Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Горбачев, Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 346–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:06:54

УДК 517

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С НОСИТЕЛЕМ В ШАРЕ

Д. В. Горбачев

Рассмотрена n -мерная экстремальная задача П. Турана. В ней требуется найти величину $A_n(hB^n)$, равную максимальному нулевому коэффициенту Фурье $\hat{f}_0$ для периодических функций f с носителем в евклидовом шаре hB^n радиуса h и неотрицательными коэффициентами Фурье, $f(0) = 1$. Данная задача возникла в связи с приложениями к теории чисел. Величина $A_1([-h, h])$ исследовалась С. Б. Стечкиным. Для величины $A_n(hB^n)$ получено асимптотическое разложение при $h \rightarrow 0$. Главный член этого разложения определяется из решения n -мерной экстремальной задачи для целых функций экспоненциального типа.

Библиография: 7 названий.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}^n = [-1/2, 1/2]^n$ – n -мерный тор, $D \subset [-1, 1]^n$ – центрально-симметричное тело, $0 < h \leq 1/2$, $hD \subset \mathbb{T}^n$ – гомотет D ; xy – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{xx}$; $e(t) = \exp(2\pi it)$, $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e(-xy) dy$ – преобразование Фурье функции f , $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$ – свертка функций f и g ; χ_E – характеристическая функция множества E , $\text{vol}(E)$ – объем E .

Пусть $K^n(hD)$ – класс непрерывных четных функций $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих свойствами:

- 1) $f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu e(\nu x)$, где $\hat{f}_\nu = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e(-\nu x) dx$ – коэффициенты Фурье функции f ;
- 2) $\hat{f}_\nu \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n$;
- 3) $f(0) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu = 1$;
- 4) $\text{supp } f \subset hD$.

Рассмотрим величину

$$A_n(hD) = \sup_{f \in K^n(hD)} \hat{f}_0. \quad (1)$$

П. Тураном в связи с приложениями к теории чисел была поставлена задача оценки $A_1(h) = A_1([-h, h])$. С. Б. Стечкин показал [1], что $A_1(1/N) = 1/N$, $N = 2, 3, \dots$, откуда

$$A_1(h) = h + O(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00644, и Минобразования, грант № 97-0-1.4-78.

Асимптотически экстремальной функцией является периодизация функции

$$\varphi_h(x) = \max\left(1 - \frac{|x|}{h}, 0\right) = (\chi_{[-1/2, 1/2]} * \chi_{[-1/2, 1/2]})(h^{-1}x).$$

Многомерными вариантами задачи Турана занимался Н. Н. Андреев [2]. Он установил, что для куба $D = [-1, 1]^n$

$$A_n([-h, h]^n) = h^n + O(h^{n+1}), \quad h \rightarrow 0, \quad (2)$$

и ромба $D = O^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$

$$A_2(hO^2) = \frac{h^2}{2} + O(h^3), \quad h \rightarrow 0.$$

Асимптотически экстремальными функциями в обоих случаях являются периодизации свертки

$$\frac{(\chi_{\frac{1}{2}D} * \chi_{\frac{1}{2}D})(h^{-1}x)}{\text{vol}(\frac{1}{2}D)},$$

которые принадлежат $K^n(hD)$ в силу свойств свертки [3]: $\text{supp } \chi_E * \chi_E = 2E$, E – центрально-симметричное тело, и $\chi_E * \chi_E = \hat{\chi}_E^2$.

В данной работе рассматривается случай евклидова шара $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, $\text{vol}(B^n) = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ – его объем [3].

ТЕОРЕМА. *Для шара $D = B^n$*

$$A_n(hB^n) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2 + 1)} h^n + O(h^{n+2}), \quad h \rightarrow 0.$$

Асимптотически экстремальной функцией является периодизация свертки

$$\frac{(\chi_{\frac{1}{2}B^n} * \chi_{\frac{1}{2}B^n})(h^{-1}x)}{\text{vol}(\frac{1}{2}B^n)}.$$

Отметим, что во всех известных случаях главный член асимптотики $A_n(hD)$ равен $\text{vol}(\frac{1}{2}D)h^n$. Нахождение этого члена сводится к решению многомерной экстремальной задачи для целых функций экспоненциального типа. Сформулируем эту задачу.

Пусть $G^n(D)$ – класс непрерывных четных функций $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $g(y) = \int_D \hat{g}(x)e(yx) dx$;
- 2) $g(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = 1$.

Найти величину

$$M_n(D) = \sup_{g \in G^n(D)} g(0). \quad (3)$$

Из представления 1) вытекает, что g продолжается до целой функции экспоненциального $2\pi D^*$ -типа [3], где D^* – полярное множества D . Из теоремы о компактности [4, с. 126] следует, что верхняя грань в (3) достигается на некоторой экстремальной функции, которую обозначим g_D , т.е. $g_D \in G^n(D)$ и $g_D(0) = M_n(D)$.

Легко видеть, что функция

$$g(y) = \frac{\hat{\chi}_{\frac{1}{2}D}(y)^2}{\text{vol}(\frac{1}{2}D)} = \frac{1}{\text{vol}(\frac{1}{2}D)} \int_D (\chi_{\frac{1}{2}D} * \chi_{\frac{1}{2}D})(x) e(yx) dx$$

принадлежит классу $G^n(D)$. Для нее $g(0) = \text{vol}(\frac{1}{2}D)$, поэтому для величины $M_n(D)$ справедлива оценка снизу

$$M_n(D) \geq \text{vol}\left(\frac{1}{2}D\right). \quad (4)$$

Для куба, ромба и шара эта оценка оказывается правильной.

Справедливы следующие две леммы, из которых непосредственно вытекает основная теорема.

ЛЕММА 1. Для произвольных n и D

$$A_n(hD) = M_n(D)h^n + O(h^{n+2}), \quad h \rightarrow 0.$$

Асимптотически экстремальной является периодизация функции $\hat{g}_D(h^{-1}x)$.

Пусть $j_\alpha(t) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) t^{-\alpha} J_\alpha(t)$ – нормированная функция Бесселя [5, с. 11].

ЛЕММА 2. Для шара B^n

$$M_n(B^n) = \text{vol}\left(\frac{1}{2}B^n\right) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n \Gamma(n/2 + 1)}.$$

Экстремальная функция равна

$$g_{B^n}(y) = \frac{\hat{\chi}_{\frac{1}{2}B^n}(y)^2}{\text{vol}(\frac{1}{2}B^n)} = \text{vol}\left(\frac{1}{2}B^n\right) j_{n/2}(\pi|y|)^2.$$

Отметим, что из результата Н. Н. Андреева (2) вытекает, что $M_n([-1, 1]^n) = 1$. Следовательно, по лемме 1

$$A_n([-h, h]^n) = h^n + O(h^{n+2}), \quad h \rightarrow 0,$$

что несколько уточняет результаты С. Б. Стечкина и Н. Н. Андреева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $g \in G^n(D)$ и $g_h(y) = h^n g(hy)$. Тогда $\hat{g}_h(x) = \hat{g}(h^{-1}x)$ [3], $\text{supp } g_h \subset hD$ и $\hat{\hat{g}}_h = g_h$. Отсюда следует, что периодизация $\hat{g}_h$ равна

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{g}_h(x + \nu) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} g_h(\nu) e(\nu x) \quad (5)$$

и имеет свойства: $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная четная функция, $\text{supp } f \subset hD$, $\hat{f}_\nu = g_h(\nu) = h^n g(h\nu) \geq 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^n$, $f(0) = \hat{g}_h(0) = \hat{g}(0) = 1$. Следовательно, $f \in K^n(hD)$. Так как $\hat{f}_0 = h^n g(0)$, то получаем оценку снизу

$$A_n(hD) \geq \sup_{g \in G^n(D)} h^n g(0) = M_n(D) h^n. \quad (6)$$

Для оценки сверху $A_n(hD)$ выберем произвольную непрерывную четную функцию $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\text{supp } \varphi \subset [-1/2, 1/2]^n$;
- 2) $\hat{\varphi}(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $\varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(y) dy = 1$.

Пусть f – произвольная функция из $K^n(hD)$. Положим

$$g_h(y) = \int_{hD} f(x) \varphi(x) e(yx) dx \quad (7)$$

и покажем, что функция $g(y) = h^{-n} g_h(h^{-1}y)$ принадлежит классу $G^n(D)$.

Ясно, что g – непрерывная четная функция и $\hat{g}(x) = \hat{g}_h(hx) = f(hx) \varphi(hx)$. Отсюда, из (7) и равенства $\hat{g}(0) = f(0) \varphi(0) = 1$ вытекает, что она удовлетворяет условиям 1) и 3) класса $G^n(D)$. Осталось проверить условие 2).

Так как $hD \subset \mathbb{T}^n$, $\text{supp } f \subset hD$, $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{T}^n$, воспользовавшись разложением функции f в ряд Фурье, получим

$$g_h(y) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \varphi(x) e(yx) dx = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(x) e((\nu + y)x) dx = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu \hat{\varphi}(-\nu - y).$$

Но $\hat{f}_\nu \geq 0$ и $\hat{\varphi} \geq 0$; следовательно, и $g_h(y) = h^n g(hy) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$. Условие 2) для функции g выполнено. Таким образом, $g \in G^n(D)$.

Для функции g имеем

$$h^n g(0) = g_h(0) = \int_{hD} f(x) \varphi(x) dx = \int_{hD} f(x) dx + \int_{hD} f(x) (\varphi(x) - 1) dx.$$

Отсюда

$$\hat{f}_0 = \int_{hD} f(x) dx = h^n g(0) + \int_{hD} f(x) (1 - \varphi(x)) dx. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$|f(x)| \leq \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_\nu = 1 \quad \forall x \in \mathbb{T}^n$$

и

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(y) dy = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, второе слагаемое в (8) можно оценить так

$$\left| \int_{hD} f(x)(1 - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_{hD} (1 - \varphi(x)) dx.$$

Отсюда и из (8) имеем оценку $A_n(hD)$ сверху

$$\begin{aligned} A_n(hD) &= \sup_{f \in K^n(hD)} \hat{f}_0 \leq \sup_{g \in G^n(D)} \left(h^n g(0) + \int_{hD} (1 - \varphi(x)) dx \right) \\ &= M_n(D)h^n + \int_{hD} (1 - \varphi(x)) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Возникает интересная задача нахождения

$$\inf_{\varphi} \int_{hD} (1 - \varphi(x)) dx.$$

Можно показать, что эта величина есть $O(h^{n+2})$, $h \rightarrow 0$. Это доказывать не будем, а приведем только функцию φ , дающую $O(h^{n+2})$: $\varphi(x) = \prod_{k=1}^n d(x_k)$, где

$$d(t) = \begin{cases} 1 - 24|t|^2 + 48|t|^3, & |t| \leq \frac{1}{4}, \\ 2(1 - 2|t|)^3, & \frac{1}{4} \leq |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |t| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Преобразование Фурье функции d равно $96\left(\frac{\sin(\pi s/4)}{\pi s}\right)^4$ [6, с. 150], т.е. является известным положительным интегральным ядром Джексона–Валле–Пуссена. Поэтому функция φ является допустимой. Для нее при $h < 1/4$

$$\begin{aligned} \int_{hD} (1 - \varphi(x)) dx &\leq \int_{[-h, h]^n} (1 - \varphi(x)) dx = (2h)^n - \prod_{k=1}^n \int_{-h}^h d(x_k) dx_k \\ &= (2h)^n [1 - (1 - 8h^2 + 12h^3)^n] = O(h^{n+2}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6), (9) окончательно имеем

$$A_n(hD) = M_n(D)h^n + O(h^{n+2}).$$

Из рассуждений, приведенных в начале доказательства, вытекает, что если g_D – экстремальная функция в (3), то периодизация $\hat{g}_D(h^{-1}x)$ (5) принадлежит классу $K^n(hD)$ и является асимптотически экстремальной функцией, поскольку ее нулевой коэффициент Фурье равен $M_n(D)h^n$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Оценка снизу величины $M_n(B^n)$ вытекает из общей оценки снизу (4), поэтому нетривиальной частью является доказательство оценки сверху.

Пусть g – произвольная функция из $G^n(B^n)$. Рассмотрим ее усреднение

$$g_0(t) = \int_{|\xi|=1} g(t\xi) d\xi, \quad t \in \mathbb{C}.$$

Из принадлежности g классу $G^n(B^n)$ вытекают следующие свойства функции g_0 :

- 1) g_0 – целая четная функция экспоненциального типа $\leq 2\pi$ [6, гл. IV];
- 2) $g_0(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- 3) $\int_0^\infty g_0(t) t^{n-1} dt = 1$;
- 4) $g_0(0) = \omega_{n-1} g(0)$, где $\omega_{n-1} = \int_{|\xi|=1} d\xi = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ – площадь единичной сферы [3].

Свойства 2) и 4) очевидны. Свойство 3) вытекает из формулы интегрирования [3]

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y) dy = \int_0^\infty \int_{|\xi|=1} g(t\xi) d\xi t^{n-1} dt. \quad (10)$$

Осталось проверить 1). Из свойства 1) класса $G^n(B^n)$ следует, что

$$g_0(t) = \int_{|\xi|=1} \int_{B^n} \widehat{g}(x) e(t\xi x) dx d\xi = \int_{|x| \leq 1} \widehat{g}(x) \int_{|\xi|=1} e(t\xi x) d\xi dx. \quad (11)$$

Известно [3], что

$$\int_{|\xi|=1} e(t\xi x) d\xi = \omega_{n-1} j_{n/2-1}(2\pi t|x|).$$

Отсюда и из (11), если воспользоваться формулой интегрирования (10), получим

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \omega_{n-1} \int_{|x| \leq 1} \widehat{g}(x) j_{n/2-1}(2\pi t|x|) dx \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 j_{n/2-1}(2\pi ts) \int_{|\xi|=1} \widehat{g}(s\xi) d\xi s^{n-1} ds \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 \widehat{g}_0(s) j_{n/2-1}(2\pi ts) s^{n-1} ds, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\widehat{g}_0(s) = \int_{|\xi|=1} \widehat{g}(s\xi) d\xi$ – непрерывная функция. Так как нормированная функция Бесселя j_α является целой четной функцией экспоненциального типа 1 [5], то из (12) следует, что функция g_0 является целой четной функцией экспоненциального типа $\leq 2\pi$ (см. [6]).

Пусть $0 < q_{\alpha+1,1} < q_{\alpha+1,2} < \dots$ – положительные нули функции Бесселя $J_{\alpha+1}$. Из результатов работы [7] (лемма 4 при $p = 0$ и теорема В) вытекает следующее утверждение: для любой целой четной функции f экспоненциального типа $\leq 2\pi$ и

$$\int_0^\infty |f(t)| t^{2\alpha+1} dt < \infty, \quad \alpha > -1,$$

справедлива квадратурная формула

$$\int_0^\infty f(t)t^{2\alpha+1} dt = \frac{2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+2)^2}{(2\alpha+2)\tau^{2\alpha+2}}f(0) + \frac{2}{\tau^{2\alpha+2}} \sum_{k=1}^\infty \frac{q_{\alpha+1,k}^{2\alpha}}{J'_{\alpha+1}(q_{\alpha+1,k})^2} f\left(\frac{q_{\alpha+1,k}}{\tau}\right).$$

Функция g_0 в силу ее свойств 1)–3) удовлетворяет условиям этого утверждения при $\alpha = n/2 - 1, \tau = \pi$. Поэтому, применяя к функции g_0 квадратурную формулу и используя ее свойства 2), 4), получим

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty g_0(t)t^{n-1} dt = \frac{2^n\Gamma(n/2+1)^2}{n\pi^n}g_0(0) + \frac{2}{\pi^n} \sum_{k=1}^\infty \frac{q_{n/2,k}^{n-2}}{J'_{n/2}(q_{n/2,k})^2} g_0\left(\frac{q_{n/2,k}}{\pi}\right) \\ &\geq \frac{2^{n-1}\Gamma(n/2)\Gamma(n/2+1)}{\pi^n}g_0(0) = \frac{2^{n-1}\Gamma(n/2)\Gamma(n/2+1)2\pi^{n/2}}{\pi^n\Gamma(n/2)}g(0) = \frac{g(0)}{\text{vol}(\frac{1}{2}B^n)}, \end{aligned}$$

откуда и следует оценка сверху $g(0) \leq \text{vol}(\frac{1}{2}B^n) \quad \forall g \in G^n(B^n)$ и $M_n(B^n) \leq \text{vol}(\frac{1}{2}B^n)$.

Таким образом, $M_n(B^n) = \text{vol}(\frac{1}{2}B^n)$ и экстремальной функцией g_{B^n} является

$$\frac{\hat{\chi}_{\frac{1}{2}B^n}(y)^2}{\text{vol}(\frac{1}{2}B^n)}.$$

Поскольку (см. [5, с. 55] и (11))

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{\frac{1}{2}B^n}(y) &= \int_{|x| \leq 1/2} e(yx) dx = \omega_{n-1} \int_0^{1/2} j_{n/2-1}(2\pi|y|s) s^{n-1} ds \\ &= \frac{2\pi^{n/2}2^{n/2-1}\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2)(2\pi|y|)^{n/2-1}} \int_0^{1/2} J_{n/2-1}(2\pi|y|s) s^{n/2} ds \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|y|^n} (2\pi|y|s)^{n/2} J_{n/2}(2\pi|y|s) \Big|_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi^{n/2}}{2^n\Gamma(n/2+1)} j_{n/2}(\pi|y|) = \text{vol}\left(\frac{1}{2}B^n\right) j_{n/2}(\pi|y|), \end{aligned}$$

то

$$g_{B^n}(y) = \text{vol}\left(\frac{1}{2}B^n\right) j_{n/2}(\pi|y|)^2.$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Стечкин С. Б. Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Избранные труды. Математика. М.: Наука, 1998. С. 244–245.
- [2] Андреев Н. Н. Экстремальные задачи для периодических функций с малым носителем // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1997. № 1. С. 29–32.
- [3] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [4] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
- [6] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [7] Ghanem R. B., Frappier C. Explicit quadrature formulae for entire functions of exponential type // J. Approx. Th. 1998. V. 92. P. 267–279.