Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Анвар, Д. Печарич, О логарифмической выпуклости разностей смешанных симметрических средних, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 811–821

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5075>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:47:22

О логарифмической выпуклости разностей смешанных симметрических средних

М. Анвар, Дж. Печарич

Симич недавно доказал логарифмическую выпуклость разностей степенных средних. В данной работе получено некоторое обобщение этого результата. Именно, доказано, что логарифмическая выпуклость также имеет место для разностей смешанных симметрических средних.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Через $\mathbb{R}_+$ обозначим множество всех положительных действительных чисел, а через $\mathbb{R}_+^n$ обозначим их n -произведения. Степенные средние порядка n определяются как

$$M_r(\mathbf{x}) = M_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \right)^{1/r}, & r \neq 0; \\ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}, & r = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Также известны приблизительно степенные средние. Если $r < s$, то

$$M_r(\mathbf{x}) \leq M_s(\mathbf{x}). \quad (2)$$

В случаях $r = -1$, $r = 0$ и $r = 1$ имеем гармонические, геометрические и арифметические средние $H(\mathbf{x})$, $G(\mathbf{x})$ и $A(\mathbf{x})$ соответственно. Выполняется следующее неравенство:

$$H(\mathbf{x}) \leq G(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Хара, Учияма и Такахашаи [1] недавно рассмотрели смешанные средние

$$u(A, G, \mathbf{x}; k) = \frac{1}{C_k^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (x_{i_1} \cdots x_{i_k})^{1/k}, \quad (4)$$

$$u(G, A, \mathbf{x}; k) = \left(\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{x_{i_1} + \dots + x_{i_k}}{k} \right)^{1/C_k^n}, \quad (5)$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Министерства науки, образования и спорта Хорватии (грант 117-1170889-0888).

$$u(G, H, \mathbf{x}; k) = \left(\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k} \frac{k}{(1/x_{i_1} + \dots + 1/x_{i_k})} \right)^{1/C_k^n}, \quad (6)$$

$$u(H, G, \mathbf{x}; k) = \left(\frac{1}{C_k^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{1}{(x_{i_1} \dots x_{i_k})^{1/k}} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Они доказали, что

$$A_n = u(A, G, \mathbf{x}; 1) \geq u(A, G, \mathbf{x}; 2) \geq \dots \geq u(A, G, \mathbf{x}; n-1) \geq u(A, G, \mathbf{x}; n) = G_n, \quad (8)$$

$$G_n = u(G, A, \mathbf{x}; 1) \leq u(G, A, \mathbf{x}; 2) \leq \dots \leq u(G, A, \mathbf{x}; n-1) \leq u(G, A, \mathbf{x}; n) = A_n \quad (9)$$

и что имеют место равенства при $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Также были получены результаты, аналогичные (6) и (7). Фактически, они предложили общий метод получения неравенств такого типа, откуда следует, что при $s \leq t$

$$\begin{aligned} M_t &= u(M_t, M_s, \mathbf{x}; 1) \geq u(M_t, M_s, \mathbf{x}; 2) \geq \dots \\ &\geq u(M_t, M_s, \mathbf{x}; n-1) \geq u(M_t, M_s, \mathbf{x}; 1) = M_s, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M_s &= u(M_s, M_t, \mathbf{x}; 1) \leq u(M_s, M_t, \mathbf{x}; 2) \leq \dots \\ &\leq u(M_s, M_t, \mathbf{x}; n-1) \leq u(M_s, M_t, \mathbf{x}; 1) = M_t. \end{aligned} \quad (11)$$

Там, где были A и G , например, в формулах (4) и (5), мы теперь имеем M_t и M_s , т.е.

$$u(M_s, M_t, \mathbf{x}; k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{C_k^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} M_t(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})^s \right)^{1/s}, & s \neq 0; \\ \left(\prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} M_t(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right)^{1/C_k^n}, & s = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Заметим, что неравенства (8)–(11) являются простым следствием уточненного неравенства Дженсена [2] (см. также [3; с. 96]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть f – J -выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве I в некотором произвольном действительном линейном пространстве, и пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Тогда

$$f_{k,n} \leq f_{m,n} \quad \text{при} \quad n \geq k > m \geq 1, \quad (13)$$

т.е.

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = f_{n,n} \leq \dots \leq f_{k,n} \leq \dots \leq f_{1,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (14)$$

где

$$f_{k,n} = \frac{1}{C_k^n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f\left(\frac{1}{k}(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})\right). \quad (15)$$

Фактически, Митринович и Печарич [4] применили эту теорему для доказательства обобщенных формул (10) и (11), где вместо степенных средних стоят квазиарифметические средние.

В данной работе рассматривается логарифмическая выпуклость разности смешанных симметрических степенных средних (12), откуда следуют уточненные неравенства (10) и (11) и их обращения. Также получены некоторые смежные результаты.

2. Логарифмическая выпуклость симметрических средних.

ЛЕММА 2.1. Рассмотрим функцию

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \frac{x^s}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log x, & s = 0, \\ x \log x, & s = 1. \end{cases} \quad (16)$$

Имеет место равенство $\varphi_s'' = x^{s-2}$, т.е. φ_s – выпуклая функция при $x > 0$.

ЛЕММА 2.2. Рассмотрим функцию

$$\phi_t(x) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{tx}, & t \neq 0, \\ \frac{1}{2} x^2, & t = 0. \end{cases}$$

Имеет место равенство $\phi_t''(x) = e^{tx}$, т.е. $\phi_t(x)$ – выпуклая функция.

ТЕОРЕМА 2.3. (i) Пусть условия теоремы 1.1 выполняются для некоторой непрерывной функции $f = \varphi_s$ при $s \in J$, где J – некоторый интервал в $\mathbb{R}$. Определим

$$\Lambda_t = (\varphi_t)_{m,n} - (\varphi_t)_{k,n}, \quad (17)$$

где $(\varphi_s)_{k,n}$ обозначает выражение (15) с φ_s вместо f . Тогда

1) при всех $s, t \in J$ имеем

$$\Lambda_{(s+t)/2}^2 \leq \Lambda_s \Lambda_t, \quad (18)$$

т.е. функция Λ_t логарифмически выпуклая в смысле Джессена;

2) функция Λ_t также логарифмически выпуклая, т.е. при $r < s < t$, $r, s, t \in J$, имеем

$$(\Lambda_s)^{t-r} \leq (\Lambda_r)^{t-s} (\Lambda_t)^{s-r}. \quad (19)$$

(ii) Результаты пункта (i) также выполняются для функции $\varphi_s = \phi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) 1) Рассмотрим функцию, определенную равенством

$$f(x) = u^2 \varphi_s(x) + 2uw \varphi_r(x) + w^2 \varphi_t(x),$$

где $r = (s+t)/2$, $u, w \in \mathbb{R}$ и φ_s определена в формуле (16). Имеем

$$f''(x) = u^2 x^{s-2} + 2uw x^{r-2} + w^2 x^{t-2} = (ux^{s/2-1} + wx^{t/2-1})^2 \geq 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, f – выпуклая функция при $x > 0$. Из неравенства (13) следует, что

$$u^2 (\varphi_s)_{k,n} + 2uw (\varphi_r)_{k,n} + w^2 (\varphi_t)_{k,n} \leq u^2 (\varphi_s)_{m,n} + 2uw (\varphi_r)_{m,n} + w^2 (\varphi_t)_{m,n},$$

т.е.

$$u^2\Lambda_s + 2uw\Lambda_r + w^2\Lambda_t \geq 0.$$

Следовательно, получаем неравенство (18).

2) Поскольку Λ_t – непрерывная функция, она также является логарифмически выпуклой. Следовательно, неравенство (19) также выполняется.

(ii) Доказательство аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Для Λ_t , определенной в (17), в условиях теоремы 2.3 имеем

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2}(u^2(M_2, A, \mathbf{x}; m) - u^2(M_2, A, \mathbf{x}; k))^3(u^3(M_3, A, \mathbf{x}; m) - u^3(M_3, A, \mathbf{x}; k))^{-2} \\ & \leq \log\left(\frac{u(G, A, \mathbf{x}; k)}{u(G, A, \mathbf{x}; m)}\right) \\ & \leq \frac{1}{2}(u^{-1}(H, A, \mathbf{x}; m) - u^{-1}(H, A, \mathbf{x}; k))^{2/3}(u^2(M_2, A, \mathbf{x}; m) - u^2(M_2, A, \mathbf{x}; k))^{1/3}. \end{aligned} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $r = -1$, $t = 0$, $s = 2$ и $r = 0$, $t = 2$, $s = 3$ в (19), получим (20).

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для Λ_t , определенной в (17), в условиях теоремы 2.3 имеем

$$\begin{aligned} & \frac{9}{16}(u^2(M_2, G, \mathbf{x}; m) - u^2(M_2, G, \mathbf{x}; k))^2(u^3(M_3, G, \mathbf{x}; m) - u^3(M_3, G, \mathbf{x}; k))^{-1} \\ & \leq u(A, G, \mathbf{x}; m) - u(A, G, \mathbf{x}; k) \\ & \leq \frac{1}{4^{2/3}}(u^{-1}(H, G, \mathbf{x}; m) - u^{-1}(H, G, \mathbf{x}; k))^{1/3}(u^2(M_2, G, \mathbf{x}; m) - u^2(M_2, G, \mathbf{x}; k))^{2/3}. \end{aligned} \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $r = -1$, $t = 1$, $s = 2$ и $r = 1$, $t = 2$, $s = 3$ в теореме 2.3 (ii), получим (21).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма о логарифмически выпуклой функции [5]:

ЛЕММА 2.6. Пусть f – логарифмически выпуклая функция; если $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, то выполняется следующее неравенство:

$$\left(\frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right)^{1/(x_2-x_1)} \leq \left(\frac{f(y_2)}{f(y_1)}\right)^{1/(y_2-y_1)}. \quad (22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $r, s, t \in \mathbb{R}$ при $t \neq r \neq s$ и $s \neq 0$, тогда определим новые средние $M_{t,r}^{[s]}$ как

$$M_{t,r}^{[s]} \left[\frac{r(r-s)}{t(t-s)} \left(\frac{u^s(M_t, M_s, \mathbf{x}; m) - u^s(M_t, M_s, \mathbf{x}; k)}{u^s(M_r, M_s, \mathbf{x}; m) - u^s(M_r, M_s, \mathbf{x}; k)} \right) \right]^{1/(t-r)} \quad (23)$$

при $n \geq k > m \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. В предыдущем определении можно рассматривать другие случаи как предельные.

В следующем утверждении мы докажем монотонность этого нового среднего.

ТЕОРЕМА 2.9. Пусть $t, r, u, v \in \mathbb{R}$ такие, что $t \leq v$, $r \leq u$. Тогда имеем

$$M_{t,r}^{[s]} \leq M_{v,u}^{[s]}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию Λ_t , определенную в теореме 2.3. Так как Λ_t – логарифмически выпуклая функция в силу теоремы 2.3, то в силу леммы 2.6 для $t, r, u, v \in \mathbb{R}$ таких, что $t \leq v$, $r \leq u$, $t \neq r$, $v \neq u$, получим

$$\left(\frac{\Lambda_t}{\Lambda_r} \right)^{1/(t-r)} \leq \left(\frac{\Lambda_v}{\Lambda_u} \right)^{1/(v-u)}. \quad (25)$$

При $s > 0$, подставляя в (17) $g = f^s$, $t = t/s$, $r = r/s$, $u = u/s$, $v = v/s \in \mathbb{R}$ такие, что $t/s \leq v/s$, $r/s \leq u/s$, $t \neq r$, $v \neq u$, получим

$$\Lambda_{t,s} = \begin{cases} \frac{s^2}{t(t-s)} (u^s(M_t, M_s, \mathbf{x}, m) - u^s(M_t, M_s, \mathbf{x}, k)), & t \neq 0, s, \\ \log \left(\frac{u(M_0, M_s^s, \mathbf{x}, k)}{u(M_0, M_s^s, \mathbf{x}, m)} \right), & t = 0, \\ \frac{1}{C_m^n} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_m \leq n} M(m) \log M(m) - \frac{1}{C_k^n} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} M(k) \log M(k), & t = s, \end{cases} \quad (26)$$

где $M(m) = M_s^s(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$, и неравенство (25) принимает вид

$$\left(\frac{\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{r,s}} \right)^{s/(t-r)} \leq \left(\frac{\Lambda_{v,s}}{\Lambda_{u,s}} \right)^{s/(v-u)}. \quad (27)$$

Из (27), возводя это неравенство в степень $1/s$ при $s > 0$, получим искомый результат.

Теперь, при $s < 0$, подставляя в (17) $g = f^s$, $t = t/s$, $r = r/s$, $u = u/s$, $v = v/s \in \mathbb{R}$ такие, что $v/s \leq t/s$, $u/s \leq r/s$, $t \neq r$, $v \neq u$, получим (26).

Неравенство (25) принимает вид

$$\left(\frac{\Lambda_{v,s}}{\Lambda_{u,s}} \right)^{s/(v-u)} \leq \left(\frac{\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{r,s}} \right)^{s/(t-r)}. \quad (28)$$

Теперь $s < 0$, и из (28), возводя это неравенство в степень $-1/s$, получим

$$\left(\frac{\Lambda_{t,s}}{\Lambda_{r,s}} \right)^{1/(t-r)} \leq \left(\frac{\Lambda_{v,s}}{\Lambda_{u,s}} \right)^{1/(v-u)}. \quad (29)$$

Из (29) следует искомый результат. Доказательство теоремы закончено.

Вернемся к неравенству (13) при $m = 1$, т.е.

$$f_{k,n} \leq f_{1,n}.$$

Поповичу [6] (см. также [3; с.171]) уточнил это неравенство, т.е. доказал, что выполняется следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $n \geq 3$ и k – положительные целые такие, что $2 \leq k \leq n-1$. Пусть f – непрерывная функция на некотором интервале $I \subseteq \mathbb{R}$. Тогда f – выпуклая функция тогда и только тогда, когда

$$f_{k,n} \leq \frac{n-k}{n-1} f_{1,n} + \frac{k-1}{n-1} f_{n,n}, \quad (30)$$

где $f_{k,n}$ – функция, определенная в (15).

Мы также рассмотрим логарифмическую выпуклость функции (30), т.е. докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.11. (i) Пусть условия теоремы 2.10 выполнены для непрерывной функции $f = \varphi_s$ при $s \in J$, где J – некоторый интервал в $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$\Lambda_t = \frac{n-k}{n-1} (\varphi_s)_{1,n} + \frac{k-1}{n-1} (\varphi_s)_{n,n} - (\varphi_s)_{k,n}, \quad (31)$$

где $(\varphi_s)_{k,n}$ обозначает выражение (15) с φ_s вместо f . Тогда

1) для всех $s, t \in J$ имеем

$$\Lambda_{(s+t)/2}^2 \leq \Lambda_s \Lambda_t, \quad (32)$$

т.е. функция Λ_t логарифмически выпуклая в смысле Джессена;

2) Λ_t также логарифмически выпуклая, т.е. при $r < s < t$, $r, s, t \in J$, имеем

$$(\Lambda_s)^{t-r} \leq (\Lambda_r)^{t-s} (\Lambda_t)^{s-r}. \quad (33)$$

(ii) Результаты пункта (i) также выполняются для функции $\varphi_s = \phi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) 1) Рассмотрим функцию

$$f(x) = u^2 \varphi_s(x) + 2uw \varphi_r(x) + w^2 \varphi_t(x),$$

где $r = (s+t)/2$, $u, w \in \mathbb{R}$ и φ_s определена в формуле (16). Имеем

$$f''(x) = u^2 x^{s-2} + 2uw x^{r-2} + w^2 x^{t-2} = (ux^{s/2-1} + wx^{t/2-1})^2 \geq 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, функция f выпуклая при $x > 0$. Из неравенства (30) следует, что

$$\begin{aligned} & u^2 (\varphi_s)_{k,n} + 2uw (\varphi_r)_{k,n} + w^2 (\varphi_t)_{k,n} \\ & \leq u^2 \left(\frac{n-k}{n-1} (\varphi_s)_{1,n} + \frac{k-1}{n-1} (\varphi_s)_{n,n} \right) + 2uw \left(\frac{n-k}{n-1} (\varphi_r)_{1,n} + \frac{k-1}{n-1} (\varphi_r)_{n,n} \right) \\ & \quad + w^2 \left(\frac{n-k}{n-1} (\varphi_t)_{1,n} + \frac{k-1}{n-1} (\varphi_t)_{n,n} \right), \end{aligned}$$

т.е.

$$u^2 \Lambda_s + 2uw \Lambda_r + w^2 \Lambda_t \geq 0,$$

и, следовательно, получим (32).

2) Так как Λ_s – непрерывная функция, она также является логарифмически выпуклой. Следовательно, неравенство (33) также выполняется.

(ii) Доказательство аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Для Λ_t , определенной в (31), в условиях теоремы 2.11 имеем

$$\begin{aligned} & \frac{9}{2} \left(\frac{n-k}{n-1} M_2^2(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} A^2(\mathbf{x}) - u^2(M_2, A, \mathbf{x}; k) \right)^3 \\ & \quad \times \left(\frac{n-k}{n-1} M_3^3(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} A^3(\mathbf{x}) - u^3(M_3, A, \mathbf{x}; k) \right)^{-2} \\ & \leq \log \left(\frac{u(G, A, \mathbf{x}; k)}{G^{(n-k)/(n-1)}(\mathbf{x}) A^{(k-1)/(n-1)}(\mathbf{x})} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n-k}{n-1} H^{-1}(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} A^{-1}(\mathbf{x}) - u^{-1}(H, A, \mathbf{x}; k) \right)^{2/3} \\ & \quad \times \left(\frac{n-k}{n-1} M_2^2(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} A^2(\mathbf{x}) - u^2(M_2, A, \mathbf{x}; k) \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $r = -1$, $t = 0$, $s = 2$ и $r = 0$, $t = 2$, $s = 3$ в (33), получим (34).

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Для Λ_t , определенной в (31), в условиях теоремы 2.11 имеем

$$\begin{aligned} & \frac{9}{16} \left(\frac{n-k}{n-1} M_3^3(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} G^3(\mathbf{x}) - u^3(M_3, G, \mathbf{x}; k) \right)^{-1} \\ & \quad \times \left(\frac{n-k}{n-1} M_2^2(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} G^2(\mathbf{x}) - u^2(M_2, G, \mathbf{x}; k) \right)^2 \\ & \leq \frac{n-k}{n-1} A(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} G(\mathbf{x}) - u(A, G, \mathbf{x}; k) \\ & \leq \frac{1}{4^{2/3}} \left(\frac{n-k}{n-1} M^{-1}(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} G^{-1}(\mathbf{x}) - u^{-1}(H, G, \mathbf{x}; k) \right)^{1/3} \\ & \quad \times \left(\frac{n-k}{n-1} M_2^2(\mathbf{x}) + \frac{k-1}{n-1} G^2(\mathbf{x}) - u^2(M_2, G, \mathbf{x}; k) \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $r = -1$, $t = 1$, $s = 2$ и $r = 1$, $t = 2$, $s = 3$ в теореме 2.11 (ii), получим (35).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Фактически, подобные утверждения можно сформулировать и в весовом случае. Именно, Печарич [7] рассмотрел выражение

$$f_{k,n} = \frac{1}{C_{k-1}^{m-1}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (p_{i_1} + \dots + p_{i_k}) f \left(\frac{p_{i_1} x_{i_1} + \dots + p_{i_k} x_{i_k}}{p_{i_1} + \dots + p_{i_k}} \right), \quad (36)$$

где f – выпуклая функция на I , $p_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, и теорема 1.1 по-прежнему верна. Итак, можно сформулировать теорему 2.3 для функции f , определенной в (36). При $m = 1$ и $k = n$ такие утверждения представляют собой дальнейшее развитие результатов, полученных Симичем [8]. А именно, Симич получил такой результат только для функции φ_s . Аналогично, можно привести весовой вариант теорем 2.10, 2.11. А именно, Васич и Станкович ([9], см. также [3; с. 173]; частный случай этого утверждения рассмотрен в [10], [11]) доказали, что неравенство (30) также выполняется для $f_{k,n}$, определенной в (36).

3. Некоторые смежные результаты. Имеют место следующие утверждения [12], [13].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть f – J -выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве I в некотором произвольном действительном линейном пространстве, и пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Тогда

$$\bar{f}_{k,n} \leq \bar{f}_{m,n} \quad \text{при} \quad k > m \geq 1, \quad (37)$$

т.е.

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \bar{f}_{\infty,n} \leq \dots \leq \bar{f}_{k,n} \leq \dots \leq \bar{f}_{1,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (38)$$

где равенство

$$\bar{f}_{k,n} = \frac{1}{C_k^{m+k-1}} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} f\left(\frac{1}{k}(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})\right) \quad (39)$$

выполняется при $1 \leq m \leq k$. Если f – строго полувывпуклая функция, то равенство в (37) достигается тогда и только тогда, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

ТЕОРЕМА 3.2. (i) Пусть условия теоремы 3.1 выполняются для непрерывной функции $f = \varphi_s$ при $s \in J$, где J – некоторый интервал в $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$\Lambda_t = (\bar{\varphi}_t)_{m,n} - (\bar{\varphi}_t)_{k,n}, \quad (40)$$

где $(\bar{\varphi}_s)_{k,n}$ обозначает выражение (39) с φ_s вместо f и $k = 1, 2, \dots, \infty$. Тогда

1) для всех $s, t \in J$ имеем

$$\Lambda_{(s+t)/2}^2 \leq \Lambda_s \Lambda_t \quad (41)$$

т.е. функция Λ_t – логарифмическая выпуклая в смысле Джэнсена.

2) Λ_t также логарифмически выпуклая, т.е. при $r < s < t$, $r, s, t \in J$, имеем

$$(\Lambda_s)^{t-r} \leq (\Lambda_r)^{t-s} (\Lambda_t)^{s-r}. \quad (42)$$

(ii) Результаты пункта (i) также выполняются для функции $\varphi_s = \phi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) 1) Рассмотрим функцию, определенную выражением

$$f(x) = u^2 \varphi_s(x) + 2uw \varphi_r(x) + w^2 \varphi_t(x),$$

где $r = (s+t)/2$, $u, w \in \mathbb{R}$ и φ_s определена в формуле (16). Имеем

$$f''(x) = u^2 x^{s-2} + 2uw x^{r-2} + w^2 x^{t-2} = (ux^{s/2-1} + wx^{t/2-1})^2 \geq 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, функция f выпукла при $x > 0$. Из неравенства (37) следует, что

$$u^2 (\bar{\varphi}_s)_{k,n} + 2uw (\bar{\varphi}_r)_{k,n} + w^2 (\bar{\varphi}_t)_{k,n} \leq u^2 (\bar{\varphi}_s)_{m,n} + 2uw (\bar{\varphi}_r)_{m,n} + w^2 (\bar{\varphi}_t)_{m,n}$$

т.е.

$$u^2 \Lambda_s + 2uw \Lambda_r + w^2 \Lambda_t \geq 0$$

и, следовательно, получим (41).

2) Так как Λ_s – непрерывная функция, она также является логарифмически выпуклой. Следовательно, неравенство (42) также выполняется.

(ii) Доказательство аналогично.

Следующий результат принадлежит Печаричу и Драгомиру [14] (см. также [3; с. 90]).

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть M – действительное линейное пространство, U – непустое выпуклое множество в M и $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}_{k,n} \leq \tilde{f}_{m,n} \quad (43)$$

где $m \leq k$ и

$$\tilde{f}_{k,n} = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k \in I} f\left(\frac{1}{k}(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k})\right), \quad (44)$$

$I = \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i \in U$, т.е.

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \tilde{f}_{\infty,n} \leq \dots \leq \tilde{f}_{k,n} \leq \dots \leq \tilde{f}_{1,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (45)$$

ТЕОРЕМА 3.4. (i) Пусть условия теоремы 3.3 выполнены для непрерывной функции $f = \varphi_s$ при $s \in J$, где J – некоторый интервал в пространстве $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$\Lambda_t = (\tilde{\varphi}_t)_{m,n} - (\tilde{\varphi}_t)_{k,n}, \quad (46)$$

где $(\tilde{\varphi}_s)_{k,n}$ обозначает выражение (44) с φ_s вместо f и $1 \leq m \leq k$, $k = 1, \dots, \infty$. Тогда

1) при всех $s, t \in J$ имеем

$$\Lambda_{(s+t)/2}^2 \leq \Lambda_s \Lambda_t \quad (47)$$

т.е. функция Λ_t логарифмическая выпуклая в смысле Джессена;

2) Λ_t также логарифмически выпуклая, т.е. при $r < s < t$, $r, s, t \in J$, имеем

$$(\Lambda_s)^{t-r} \leq (\Lambda_r)^{t-s} (\Lambda_t)^{s-r}. \quad (48)$$

(ii) Результаты пункта (i) также выполняются для функции $\varphi_s = \phi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3.2.

Имеет место следующий результат, полученный Раза [15] (см. также [3; с. 97]).

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, – выпуклая функция, σ – возрастающая функция на $[0, 1]$ такая, что $\int_0^1 d\sigma(t) = 1$, и $f: [0, 1] \rightarrow I$ – σ -интегрируемая функция на $[0, 1]$. Тогда для $k \geq m \geq 0$ имеем

$$\hat{f}_{k,n} \leq \hat{f}_{m,n} \quad \text{при } n \geq k > m \geq 1, \quad (49)$$

где

$$\hat{f}_{k,n} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \phi\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(x_i)\right) \prod_{i=1}^k dx_i. \quad (50)$$

ТЕОРЕМА 3.6. (i) Пусть условия теоремы 3.5 выполняются для непрерывной функции $f = \varphi_s$ при $s \in J$, где J – некоторый интервал в пространстве $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$\Lambda_t = (\widehat{\varphi}_t)_{m,n} - (\widehat{\varphi}_t)_{k,n}, \quad (51)$$

где $(\widehat{\varphi}_s)_{k,n}$ определена в формуле (49) с φ_s вместо f и $1 \leq m \leq k$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

1) при всех $s, t \in J$ имеем

$$\Lambda_{(s+t)/2}^2 \leq \Lambda_s \Lambda_t \quad (52)$$

т.е. функция Λ_t логарифмически выпуклая в смысле Джессена;

2) Λ_t также логарифмически выпуклая, т.е. при $r < s < t$, $r, s, t \in J$, имеем

$$(\Lambda_s)^{t-r} \leq (\Lambda_r)^{t-s} (\Lambda_t)^{s-r}. \quad (53)$$

(ii) Результаты пункта (i) также выполняются для функции $\varphi_s = \phi_s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству теоремы 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Следствия, аналогичные следствиям 2.4 и 2.5, можно получить как приложения всех результатов, представленных в данном пункте.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Фактически, теоремы 3.3 и 3.5 приведены в весовом варианте. Эти результаты можно использовать аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Hara, M. Uchiyama, S.-E. Takahashi, “A refinement of various mean inequalities”, *J. Inequal. Appl.*, **2**:4 (1998), 387–395.
- [2] J. E. Pečarić, V. Volenec, “Interpolation of the Jensen inequality with some applications”, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **197**:8-10 (1988), 463–467.
- [3] J. E. Pečarić, F. Proschan, Y. L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*, Math. Sci. Engrg., **187**, Academic Press, Boston, MA, 1992.
- [4] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, “Unified treatment of some inequalities for mixed means”, *Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II*, **197**:8-10 (1988), 391–397.
- [5] M. Anwar, J. Pečarić, “New means of Cauchy’s type”, *J. Inequal. Appl.*, **2008**, Article ID 163202.
- [6] T. Popoviciu, “Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes”, *An. Şti. Univ. “Al. I. Cuza” Iaşi Secţ. Ia Mat. (N.S.)*, **11B** (1965), 155–164.
- [7] J. E. Pečarić, “Remark on an inequality of S. Gabler”, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:1 (1994), 19–21.
- [8] S. Simic, “On logarithmic convexity for differences of power means”, *J. Inequal. Appl.*, **2007**, Article ID 37359.
- [9] P. M. Vasić, L. R. Stanković, “Some inequalities for convex functions”, *Math. Balkanica*, **6**:44 (1976), 281–288.
- [10] J. C. Burkill, “The concavity of discrepancies in inequalities of the means and of Hölder”, *J. London Math. Soc. (2)*, **7** (1974), 617–626.
- [11] V. J. Baston, “On some Hlawka-type inequalities of Burkill”, *J. London Math. Soc. (2)*, **12** (1976), 402–404.
- [12] J. Pečarić, D. Svrtan, “Unified approach to refinements of Jensen’s inequalities”, *Math. Inequal. Appl.*, **5**:1 (2002), 45–47.

- [13] J. Pečarić, D. Svrtan, “New refinements of the Jensen inequalities based on samples with repetitions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **222**:2 (1998), 365–373.
- [14] J. E. Pečarić, S. S. Dragomir, “A refinement of Jensen inequality and applications”, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, **34**:1 (1989), 15–19.
- [15] I. Raşa, “On the monotonicity of sequences of Bernstein–Schnabl operators”, *Anal. Numér. Théor. Approx.*, **17**:2 (1988), 185–187.

М. Анвар

Centre for Advanced Mathematics & Physics, National University
of Sciences and Technology, Пакистан

E-mail: matloob_t@yahoo.com

Поступило

12.04.2010

Дж. Печарич

University of Lahore, Пакистан,

University Of Zagreb, Хорватия

E-mail: pecaric@mahazu.hazu.hr