \in U$, удовлетворяющие условию $a - b + c - q \in C$, для которых $F(x) = ax + xb$ и $G(x) = cx + xq$ при всех $x \in R$;
 - (б) существуют элементы $a, b, c \in U$ и дифференцирование d кольца частных U , для которых $F(x) = ax + d(x)$ и $G(x) = bx + xc - d(x)$ при всех $x \in R$, причем $a + b - c \in C$.

Отметим, что одним из ожидаемых заключений теоремы должно быть утверждение, что $F(x) = \alpha x$ и $G(x) = \beta x$ при всех $x \in R$ для некоторых фиксированных $\alpha, \beta \in C$. И в самом деле, это частный случай утверждения, что $F(x) = \alpha x$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ для $a \in C$.

Прежде чем доказывать нашу теорему, мы для полноты напомним некоторые основные понятия, определения и простые следствия теоремы Харченко [10] о дифференциальных тождествах первичного кольца R . Полное и подробное изложение теории обобщенных полиномиальных тождеств, связанных с дифференцированиями, содержится в седьмой главе книги [11].

ФАКТ 1. Пусть U – кольцо частных Утуми кольца R , а $C = Z(U)$ – расширенный центроид кольца R [11; глава 2]. Хорошо известно, что любое дифференцирование первичного кольца R можно единственным образом продолжить до дифференцирования его кольца частных Утуми U ; таким образом, любое дифференцирование кольца R можно считать определенным на всем кольце U [11; с. 87].

ФАКТ 2. Пусть D_f – C -подпространство пространства $\text{Der}(U)$, состоящее из всех внутренних дифференцирований кольца частных U , и пусть d – ненулевое дифференцирование кольца R . Согласно теореме 2 из [10] верно следующее утверждение (см. также теорему 1 в [12]).

Если $\Phi(x_1, \dots, x_n, {}^d x_1, \dots, {}^d x_n)$ – дифференциальное тождество кольца R , то выполняется одно из следующих условий:

- 1) либо $d \in D_f$,
- 2) либо R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $\Phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

ФАКТ 3. Рассмотрим над C свободное произведение $T = U *_C C\{X\}$ C -алгебры U и свободной C -алгебры $C\{X\}$, где X – счетное множество, состоящее из некоммутирующих переменных $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Элементы произведения T называются *обобщенными многочленами* с коэффициентами в U . При этом если I – ненулевой идеал в R , то I , R и U удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам с коэффициентами в U . Более подробное изложение этих вопросов содержится в [13] и [14].

ФАКТ 4. Полученный в [14] результат имеет такое следствие. Предположим, что элементы $a_1, \dots, a_k \in U$ линейно независимы над C и

$$a_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_k g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \in T$$

для некоторых $g_1, \dots, g_k \in T = U *_C C\{X\}$. Если для любого i имеем

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_j(x_1, \dots, x_n),$$

причем $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$, то $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)$ совпадают с нулевым элементом T . То же заключение имеет место, если

$$g_1(x_1, \dots, x_n) a_1 + \dots + g_k(x_1, \dots, x_n) a_k = 0 \in T$$

и

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n h_j(x_1, \dots, x_n) x_j$$

для некоторых $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$.

2. Случай внутренних обобщенных дифференцирований. В этом разделе мы исследуем случай, когда оба обобщенных дифференцирования F и G являются внутренними и определяются, соответственно, формулами $F(x) = ax + xb$ и $G = cx + xq$ для всех $x \in R$, где a, b, c, q – фиксированные элементы кольца частных U .

Всюду ниже мы используем обозначение

$$P(x_1, x_2) = [a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2][c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q, [x_1, x_2]]_k$$

и считаем, что кольцо R удовлетворяет обобщенному тождеству $P(x_1, x_2)$.

ЛЕММА 1. Если кольцо R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, то существуют $a' \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = xa'$ и $G(x) = (a' + \alpha)x$ при всех $x \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = U *_C C\{x_1, x_2\}$ обозначает свободное произведение над C C -алгебры U и свободной C -алгебры $C\{x_1, x_2\}$. Любой элемент произведения T представляет собой обобщенный многочлен с коэффициентами из U (см. факт 3).

Предположим, что кольцо R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству. Тогда

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) &= [a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2][c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q, [x_1, x_2]]_k \\ &= \left(\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [x_1, x_2]^h (a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b) [x_1, x_2]^{k-h} \right) [x_1, x_2] \\ &\quad - [x_1, x_2] \left(\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [x_1, x_2]^h (c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q) [x_1, x_2]^{k-h} \right) = 0 \in T. \end{aligned}$$

Поскольку $P(x_1, x_2)$ – тривиальное обобщенное полиномиальное тождество для R , из факта 4 вытекает, что $a \in C$ и $q \in C$, т.е.

$$P(x_1, x_2) = \sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [x_1, x_2]^{h+1} (b - c) [x_1, x_2]^{k-h+1} = 0 \in T.$$

Еще раз применяя предположение, что R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, и используя факт 4, мы заключаем, что $b - c \in C$, откуда вытекает требуемое утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $R = M_p(F)$ – кольцо матриц над полем F размера $p \times p$, где $p > 1$, и пусть a, b, c, q – элементы кольца R , для которых

$$[a[r_1, r_2] + [r_1, r_2]b, [r_1, r_2]]_k [r_1, r_2] - [r_1, r_2][c[r_1, r_2] + [r_1, r_2]q, [r_1, r_2]]_k = 0$$

при всех $r_1, r_2 \in R$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1) $a, q, b - c \in F$;
- 2) $p = 2$ и $a - b + c - q \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь e_{kl} обозначает обычную матричную единицу – матрицу, у которой на (k, l) -м месте стоит единица, а все остальные элементы – нули. Положим $a = \sum_{ij} a_{ij} e_{ij}$, $b = \sum_{ij} b_{ij} e_{ij}$, $c = \sum_{ij} c_{ij} e_{ij}$ и $q = \sum_{ij} q_{ij} e_{ij}$, где $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, q_{ij} \in F$. Сначала рассмотрим случай $p \geq 3$.

Предположим, что в тождестве

$$[a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2][c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q, [x_1, x_2]]_k$$

выполнены равенства $[x_1, x_2] = [e_{ii}, e_{ij} - e_{ji}] = e_{ij} + e_{ji}$ для любых $i \neq j$. Тогда

$$\begin{aligned} & [a(e_{ij} + e_{ji}) + (e_{ij} + e_{ji})b, (e_{ij} + e_{ji})]_k (e_{ij} + e_{ji}) \\ & - (e_{ij} + e_{ji})[c(e_{ij} + e_{ji}) + (e_{ij} + e_{ji})q, (e_{ij} + e_{ji})]_k = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Выберем $l \neq i, j$ и умножим (1) слева на e_{ll} . Получим

$$0 = e_{ll} [a(e_{ij} + e_{ji}) + (e_{ij} + e_{ji})b, (e_{ij} + e_{ji})]_k (e_{ij} + e_{ji}) = e_{ll} a (e_{ij} + e_{ji})^{k+2}.$$

В частности, $a_{li} = 0$ для всех $i \neq l$, т.е. a является диагональной матрицей в R . Аналогично, умножая справа (1) на e_{ll} , получим

$$0 = -(e_{ij} + e_{ji})[c(e_{ij} + e_{ji}) + (e_{ij} + e_{ji})q, (e_{ij} + e_{ji})]e_{ll} = -(e_{ij} + e_{ji})^{k+2} q e_{ll},$$

откуда снова вытекает, что $q_{il} = 0$ для всех $i \neq l$, т.е. q является диагональной матрицей в R .

Рассмотрим теперь внутренний автоморфизм $\chi(x) = (1 - e_{ji})x(1 + e_{ji})$ в $M_p(F)$, где $i \neq j$. Заметим, что отношение

$$\begin{aligned} & [\chi(a)[x_1, x_2] + [x_1, x_2]\chi(b), [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] \\ & - [x_1, x_2][\chi(c)[x_1, x_2] + [x_1, x_2]\chi(q), [x_1, x_2]]_k \end{aligned}$$

все еще является тождеством для R . Применяя предыдущие рассуждения, мы видим, что $\chi(a)$ и $\chi(q)$ – диагональные матрицы, так что матрицы

$$\begin{aligned}(1 - e_{ji})a(1 + e_{ji}) &= a - e_{ji}a + ae_{ji} - e_{ji}ae_{ji} = a + (a_{jj} - a_{ii})e_{ji}, \\ (1 - e_{ji})q(1 + e_{ji}) &= q - e_{ji}q + qe_{ji} - e_{ji}qe_{ji} = q + (q_{jj} - q_{ii})e_{ji}\end{aligned}$$

тоже диагональны, откуда вытекают равенства $a_{jj} = a_{ii}$ и $q_{jj} = q_{ii}$ для всех $i \neq j$; таким образом, матрицы a и q являются центральными элементами в $M_p(F)$.

Следовательно, кольцо R удовлетворяет тождеству

$$[x_1, x_2]b, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2][c[x_1, x_2], [x_1, x_2]]_k,$$

т.е.

$$[x_1, x_2][b - c, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2].$$

Заметим, что если k нечетно, то из того, что кольцо R удовлетворяет также тождеству

$$[[x_1, x_2][b - c, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2], [x_1, x_2]],$$

вытекает, что оно удовлетворяет и тождеству

$$[x_1, x_2][b - c, [x_1, x_2]]_{k+1} [x_1, x_2].$$

Таким образом, в любом случае мы можем считать, без потери общности, что k четно, и записывать рассматриваемое тождество в виде

$$\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [x_1, x_2]^{h+1} (b - c) [x_1, x_2]^{k-h+1}.$$

Если $[x_1, x_2] = [e_{ii}, e_{ij} - e_{ji}] = e_{ij} + e_{ji}$ для всех $i \neq j$, то

$$Y = \sum_h (-1)^h \binom{k}{h} (e_{ij} + e_{ji})^{h+1} (b - c) (e_{ij} + e_{ji})^{k-h+1} = 0;$$

в частности, (i, j) -й элемент матрицы Y равен

$$2^{k-1}(b_{ji} - c_{ji} - b_{ij} + c_{ij}) = 0. \quad (2)$$

С другой стороны, если $[x_1, x_2] = [e_{ii}, e_{ij} + e_{ji}] = e_{ij} - e_{ji}$, то

$$Z = \sum_h (-1)^h \binom{k}{h} (e_{ij} - e_{ji})^{h+1} (b - c) (e_{ij} - e_{ji})^{k-h+1} = 0,$$

и (i, j) -й элемент матрицы Z равен

$$(2^{k-1} - 4)(b_{ji} - c_{ji}) - 2^{k-1}(b_{ij} - c_{ij}) = 0. \quad (3)$$

Значит из равенств (2) и (3) и неравенства $\text{char}(R) \neq 2$ вытекает, что $b_{ji} - c_{ji} = 0$ для всех $i \neq j$, т.е. $b - c$ – диагональная матрица в R . Используя те же рассуждения, что и выше, можно доказать, что и в этом случае матрица $b - c$ является центральным элементом в R , что и требовалось.

Наконец, рассмотрим случай $R = M_2(F)$. Хорошо известно, что в этом случае многочлен $[x_1, x_2]^2$ принимает значения в центре кольца R . Кроме того, мы снова можем предположить, что k чётно. С помощью вычислений можно показать, что при этом условии кольцо R удовлетворяет обобщенному тождеству

$$2^{k-1} [a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b, [x_1, x_2]^{k+1}] + 2^{k-1} [c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q, [x_1, x_2]^{k+1}];$$

умножая его слева на $[x_1, x_2]$, мы видим, что R удовлетворяет тождеству

$$2^{k-1} [a - b + c - q, [x_1, x_2]^{k+3}].$$

Значит,

$$[a - b + c - q, [r_1, r_2]] [r_1, r_2]^{k+2} = 0 \quad \text{для всех } r_1, r_2 \in R.$$

Если $[r_1, r_2] = 0$, то, тем более, $[a - b + c - q, [r_1, r_2]] = 0$. С другой стороны, поскольку кольцо R некоммутативно, существуют $r_1, r_2 \in R$, для которых $0 \neq [r_1, r_2]^{k+2} \in Z(R)$ ($Z(r)$ обозначает центр кольца R). Таким образом, в любом случае имеем $[a - b + c - q, [r_1, r_2]] = 0$. Отсюда заключаем, что $a - b + c - q \in Z(R)$ (см., например, лемму 2 в [15]).

ЛЕММА 3. Пусть R – первичное кольцо характеристики, отличной от 2. Если элементы a, b, c, q кольца частных U удовлетворяют условию

$$[a[r_1, r_2] + [r_1, r_2]b, [r_1, r_2]]_k [r_1, r_2] - [r_1, r_2] [c[r_1, r_2] + [r_1, r_2]q, [r_1, r_2]]_k = 0$$

для любых $r_1, r_2 \in R$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) $a, q, b - c \in C$;
- 2) кольцо R удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и $a - b + c - q \in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, положим

$$P(x_1, x_2) = [a[x_1, x_2] + [x_1, x_2]b, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + [x_1, x_2]q, [x_1, x_2]]_k.$$

Из того, что кольца R и U удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам (см. факт 3), вытекает, что кольцо частных U удовлетворяет тождеству $P(x_1, x_2)$. По лемме 1 $P(x_1, x_2)$ является нетривиальным обобщенным полиномиальным тождеством для U ; в противном случае все доказано. Кольца U и $U \otimes_C C$ представляют собой центрально замкнутые алгебры [16], и если C бесконечно, то они удовлетворяют одним и тем же обобщенным полиномиальным тождествам. По теореме Мартиндейла [17] U – примитивное кольцо, изоморфное плотному кольцу линейных преобразований векторного пространства V над C . Предположим, что $\dim_C(V) = p$, где p – положительное целое ≥ 2 . Тогда R является первичным кольцом, удовлетворяющим нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, причем $M_p(C)$ удовлетворяет тому же обобщенному тождеству кольца U , и мы получаем требуемое утверждение по лемме 2.

Теперь предположим, что $\dim_C V = \infty$. Заметим, что eUe удовлетворяет тождеству $P(x_1, x_2)$ для всех $e^2 = e \in \text{Soc}(U) = H$. Допустим, что либо $a \notin C$, либо $q \notin C$. Тогда ни один из этих элементов не централизует ненулевой идеал H в R .

Таким образом, существует либо $h_1 \in H$, для которого $[a, h_1] \neq 0$, либо $h_2 \in H$, для которого $[q, h_2] \neq 0$. Кроме того, в силу бесконечномерности идеал H не удовлетворяет полиномиальному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$, так что существуют элементы $h_3, h_4, h_5, h_6 \in H$, для которых $s_4(h_1, \dots, h_6) \neq 0$. По теореме Литовфа [18] найдется элемент $e^2 = e \in H$, для которого

$$ah_1, h_1a, bh_2, h_2b \in eUe \quad \text{и} \quad h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 \in eUe,$$

причем eUe является центральной простой конечномерной алгеброй над своим центром. Из того, что $s_4(h_3, \dots, h_6) \neq 0$, вытекает, что $eUe \cong M_t(C)$ для $t \geq 3$. Мы знаем, что

$$[eae[x_1, x_2] + [x_1, x_2]ebe, [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2][ece[x_1, x_2] + [x_1, x_2]eqe, [x_1, x_2]]_k$$

– обобщенное полиномиальное тождество для eRe , поэтому в силу конечномерности имеем $eae, eqe \in Z(eRe)$. Таким образом, одна из следующих цепочек равенств противоречива:

$$\begin{aligned} ah_1 &= eah_1 = eae h_1 = h_1 eae = h_1 ae = h_1 a, \\ qh_2 &= eqh_2 = eqe h_2 = h_2 eqe = h_2 qe = h_2 q. \end{aligned}$$

Следовательно, $a, q \in C$, и кольцо частных U удовлетворяет тождеству

$$\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [x_1, x_2]^{h+1} (b - c) [x_1, x_2]^{k-h+1}.$$

Так же, как в лемме 2 из [19], можно показать, что множество $[R, R]$ плотно в R , так что из выполнения тождества

$$\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} [r_1, r_2]^{h+1} (b - c) [r_1, r_2]^{k-h+1}$$

для всех $r_1, r_2 \in R$ следует, что

$$\sum_h (-1)^h \binom{k}{h} r^{h+1} (b - c) r^{k-h+1} = 0$$

для всех $r \in R$. Предположим сначала, что существует элемент $v \in V$, для которого элементы $\{v, v(b - c)\}$ линейно независимы над C . Поскольку $\dim_C V = \infty$, найдутся такие $w_1, w_2 \in V$, что элементы $\{v, v(b - c), w_1, w_2\}$ линейно независимы над C . Из плотности R вытекает существование элемента $r \in R$, для которого

$$vr = v, v(b - c)r = w_1, w_1r = w_2, w_2r = 0.$$

Приходим к противоречию:

$$0 = v \sum_h (-1)^h \binom{k}{h} r^{h+1} (b - c) r^{k-h+1} = (-1)^k w_2 \neq 0.$$

Значит, элементы $\{v, v(b - c)\}$ линейно зависимы над C для всех $v \in V$. Используя стандартные рассуждения, получаем $b - c \in C$, что и требовалось.

3. Общий случай. В этом разделе мы рассмотрим более общую ситуацию и докажем основную теорему этой статьи. Сначала предположим, что в кольце R существует такой нецентральный двусторонний идеал I , что $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ для всех $x \in [I, I]$. В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, то выполнено одно из следующих условий:

- 1) либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = ax$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ при всех $x \in R$,
- 2) либо R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и справедливо одно из утверждений:
 - (а) существуют $a, b, c, q \in U$, удовлетворяющие условию $a - b + c - q \in C$, для которых $F(x) = ax + xb$ и $G(x) = cx + xq$ при всех $x \in R$;
 - (б) существуют элементы $a, b, c \in U$ и дифференцирование d кольца частных U , для которых $F(x) = ax + d(x)$ и $G(x) = bx + xc - d(x)$ при всех $x \in R$, где $a + b - c \in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 из [1] любое обобщенное дифференцирование g плотного правого идеала кольца R можно единственным образом продолжить на кольцо частных Утуми U кольца R , так что можно считать, что обобщенные дифференцирования кольца R определены на всем кольце U и имеют вид $g(x) = ax + d(x)$, где $a \in U$ и d – дифференцирование кольца U . Итак, мы будем предполагать, что существуют элементы $a, c \in U$ и дифференцирования d, δ кольца U , для которых

$$F(x) = ax + d(x) \quad \text{и} \quad G(x) = cx + \delta(x).$$

Поскольку I , R и U удовлетворяют одним и тем же дифференциальным тождествам [12], в дальнейшем мы будем также предполагать без ограничения общности, что

$$[F(r), r]r - r[G(r), r] = 0$$

для всех $r \in [U, U]$. Тогда U удовлетворяет тождеству

$$[a[x_1, x_2] + d([x_1, x_2]), [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + \delta([x_1, x_2]), [x_1, x_2]]_k,$$

т.е.

$$\begin{aligned} & [a[x_1, x_2] + [d(x_1), x_2] + [x_1, d(x_2)], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] \\ & - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + [\delta(x_1), x_2] + [x_1, \delta(x_2)], [x_1, x_2]]_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где d и δ – дифференцирования кольца U . Рассмотрим три случая.

СЛУЧАЙ 1. Оба дифференцирования $d(x) = [b, x]$ и $\delta(x) = [q, x]$ являются внутренними в U , т.е.

$$F(x) = ax + [b, x] = (a + b)x + x(-b), \quad G(x) = cx + [q, x] = (c + q)x + x(-q)$$

для некоторых элементов $c, q \in U$. В этом случае оба обобщенных дифференцирования F и G являются внутренними в U . Заметим, что если $a \in C$, то по лемме 3 либо оба элемента $a + b$ и q попадают в C , либо кольцо R удовлетворяет тождеству

$s_4(x_1, \dots, x_4)$ и $a + 2b + c + 2q \in C$. В последнем случае все доказано. В случае $a + b, q \in C$ имеем $F(x) = xa$ и $G(x) = cx$ для всех $x \in R$. Снова применяя лемму 3, получаем равенство $c = a + \alpha$ для некоторого $\alpha \in C$, и опять все доказано.

СЛУЧАЙ 2. Дифференцирования d, δ линейно независимы над C по модулю D_{int} . В этом случае согласно статье [10] (см. также факт 2) и тождеству (4) кольцо U удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$\begin{aligned} & [a[x_1, x_2] + [y_1, x_2] + [x_1, y_2], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] \\ & - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + [z_1, x_2] + [x_1, z_2], [x_1, x_2]]_k; \end{aligned}$$

в частности, U удовлетворяет смешанной компоненте

$$[[x_1, y_2], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2].$$

В этом случае, поскольку кольцо частных U удовлетворяет полиномиальному тождеству, из теоремы Познера вытекает, что для некоторого поля F кольцо частных U и кольцо $M_m(F)$ матриц размера $m \times m$ над F удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам. В частности, для $m \geq 2$ неравенство $\text{char}(R) \neq 2$ приводит к противоречию; а именно, мы получаем

$$0 = [[e_{21}, e_{11}], [e_{21}, e_{12}]]_k [e_{21}, e_{12}] = (-2)^{k+1} e_{21} \neq 0.$$

СЛУЧАЙ 3. Дифференцирование $\alpha d + \beta \delta = ad(q)$ – внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $q \in U$. Если $\beta = 0$, то $d = ad(b)$ – внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $b = \beta^{-1}q$. Обращаясь к уже рассмотренному случаю 1, мы можем считать, что δ не является внутренним дифференцированием кольца частных U . Из тождества (4) и теоремы Харченко вытекает, что U удовлетворяет тождеству

$$[a[x_1, x_2] + [b, [x_1, x_2]], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + [y_1, x_2] + [x_1, y_2], [x_1, x_2]]_k$$

и, в частности, тождеству

$$-[x_1, x_2] [[x_1, y_2], [x_1, x_2]]_k.$$

Как и выше, найдется такое поле F , что кольцо частных U и кольцо $M_m(F)$ матриц размера $m \times m$ над F удовлетворяют одним и тем же полиномиальным тождествам. В частности, для $m \geq 2$ из неравенства $\text{char}(R) \neq 2$ вытекает противоречивая цепочка отношений

$$0 = [e_{21}, e_{12}] [[e_{21}, e_{11}], [e_{21}, e_{12}]]_k = (-2)^k e_{21} \neq 0.$$

Заметим, что те же рассуждения приводят к противоречию и в случае, когда $\alpha = 0$ и $\delta = ad(b')$, где $b' = \alpha^{-1}q$ и d не является внутренним дифференцированием кольца U (мы опускаем доказательство для краткости).

Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. В этом случае $\delta = \gamma d + ad(p)$, где $\gamma = -\alpha\beta^{-1} \neq 0$ и $ad(p)$ – внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $p = \beta^{-1}q$. Вновь обращаясь к случаю 1, мы можем считать, что d не

является внутренним дифференцированием кольца U . Воспользовавшись еще раз тождеством (4) и теоремой Харченко, мы видим, что кольцо U удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & [a[x_1, x_2] + [y_1, x_2] + [x_1, y_2], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] \\ & - [x_1, x_2] [c[x_1, x_2] + \gamma[y_1, x_2] + \gamma[x_1, y_2] + [b, [x_1, x_2]], [x_1, x_2]]_k. \end{aligned}$$

В частности, U удовлетворяет смешанным компонентам

$$[a[x_1, x_2] + [y_1, x_2], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2] [(b+c)[x_1, x_2] + [x_1, x_2](-b), [x_1, x_2]]_k, \quad (5)$$

$$[[y_1, x_2], [x_1, x_2]]_k [x_1, x_2] - [x_1, x_2] [\gamma[y_1, x_2], [x_1, x_2]]_k. \quad (6)$$

Поскольку в рассматриваемом случае R является PI-кольцом, существуют целое $t \geq 1$ и поле K , для которых кольцо R и матричное кольцо $M_t(K)$ удовлетворяют одним и тем же тождествам. Таким образом, кольцо $M_t(K)$ удовлетворяет тождествам (5) и (6). Применяя (6) к $y_1 = e_{11}$, $x_2 = e_{12}$ и $x_1 = e_{21}$, мы получаем $(1 + \gamma)2^k e_{12} = 0$, т.е. $\gamma = -1$ (это проверяется вычислениями). Предположим, что $t \geq 3$. Выбирая индекс $j \neq 1, 2$ и применяя (6) к $y_1 = e_{t2}$, $x_2 = e_{21}$ и $x_1 = e_{12}$, приходим к противоречивому равенству $e_{j1} = 0$. Значит, $t \leq 2$ и, следовательно, кольцо R удовлетворяет тождеству s_4 . Таким образом, из (5) и леммы 3 вытекает, что $a, b, c \in C$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, U – кольцо частных Утуми кольца R , C – расширенный центр-роид кольца R и L – нецентральный идеал Ли в R . Если F и G – обобщенные дифференцирования кольца R и $k \geq 1$ – фиксированное целое число, для которых $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ при всех $x \in L$, то выполнено одно из следующих условий:

- 1) либо существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = xa$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ при всех $x \in R$,
- 2) либо кольцо R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и справедливо одно из следующих утверждений:
 - (а) существуют $a, b, c, q \in U$, удовлетворяющие условию $a - b + c - q \in C$, для которых $F(x) = ax + xb$ и $G(x) = cx + xq$ при всех $x \in R$;
 - (б) существуют элементы $a, b, c \in U$ и дифференцирование d кольца U , для которых $F(x) = ax + d(x)$ и $G(x) = bx + xc - d(x)$ при всех $x \in R$, причем $a + b - c \in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку характеристика кольца R не равна 2 и идеал L не централен в R , найдется ненулевой двусторонний идеал I кольца R , для которого $0 \neq [I, R] \subseteq L$ (см. с. 4, 5 в [20], лемму 2 и предложение 1 в [21], а также теорему 4 в [22]). Тем более, $[I, I] \subseteq L$. Значит, $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ для всех $x \in [I, I]$, и применение предложения 1 завершает доказательство.

4. Смежные вопросы. У теоремы 2 есть следствия, связанные с гиперкоммутирующими и гиперцентрализующими отображениями первичных колец (см. определения во введении). Как и выше, пусть R обозначает первичное кольцо, а $Z(R)$ –

центр этого кольца. Сначала заметим, что в случае характеристики, не равной 2, основной результат статьи [9] можно вывести из теоремы 2 следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, U – кольцо частных Утуми кольца R , C – расширенный центроид кольца R и L – нецентральный идеал Ли кольца R . Если F – обобщенное дифференцирование кольца R и $k \geq 1$ – фиксированное целое число, для которого $[F(x), x]_k = 0$ при всех $x \in L$, то R удовлетворяет стандартному тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = ax + xa + \alpha x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $F = G$ доказываемое утверждение сразу вытекает из теоремы 2. Заметим, что в этом случае ожидаемое отношение $F(x) = \alpha x$, где $\alpha \in C$, является частным случаем, соответствующим условию $a \in C$.

В заключение мы рассмотрим частный случай теоремы 2, в котором $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ для любого $x \in R$. Докажем, что в этом случае есть только одна возможность – всегда выполняется условие 1 из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть R – некоммутативное первичное кольцо характеристики, отличной от 2, U – кольцо частных Утуми кольца R и C – расширенный центроид кольца R . Если F и G – обобщенные дифференцирования кольца R и $k \geq 1$ – фиксированное целое, для которого $[F(x), x]_k x - x[G(x), x]_k = 0$ при всех $x \in R$, то существуют $a \in U$ и $\alpha \in C$, для которых $F(x) = ax$ и $G(x) = (a + \alpha)x$ при всех $x \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1 и теореме 2 можно считать, что кольцо R удовлетворяет тождеству $s_4(x_1, \dots, x_4)$ и

- 1) либо существуют элементы $a, b, c, q \in U$, для которых $F(x) = ax + xb$ и $G(x) = cx + xq$, причем $a - b + c - q \in C$,
- 2) либо существуют элементы $a, b, c \in U$ и дифференцирование d кольца U , для которых $F(x) = ax + d(x)$ и $G(x) = bx + xc - d(x)$ при всех $x \in R$, причем $a + b - c \in C$.

Поскольку R является PI-кольцом, его кольцо частных Утуми U представляет собой конечномерную простую центральную алгебру, и мы можем рассмотреть кольцо $U = M_l(C)$ матриц размера $l \times l$ над расширенным центроидом C . Кроме того, кольца R и U удовлетворяют одним и тем же обобщенным дифференциальным тождествам и полиномиальным тождествам.

Возможны два случая. В первом случае кольцо U удовлетворяет обоим тождествам $[aX + Xb, X]_k X - X[cX + Xq, X]_k$ и $s_4(x_1, \dots, x_4)$. В этом случае $l \leq 2$ и можно считать, что $U = M_2(C)$, поскольку мы предположили, что кольцо U некоммутативно. Для $X = e_{11}$ получаем

$$[ae_{11} + e_{11}b, e_{11}]_k e_{11} - e_{11}[ce_{11} + e_{11}q, e_{11}]_k = 0. \quad (7)$$

Умножая (7) слева на e_{22} , мы видим, что $e_{22}ae_{11} = 0$. Рассматривая тождество с $X = e_{22}$ и умножая слева на e_{11} , мы получаем $e_{11}ae_{22} = 0$. Таким образом, a – диагональная матрица в $M_2(C)$.

С другой стороны, умножая равенство (7) справа на e_{22} , мы получаем $e_{11}qe_{22} = 0$, $e_{22}qe_{11} = 0$. Значит, матрица q тоже диагональна в $M_2(C)$.

Рассмотрим теперь внутренний автоморфизм $\chi(x) = (1 - e_{21})x(1 + e_{21})$ кольца $M_p(F)$ для любых $i \neq j$. Поскольку

$$[\chi(a)x + x\chi(b), x]x - x[\chi(c)x + x\chi(q), x]$$

– тождество для $M_2(C)$, те же рассуждения, что и выше, позволяют заключить, что обе матрицы $\chi(a)$ и $\chi(q)$ диагональны, а это означает, что матрицы

$$\begin{aligned}(1 - e_{21})a(1 + e_{21}) &= a - e_{21}a + ae_{21} - e_{21}ae_{21} = a + (a_{22} - a_{11})e_{21}, \\ (1 - e_{21})q(1 + e_{21}) &= q - e_{21}q + qe_{21} - e_{21}qe_{21} = q + (q_{22} - q_{11})e_{ji}\end{aligned}$$

тоже диагональны, откуда $a_{22} = a_{11}$ и $q_{22} = q_{11}$, т.е. матрицы a и q являются центральными элементами кольца $M_2(C)$. Таким образом, имеем $F(x) = x(a + b)$ и $G(x) = (c + q)x$, где $c + q = (a + b) + \alpha$ для некоторого $\alpha \in C$, что и требовалось.

Во втором случае кольцо частных U удовлетворяет тождеству

$$[ax + d(x), x]_k x - x[ax + bx + xc - d(x), x]_k,$$

и можно считать, что дифференцирование d не является внутренним (в противном случае доказывать нечего – достаточно сослаться на предыдущий случай). По теореме Харченко кольцо U удовлетворяет тождеству

$$[ax + y, x]_k x - x[ax + bx + xc - y, x]_k$$

и, в частности, смешанной компоненте $[y, x]_k x - x[-y, x]_k$. Но тогда при $x = e_{22}$ и $y = e_{12}$ мы получаем $e_{12} = 0$, т.е. приходим к противоречию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T.-K. Lee, “Generalized derivations of left faithful rings”, *Comm. Algebra*, **27**:8 (1999), 4057–4073.
- [2] B. Hvala, “Generalized derivations in rings”, *Comm. Algebra*, **26**:4 (1998), 1147–1166.
- [3] E. C. Posner, “Derivations in prime rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 1093–1100.
- [4] W. S. Martindale III, “Prime rings satisfying a generalized polynomial identity”, *Algebra*, **12**:4 (1969), 576–584.
- [5] M. Brešar, “Commuting maps: a survey”, *Taiwanese J. Math.*, **8**:3 (2004), 361–397.
- [6] C. Lanski, “Differential identities, Lie ideals, and Posner’s theorems”, *Pacific J. Math.*, **134**:2 (1988), 275–297.
- [7] M. Brešar, C. R. Miers, “Commuting maps on Lie ideals”, *Comm. Algebra*, **23**:14 (1995), 5539–5553.
- [8] C. Lanski, “An Engel condition with derivation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:3 (1993), 731–734.
- [9] N. Argaç, L. Carini, V. De Filippis, “An Engel condition with generalized derivations on Lie ideals”, *Taiwanese J. Math.*, **12**:2 (2008), 419–433.
- [10] V. K. Kharchenko, “Differential identities of prime rings **Нужно русское название!!!!**”, *Алгебра и логика*, **17**:2 (1978), 220–238.
- [11] K. I. Beidar, W. S. Martindale III, A. V. Mikhalev, *Rings with Generalized Identities*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **196**, Marcel Dekker, New York, NY, 1996.
- [12] T. K. Lee, “Semiprime rings with differential identities”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **20**:1 (1992), 27–38.

- [13] К.И. Бейдар, “Кольца с обобщенными тождествами. II”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1978, № 4, 66–73.
- [14] C.-L. Chuang, “GPIs having coefficients in Utumi quotient rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103**:3 (1988), 723–728.
- [15] J. Bergen, I. N. Herstein, J. W. Kerr, “Lie ideals and derivations of prime rings”, *J. Algebra*, **71**:1 (1981), 259–267.
- [16] T. S. Erickson, W. S. Martindale III, J. M. Osborn, “Prime nonassociative algebras”, *Pacific J. Math.*, **60**:1 (1975), 49–63.
- [17] W. S. Martindale III, “Prime rings satisfying a generalized polynomial identity”, *J. Algebra*, **12**:4 (1969), 576–584.
- [18] C. Faith, Y. Utumi, “On a new proof of Litoff’s theorem”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **14**:3–4 (1963), 369–371.
- [19] T.-L. Wong, “Derivations with power-central values on multilinear polynomials”, *Algebra Colloq.*, **3**:4 (1996), 369–378.
- [20] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1969.
- [21] O. M. Di Vincenzo, “On the n th centralizer of a Lie ideal”, *Boll. Un. Mat. Ital. A* (7), **3**:1 (1989), 77–85.
- [22] C. Lanski, S. Montgomery, “Lie structure of prime rings of characteristic 2”, *Pacific J. Math.*, **42**:1 (1972), 117–136.

В. де Филиппис

Университет Мессины, Италия

E-mail: defilippis@unime.it

Поступило

11.05.2010

Ф. Рания

Университет Мессины, Италия

E-mail: rania@dipmat.unime.it