Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Го Вэньбинь, А. А. Махнев, Д. В. Падучих, Об автоморфизмах накрытий сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 22–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:27:48

Об автоморфизмах накрытий сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$

Го Вэньбинь, А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярных графов диаметра 4, являющихся r -накрытиями сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ для $r \in \{2, 3, 6\}$. Доказано, что если группа автоморфизмов указанного накрытия действует транзитивно на множестве вершин графа, то $r = 3$.

Библиография: 4 названия.

Введение. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т.е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ – граф, $a, b \in \Gamma$; число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом). Если Γ – граф диаметра d и $I \subset \{1, \dots, d\}$, то через Γ_I обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины u, w смежны тогда и только тогда, когда $d(u, w) \in I$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины a из Γ равна k .

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $\lambda = k - b_1 - 1$, $c_1 = 1$ и $c_2 = \mu$. Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным с параметрами* (v, k, λ, μ) , где v – число вершин графа.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (грант № 08-01-90006) и программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

Для автоморфизма g графа Γ через $\text{Fix}(g)$ обозначается подграф, индуцированный на множестве всех вершин графа Γ , неподвижных относительно g .

Для изучения возможных порядков и подграфов неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярных графов Γ . Хигмен предложил оригинальный метод, использующий теорию характеров конечных групп. Этот метод изложен в монографии Камерона [1], причем там он применялся только к изучению инволютивных автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(3250, 57, 0, 1)$.

В данной работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ , являющегося r -накрытиями сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. Хорошо известно, что существует единственный сильно регулярный граф с такими параметрами. Если диаметр графа Γ равен 5, то граф имеет массив пересечений $\{20, 18, t(r-1), 6, 1; 1, 6, t, 18, 20\}$ и $c_2 \leq t \leq \min\{b_1, a_2\}/(r-1)$ (здесь параметры a_2, b_1, c_2 отвечают сильно регулярному графу), поэтому $r \leq 3$. Если $r = 3$, то $t = 6, 7$. Если же $r = 2$, то $6 \leq t \leq 14$. В любом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет не целую кратность. Если диаметр графа Γ равен 4, то граф имеет допустимые массивы пересечений при $r \in \{2, 3, 6\}$ и в случае $r = 3$ такое покрытие существует (это граф смежных классов укороченного тернарного кода Голея с массивом пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ [2]). Проблема существования 2- и 6-накрытий диаметра 4 явно сформулирована в [2; § 11.3.H].

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $|G|$ делит 18 и верно одно из утверждений:

- (1) $p = 2$, $|\Omega| = 0$ и $d(u, u^g) = 4$ для любой вершины $u \in \Gamma$;
- (2) $p = 3$, Ω является пустым графом или объединением двух треугольников, расстояние между которыми в Γ равно 3, и $\alpha_3(g) = \alpha_4(g) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p , $\bar{\Gamma}$ – антиподальное частное графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $p = 5$, Ω – антиподальный класс, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 180$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 30$;
- (2) $p = 2$, $\bar{\Omega}$ является m -кликкой, $m \in \{1, 3, 9\}$, и Ω является n -кликкой, $n \in \{1, 9, 9\}$, соответственно;
- (3) $p = 3$, $\alpha_3(g) = \alpha_4(g) = 0$ и выполнено одно из следующих утверждений:
 - (i) $\alpha_4(g) = 243$;
 - (ii) $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
 - (iii) $\alpha_2(g) = 243$;
 - (iv) $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 27$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$;
 - (v) $\alpha_0(g) = 9$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 18$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p , $\bar{\Gamma}$ – антиподальное частное графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:

- (1) $p = 5$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$, $\alpha_2(g) = 360$, либо $\alpha_0(g) = 1$, $\alpha_4(g) = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{20, 65, 110\}$, либо $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_0(g) = 6$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 45, 90\}$;
- (2) $p = 3$ и выполнено одно из следующих утверждений:
 - (i) $\alpha_4(g) = 486$;

- (ii) $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 486$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
- (iii) $\alpha_2(g) = 486$;
- (iv) $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 54$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
- (v) $\alpha_0(g) = 18$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 36$ и $\alpha_1(g) - 3$ делится на 9.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра 4, являющийся r -накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$, $r \in \{2, 3, 6\}$. Если группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ , то $r = 3$.

1. Вспомогательные результаты. В этом пункте приведены результаты, используемые в доказательстве теорем.

ЛЕММА 1.1. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$. Тогда Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{36}, 2^{60}, -4^{45}, -7^{20}\}$, граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(162, 21, 0, 3)$, число вершин в максимальной кокликке графа Γ не больше 42 и для ненулевых чисел пересечения графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 1$, $p_{12}^1 = 18$, $p_{22}^1 = 84$, $p_{23}^1 = 18$, $p_{33}^1 = 1$, $p_{34}^1 = 1$;
- (2) $p_{11}^2 = 3$, $p_{12}^2 = 14$, $p_{22}^2 = 90$, $p_{13}^2 = 3$, $p_{23}^2 = 14$, $p_{33}^2 = 3$, $p_{24}^2 = 1$;
- (3) $p_{12}^3 = 18$, $p_{22}^3 = 84$, $p_{13}^3 = 1$, $p_{14}^3 = 1$, $p_{23}^3 = 18$;
- (4) $p_{13}^4 = 20$, $p_{22}^4 = 120$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что Γ является 2-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. По [2; следствие 4.2.5] Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{36}, 2^{60}, -4^{45}, -7^{20}\}$. Граница Хоффмана для графа Γ дает верхнюю оценку для числа вершин в максимальной кокликке C : $|C| \leq vt/(k+m) = 162 \cdot 7/27 = 42$. Пусть $\bar{\Gamma}$ – антиподальное частное графа Γ . Тогда число вершин в максимальной кокликке графа $\bar{\Gamma}$ не больше 21.

Напомним, что для вершин u, w , находящихся на расстоянии l , через p_{ij}^l обозначается число вершин z с $d(u, z) = i$ и $d(z, w) = j$. Заметим, что $p_{12}^2 = a_2$, $p_{13}^3 = a_3$. По лемме 4.1.7 из [2] получим

$$p_{j+1h}^i = \frac{p_{jh-1}^i b_{h-1} + p_{jh}^i (a_h - a_j) + p_{jh+1}^i c_{h+1} - p_{j-1h}^i b_{j-1}}{c_{j+1}};$$

в частности,

$$\begin{aligned} p_{ii-1}^1 &= \frac{c_i k_i}{k}, & p_{ii}^1 &= \frac{a_i k_i}{k}, & p_{ii+1}^1 &= \frac{b_i k_i}{k}, \\ p_{i-22}^i &= \frac{c_{i-1} c_i}{\mu}, & p_{i+12}^{i-1} &= \frac{b_{i-1} b_i}{\mu}, & p_{i-1+1}^2 &= \frac{k_i c_i b_i}{k b_1}, \\ p_{i2}^{i-1} &= \frac{b_{i-1} (a_i + a_{i-1} - a_1)}{\mu}, & p_{i2}^{i+1} &= \frac{c_{i+1} (a_i + a_{i+1} - a_1)}{\mu}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул находим числа пересечения.

Покажем теперь, что граф $\Gamma_{3,4}$ сильно регулярен с параметрами $(162, 21, 0, 3)$. Так как в графе Γ $k_3 = 20$, $k_4 = 1$, то $\Gamma_{3,4}$ – регулярный граф степени 21. Так как

$p_{33}^3 = p_{34}^3 = p_{44}^3 = 0$ и $p_{33}^4 = p_{34}^4 = p_{44}^4 = 0$, то $\Gamma_{3,4}$ – граф без треугольников. Наконец, $p_{33}^1 + p_{34}^1 + p_{43}^1 + p_{44}^1 = 3$ и $p_{33}^2 + p_{34}^2 + p_{43}^2 + p_{44}^2 = 3$, поэтому граф $\Gamma_{3,4}$ имеет диаметр 2 и $\mu(\Gamma_{3,4}) = 3$.

ЛЕММА 1.2. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(162, 21, 0, 3)$. Тогда Δ имеет собственные значения 3, -6 кратностей 105, 56 соответственно и $|C| \leq 36$ для любой коклики C из Δ , причем в случае $|C| = 36$ каждая вершина из $\Delta - C$ смежна с шестью вершинами из C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(162, 21, 0, 3)$. Тогда $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = 9^2$ и Δ имеет собственные значения 3 и -6 кратностей 105 и 56 соответственно.

Далее, $|C| \leq 162 \cdot 6/27 = 36$ для любой коклики C из Δ , причем равенство достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина вне C смежна точно с шестью вершинами из C (граница Хофмана для коклик).

ЛЕММА 1.3. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20^1, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$. Тогда Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{72}, 2^{60}, -4^{90}, -7^{20}\}$ и для ненулевых чисел пересечения графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 1, p_{12}^1 = 18, p_{22}^1 = 126, p_{23}^1 = 36, p_{33}^1 = 2;$
- (2) $p_{11}^2 = 2, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 4, p_{22}^2 = 135, p_{23}^2 = 28, p_{24}^2 = 2, p_{33}^2 = 8;$
- (3) $p_{12}^3 = 18, p_{14}^3 = p_{34}^3 = p_{13}^3 = 1, p_{22}^3 = 126, p_{23}^3 = 36;$
- (4) $p_{13}^4 = p_{33}^4 = 20, p_{22}^4 = 180, p_{44}^4 = 1.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что Γ является 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. По [2; следствие 4.2.5] граф Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{72}, 2^{60}, -4^{90}, -7^{20}\}$. Числа пересечения находятся с учетом того, что Γ является 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

ЛЕММА 1.4. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20^1, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$. Тогда Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}\}$ и для ненулевых чисел пересечения графа Γ верны равенства

- (1) $p_{11}^1 = 1, p_{12}^1 = 18, p_{22}^1 = 252, p_{23}^1 = 90, p_{33}^1 = 5;$
- (2) $p_{11}^2 = 1, p_{12}^2 = 14, p_{13}^2 = 5, p_{22}^2 = 270, p_{23}^2 = 70, p_{24}^2 = 5, p_{33}^2 = 25;$
- (3) $p_{12}^3 = 18, p_{14}^3 = 1, p_{22}^3 = 252, p_{23}^3 = 90, p_{33}^3 = p_{34}^3 = 4;$
- (4) $p_{13}^4 = 20, p_{22}^4 = 360, p_{33}^4 = 80, p_{44}^4 = 4.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что Γ является 6-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$. По [2; следствие 4.2.5] граф Γ имеет спектр $\{20^1, 5^{180}, 2^{60}, -4^{225}, -7^{20}\}$. Числа пересечения находятся с учетом того, что Γ является 6-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [1]. При этом графу Γ диаметра d на n вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X – множество вершин графа, R_0 – отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i – матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ – единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для подходящих неотрицательных целых p_{ij}^l .

Пусть P_i – матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $k = p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1 , поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j . Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений* схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$, где I – единичная матрица порядка $d + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть u_j и w_j – левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна

$$\frac{n}{\langle u_j, w_j \rangle}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. теорему 17.12 из [3].

Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств $W_0 \oplus \dots \oplus W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1 , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i – характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. [1; §3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ – число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ – число рациональное, то $\chi_i(g)$ – целое число.

ЛЕММА 1.5. Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(20, 18, 1, 6)$, g – автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\text{Fix}(g) = \Omega$. Тогда

- (1) $p = 5$, $|\Omega| = 1$, $\alpha_1 = 20$ и подграф α_1 -вершин реберно регулярен с $k = 6$, $\lambda = 0$;
- (2) $p = 3$ и выполняется одно из утверждений:
 - (i) $\alpha_1(g) = 81$;
 - (ii) имеется два класса сопряженных элементов с $\alpha_2(g) = 81$;
 - (iii) Ω является объединением трех изолированных треугольников, $\alpha_1 = 18$, $\alpha_2 = 54$ и подграф α_1 -вершин является объединением изолированных треугольников;
- (3) $p = 2$ и выполняется одно из утверждений:
 - (i) $|\Omega| = 1$, $\alpha_1(g) = 20$, $\alpha_2(g) = 60$ и вершины из окрестности неподвижной точки сдвигаются по ребру;
 - (ii) Ω является 3×3 -решеткой, $\alpha_2(g) = 72$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с двумя вершинами из Ω ;
 - (iii) Ω является 9-кликкой, окрестность каждой вершины из Ω содержит два g -инвариантных ребра, $\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 36$ и каждая α_2 -вершина смежна с четырьмя вершинами из Ω ;
 - (iv) Ω является 3-кликкой, $\alpha_1(g) = 24$, $\alpha_2(g) = 54$ и окрестность каждой вершины из Ω содержит четыре g -инвариантных ребра;

- (v) Ω – реберно регулярный граф степени 8 и диаметра 2 на 27 вершинах и $\alpha_2(g) = 54$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа автоморфизмов G единственного сильно регулярно графа Γ с параметрами $(20, 18, 1, 6)$ является расширением элементарной абелевой группы порядка 81 (действующей регулярно на множестве вершин) с помощью группы H , фиксирующей вершину a . Далее, H является расширением прямого произведения группы порядка 2 на знакопеременную группу степени 6 с помощью четверной группы.

Следующие результаты получены с помощью компьютерной программы GAP. Группа G имеет ровно 10 классов сопряженных элементов простого порядка: пять классов элементов порядка 2, четыре класса элементов порядка 3 и один класс элементов порядка 5.

Пусть $p = 5$. Тогда $|\Omega| = 1$, $\alpha_1 = 20$ и подграф α_1 -вершин реберно регулярен с $k = 6$, $\lambda = 0$.

Пусть $p = 3$. Тогда либо $\alpha_1(g) = 81$, либо $\alpha_2(g) = 81$, либо Ω является объединением трех изолированных треугольников, $\alpha_1 = 18$, $\alpha_2 = 54$ и подграф α_1 -вершин является объединением изолированных треугольников.

Пусть $p = 2$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $|\Omega| = 1$, $\alpha_1(g) = 20$, $\alpha_2(g) = 60$ и вершины из окрестности неподвижной точки сдвигаются по ребру;
- (2) Ω является 3×3 -решеткой, $\alpha_2(g) = 72$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с двумя вершинами из Ω ;
- (3) Ω является 9-кликкой, окрестность каждой вершины из Ω содержит два g -инвариантных ребра, $\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 36$ и каждая α_2 -вершина смежна с четырьмя вершинами из Ω ;
- (4) Ω является 3-кликкой, $\alpha_1(g) = 24$, $\alpha_2(g) = 54$ и окрестность каждой вершины из Ω содержит четыре g -инвариантных ребра;
- (5) Ω – реберно регулярный граф степени 8 и диаметра 2 на 27 вершинах и $\alpha_2(g) = 54$.

Лемма доказана.

2. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$. В этом пункте Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{20, 18, 3, 1; 1, 3, 18, 20\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 36, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 60, χ_3 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 45 и χ_4 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 20. Тогда

$$\begin{aligned}\chi_1(g) &= \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{18}, \\ \chi_2(g) &= \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{18} + 2 = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{18} + 20, \\ \chi_3(g) &= \frac{5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{18},\end{aligned}$$

$$\chi_4(g) = \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{18} - 7 = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{18} + 20.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 36 & 9 & 0 & -9 & -36 \\ 60 & 6 & -3 & 6 & 60 \\ 45 & -9 & 0 & 9 & -45 \\ 20 & -7 & 2 & -7 & 20 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\chi_1(g) = \frac{4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{18}.$$

Аналогично,

$$\chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 2\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{54}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 162 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{18} + 2.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 162 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{18} + 20.$$

Имеем

$$\chi_3(g) = \frac{5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{18}.$$

Наконец,

$$\chi_4(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 7\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{162}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 162 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{18} - 7.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 162 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{18} + 20.$$

Лемма доказана.

Пусть $g \in G$. Тогда g является автоморфизмом сильно регулярного графа $\Gamma_{3,4}$ и индуцирует автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть g — элемент простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $p = 2$, $|\Omega| = 0$ и $d(u, u^g) = 4$ для любой вершины $u \in \Gamma$;
- (2) $p = 3$, $|\Omega| = 0$ и $\alpha_2(g) = 162$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma' = \Gamma_{3,4}$ и Ω' – подграф неподвижных точек автоморфизма g в графе Γ' . Заметим, что если $u \in \Omega$, то и антипод u^* вершины u также принадлежит Ω , поэтому Ω' не содержит изолированных вершин и не является 3-лапой.

По теореме из [4] выполняется одно из утверждений:

- (1) $p = 2$ и либо $|\Omega'| = 0$, либо Ω' является 3-лапой;
- (2) $p = 3$ и выполнено одно из следующих утверждений:
 - (i) Ω' является $K_{3,3}$ -подграфом;
 - (ii) Ω' является объединением трех изолированных $K_{3,3}$ -подграфов;
 - (iii) Ω' содержит три изолированных вершины u_1, u_2, u_3 и две $K_{3,3}$ -компоненты;
 - (iv) Ω' содержит три изолированных вершины u_1, u_2, u_3 и $K_{3,3}$ -компоненту;
 - (v) Ω' является 3β -кликкой, $\beta \leq 5$;
- (3) $p = 5$ и Ω' является двухвершинной кликой;
- (4) $p = 7$ и Ω' является одновершинной кликой.

Ясно, что случаи (2iii), (2iv) и (4) невозможны, в случаях (1) и (2v) имеем $|\Omega| = 0$ и в случае (3) Ω – антиподальный класс.

Если $p = 2$, то $\alpha_0(g) = 0$. Далее, $\alpha_1(g) = 0$ (иначе для смежных вершин u, u^g подграф $[u] \cap [u^g]$ содержит вершину из Ω). Аналогично, $\alpha_2(g) = 0$ (иначе для вершин u, u^g с $d(u, u^g) = 2$ подграф $[u] \cap [u^g]$ содержит три вершины, одна из которых попадает в Ω).

Из целочисленности $\chi_4(g)$ следует, что $\alpha_3(g)$ и $\alpha_4(g)$ делятся на 6.

Так как число антиподальных классов в Γ равно 81, то $\alpha_4(g) \in \{54, 162\}$. Пусть A – подграф на множестве вершин, находящихся на расстоянии 3 от их образов под действием g . Если $d(u, u^g) = 3$, то $[u] \cap \Gamma_4(u^g)$ содержит единственную вершину w и $d(w, w^g) = 3$. Далее, любая из 18 вершин в $[u] \cap \Gamma_2(u^g)$ находится на расстоянии 3 от ее образа под действием g . Поэтому степень каждой вершины в графе A не меньше 19 и $|A \cap \Gamma_2(u)| \geq 108$; противоречие с тем, что $|A| = 108$. Таким образом, $\alpha_4(g) = 162$.

Пусть $p = 5$, $\Omega = \{a, a^*\}$. Если $d(u, u^g) = 4$, то $u, u^{g^2} \in \Gamma_4(u^g)$; противоречие с тем, что $u \neq u^{g^2}$, поэтому $\alpha_4(g) = 0$. Далее, $d(u, u^g) = 2$ для любой вершины $u \in [a] \cup [a^*]$, поэтому $\alpha_2(g) \geq 40$. Из целочисленности $\chi_4(g)$ следует, что $6 + \alpha_2(g)$ делится на 18. Так как $\alpha_2(g) \geq 40$, то $\alpha_2(g) = 120$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 40$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $8 + \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 18. Отсюда $\alpha_1(g) = 25$. С другой стороны, если $d(u, u^g) = 1$ и u^* – антипод u , то $d(u^*, (u^*)^g) = 1$, поэтому $\alpha_1(g)$ четно.

Пусть $p = 3$. Как и выше, $\alpha_4(g) = 0$. Так как $p_{3,3}^3 = 0$, то $\alpha_3(g) = 0$. Ввиду леммы 1.5 либо Ω' – пустой граф, либо Ω' является объединением трех $K_{3,3}$ -подграфов. Тогда каждому $K_{3,3}$ -подграфу из Γ' отвечает объединение двух треугольников. Всего получим шесть треугольников. Заметим, что любые два из этих треугольников изолированы, иначе вершина u смежна с вершиной w из другого треугольника, $d(u^*, w) = 3$ и соответствующие $K_{3,3}$ -подграфы не изолированы в Ω' ; противоречие.

Если $\alpha_0(g) = 0$, то из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 18. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_2(g)$ делится на 18. Ввиду леммы 1.5 либо $\alpha_1(g) = 162$, либо $\alpha_2(g) = 162$. Покажем, что $\alpha_1(g) \neq 162$.

Пусть $\alpha_1(g) = 162$ и $\bar{\Gamma}$ – граф, вершинами которого являются $\langle g \rangle$ -орбиты на Γ и две орбиты смежны, если некоторая вершина одной из них смежна с вершиной другой. Тогда число вершин графа $\bar{\Gamma}$ равно 54, и $\bar{\Gamma}$ – регулярный граф степени 18.

Пусть $\{u, u^g, u^{g^2}\}$ и $\{w, w^g, w^{g^2}\}$ – смежные вершины графа $\bar{\Gamma}$. Без ограничения общности, вершины u, w смежны. Тогда $[u] \cap [w]$ содержит единственную вершину x , $[u] \cap [w^g]$ содержит вершины w, u^g и еще одну вершину y , $[u] \cap [w^{g^2}]$ содержит вершины w, u^{g^2} и еще одну вершину z . Так как вершины x, y, z лежат в разных $\langle g \rangle$ -орбитах, то $\bar{\lambda} = 3$. Заметим, что $\bar{\Gamma}_3(\{u, u^g, u^{g^2}\})$ содержит единственную вершину $\{u^*, (u^*)^g, (u^*)^{g^2}\}$, поэтому $|\bar{\Gamma}_2(\{u, u^g, u^{g^2}\})| = 34$. Теперь число ребер между $\bar{\Gamma}(\{u, u^g, u^{g^2}\})$ и $\bar{\Gamma}_2(\{u, u^g, u^{g^2}\})$ равно $18 \cdot 14$, и некоторая вершина $\{y, y^g, y^{g^2}\}$ из $\bar{\Gamma}_2(\{u, u^g, u^{g^2}\})$ смежна по крайней мере с восемью вершинами из $\Gamma'(\{u, u^g, u^{g^2}\})$. Отсюда $[u] \cap ([y] \cup [y^g] \cup [y^{g^2}])$ содержит не менее восьми вершин; противоречие с тем, что в этом случае $[u]$ содержит треугольник. Итак, в случае $\alpha_0(g) = 0$ выполняется заключение леммы.

Если $\alpha_0(g) = 18$, то из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 18. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_2(g)$ делится на 18. Пусть X_i – множество вершин из $\Gamma - \Omega$, смежных точно с i вершинами из Ω , $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 144$, $\sum i x_i = 324$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 324$ и $x_i = 0$ для $i > 3$. Поэтому $x_0 = 36$, $x_3 = 108$, $\alpha_2(g) = 144$ и $\alpha_1(g) = 0$. Противоречие с леммой 1.5.

ЛЕММА 2.3. *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) *порядок группы G не делится на 4;*
- (2) *если P – силовская 3-подгруппа из G , то $|P| \leq 9$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $|G|$ не делится на 4, так как $v = 162$ и инволюция из G действует без неподвижных точек на Γ .

Пусть P – силовская 3-подгруппа из G . Тогда P изоморфно вкладывается в группу автоморфизмов сильно регулярного графа $\bar{\Gamma}$ с параметрами $(81, 20, 1, 6)$, так что $\alpha_2(z) = 81$ для любого элемента z порядка 3 из P . Поэтому любая $\bar{P}$ -орбита на Γ' является кокликкой. Так как число вершин в кокликке сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$ не больше $81 \cdot 7/27 = 21$, то $|P| \leq 9$. Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

Из леммы 2.3 следует, что группа G действует интранзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ . В частности, граф Γ не является вершинно-симметричным.

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$. В этом пункте Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{20, 18, 4, 1; 1, 2, 18, 20\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Заметим, что Γ является 3-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 72, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 60, χ_3 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 90 и χ_4 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 20. Тогда*

$$\chi_1(g) = \frac{8\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{27},$$

$$\chi_2(g) = \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{27} + 6 = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{27} + 60,$$

$$\chi_3(g) = \frac{10\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{27},$$

$$\chi_4(g) = \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{27} - 7 = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{27} + 20.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 72 & 18 & 0 & -9 & -36 \\ 60 & 6 & -3 & 6 & 60 \\ 90 & -18 & 0 & 9 & -45 \\ 20 & -7 & 2 & -7 & 20 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\chi_1(g) = \frac{8\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{27}.$$

Аналогично,

$$\chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 2\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{81}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{27} + 6.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 243 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{27} + 60.$$

Имеем

$$\chi_3(g) = \frac{10\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{27}.$$

Наконец,

$$\chi_4(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 7\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{243}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{27} - 7.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 243 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{27} + 20.$$

Лемма доказана.

Пусть $g \in G$. Тогда g индуцирует автоморфизмом антиподального частного $\bar{\Gamma}$ (быть может, тривиальный).

ЛЕММА 3.2. Пусть g – элемент простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $p = 5$, Ω – антиподальный класс, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 180$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 30$;
- (2) $p = 2$, $\bar{\Omega}$ является m -кокликкой, $m \in \{1, 3, 9\}$, и Ω является n -кокликкой, $n \in \{1, 9, 9\}$, соответственно;
- (3) $p = 3$ и выполнено одно из следующих утверждений:
 - (i) $\alpha_4(g) = 243$;
 - (ii) $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
 - (iii) $\alpha_2(g) = 243$;
 - (iv) $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 27$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$;
 - (v) $\alpha_0(g) = 9$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$, $\alpha_2(g) = 162$, $\alpha_4(g) = 18$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 27, 54\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\Gamma}$ – антиподальное частное графа Γ и $\bar{\Omega}$ – подграф неподвижных точек автоморфизма $\bar{g}$ в графе $\bar{\Gamma}$. Если $p \neq 3$, то g фиксирует вершину a . Поэтому g действует на 10 ребрах из $[a]$.

Если $p \geq 7$, то автоморфизм $\bar{g}$ тривиален, поэтому g фиксирует каждый антиподальный класс графа Γ и $\Gamma = \Omega$; противоречие. Значит, $p \leq 5$.

Пусть $p = 5$. Ввиду леммы 1.5 подграф Ω – антиподальный класс. Заметим, что $\alpha_4(g) = 0$ и $\alpha_2(g) \geq 60$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $18 - \alpha_2(g)$ делится на 27, поэтому $\alpha_2(g) = 180$ и $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 60$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 3$ делится на 9; следовательно, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 30$.

Пусть $p = 2$. По лемме 1.5 граф $\bar{\Omega}$ является m -кокликкой, $m \in \{1, 3, 9\}$, 3×3 -решеткой или реберно регулярным графом степени 8 и диаметра 2 на 27 вершинах.

Пусть $\bar{\Omega}$ является m -кокликкой, $a \in \Omega$. Тогда $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 2s$, где $2s$ – число ребер из $[a]$, сдвигаемых g . Если $m = 1$, то $|\Omega| \in \{1, 3\}$. В случае $|\Omega| = 1$ имеем $\alpha_4(g) = 2$, $\alpha_1(g) = 20$ и $\alpha_3(g) = 40$; следовательно, $\alpha_2(g) = 180$. В случае $|\Omega| = 3$ имеем $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 60$ и $\alpha_2(g) = 180$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что 84 делится на 27; противоречие.

Если $m = 3$, то g' переворачивает четыре ребра из $\bar{\Gamma}(\bar{a})$ и $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 6$. Поэтому $|\Omega| = 9$, $\alpha_4(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 72$. Так как $\alpha_1(\bar{g}) = 24$, то $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 162$.

Если $m = 9$, то $\bar{g}$ переворачивает два ребра из $\bar{\Gamma}(\bar{a})$, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 8$, $|\Omega| = 9$, $\alpha_4(g) = 18$ и $\alpha_1(g) = 36$. Так как $\alpha_1(\bar{g}) = 36$, то $\alpha_3(g) = 72$ и $\alpha_2(g) = 108$.

Пусть граф $\bar{\Omega}$ является 3×3 -решеткой. Тогда каждая вершина из $\bar{\Gamma} - \bar{\Omega}$ смежна с 2-кокликкой из $\bar{\Omega}$. Поэтому для каждой вершины u из $\Gamma - \Omega$ имеем $d(u, u^g) = 2$; в частности, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$. Для вершины $a \in \Omega$ имеем $|\Omega(a)| = 4$ и $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 4 + 18$. Противоречие с тем, что в графе $\bar{\Omega}$ только четыре вершины лежат во второй окрестности вершины $\bar{a}$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является реберно регулярным графом степени 8 и диаметра 2 на 27 вершинах. Тогда каждая вершина из $\bar{\Gamma} - \bar{\Omega}$ смежна с шестью вершинами из $\bar{\Omega}$. Поэтому для каждой вершины u из $\Gamma - \Omega$ имеем $d(u, u^g) = 2$; в частности, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$. Для вершины $a \in \Omega$ имеем $|\Omega(a)| = 8$ и $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = 24 + 6$. Пусть C – антиподальный класс, содержащий a . Если $C \cap \Omega = \{a\}$, то $|\Omega| = 39$. Если же $C \subset \Omega$, то $|\Omega| = 57$; противоречие с тем, что $3 \cdot 27 > |\Omega|$. Значит, каждый антиподальный класс, пересекающий Ω , содержит единственную вершину из Ω ; противоречие с тем, что $|\bar{\Omega}| = 27$.

Пусть $p = 3$. Если автоморфизм $\bar{g}$ тривиален, то $\alpha_4(g) = 243$. Если автоморфизм $\bar{g}$ нетривиален, то по лемме 1.5 либо $\alpha_1(\bar{g}) = 81$, либо $\alpha_2(\bar{g}) = 81$, либо $\bar{\Omega}$ является объединением трех изолированных треугольников, $\alpha_1(\bar{g}) = 18$, $\alpha_2(\bar{g}) = 54$ и подграф α_1 -вершин является объединением изолированных треугольников.

Если $\alpha_1(\bar{g}) = 81$, то $\alpha_0(g) = \alpha_2(g) = \alpha_4(g) = 0$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $2\alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 27 и $\alpha_1(g)$ делится на 9.

Если $\alpha_2(\bar{g}) = 81$, то $\alpha_2(g) = 243$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является объединением трех изолированных треугольников. Тогда имеем $\alpha_1(\bar{g}) = 18$, $\alpha_2(\bar{g}) = 54$ и подграф α_1 -вершин является объединением изолированных треугольников.

Если $\alpha_0(g) = 0$, то $\alpha_4(g) = 27$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$ и $\alpha_2(g) = 162$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $2\alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 27 и $\alpha_1(g)$ делится на 27.

Если $a \in \Omega$, то $\alpha_0(g) \geq 9$. Для $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$ подграф $[a] \cap [c]$ является 2-кокликой из $\Omega(a)$; противоречие. Поэтому $\alpha_0(g) = 9$, $\alpha_4(g) = 18$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 54$ и $\alpha_2(g) = 162$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $2\alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 27 и $\alpha_1(g)$ делится на 27. Лемма, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

4. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$. В этом пункте Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{20, 18, 5, 1; 1, 1, 18, 20\}$ и $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Заметим, что Γ является 6-накрытием сильно регулярного графа с параметрами $(81, 20, 1, 6)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 180, χ_2 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 60, χ_3 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 225 и χ_4 – характер проекции представления ψ на подпространство размерности 20. Тогда

$$\begin{aligned}\chi_1(g) &= \frac{20\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{54}, \\ \chi_2(g) &= \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{54} + 6 = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{54} + 60, \\ \chi_3(g) &= \frac{25\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{54}, \\ \chi_4(g) &= \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{54} - 7 = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{54} + 10.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 180 & 45 & 0 & -9 & -36 \\ 60 & 6 & -3 & 6 & 60 \\ 225 & -45 & 0 & 9 & -45 \\ 20 & -7 & 2 & -7 & 20 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\chi_1(g) = \frac{20\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g)}{54}.$$

Аналогично,

$$\chi_2(g) = \frac{20\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 2\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{162}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 486 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{6\alpha_0(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_4(g)}{54} + 6.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 486 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \frac{-6\alpha_1(g) - 7\alpha_2(g) - 6\alpha_3(g)}{54} + 60.$$

Имеем

$$\chi_3(g) = \frac{25\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g)}{54}.$$

Наконец,

$$\chi_4(g) = \frac{20\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 7\alpha_3(g) + 20\alpha_4(g)}{486}.$$

Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 243 - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{3\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 3\alpha_4(g)}{54} - 7.$$

Подставляя $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 243 - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим

$$\chi_4(g) = \frac{-3\alpha_1(g) - 2\alpha_2(g) - 3\alpha_3(g)}{54} + 10.$$

Лемма доказана.

Пусть $g \in G$. Тогда g индуцирует автоморфизм $\bar{g}$ антиподального частного $\bar{\Gamma}$ (быть может, тривиальный).

ЛЕММА 4.2. Пусть g – элемент простого порядка p , $\Omega = \text{Fix}(g)$ и $\bar{\Omega} = \text{Fix}(\bar{g})$. Тогда выполняется одно из утверждений:

- (1) $p = 5$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$, $\alpha_2(g) = 360$, либо $\alpha_0(g) = 1$, $\alpha_4(g) = 5$ и $\alpha_1(g) \in \{20, 65, 110\}$, либо $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_0(g) = 6$ и $\alpha_1(g) \in \{0, 45, 90\}$;
- (2) $p = 3$ и выполнено одно из следующих утверждений:
 - (i) $\alpha_4(g) = 486$;
 - (ii) $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 486$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
 - (iii) $\alpha_2(g) = 486$;
 - (iv) $\alpha_0(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 54$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9;
 - (v) $\alpha_0(g) = 18$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_4(g) = 36$ и $\alpha_1(g) - 3$ делится на 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p \notin \{2, 3\}$, то g фиксирует вершину a . Поэтому g действует на 10 ребрах из $[a]$.

Если $p \geq 7$, то автоморфизм $\bar{g}$ тривиален, поэтому g фиксирует каждый антиподальный класс графа Γ и $\Gamma = \Omega$; противоречие. Значит, $p \leq 5$.

Пусть $p = 5$. Ввиду леммы 1.5 подграф Ω содержится в антиподальном классе Y . Если $\alpha_0(g) = 1$, то $\alpha_4(g) = 5$, g фиксирует единственную вершину a из Y и точно действует на $Y - \{a\}$. В этом случае $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$ и $\alpha_2(g) = 360$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 20$ делится на 9. Поэтому $\alpha_1(g) \in \{20, 65, 110\}$.

Если $\alpha_4(g) = 0$, то $\alpha_0(g) = 6$; снова $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$ и $\alpha_2(g) = 360$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $6\alpha_1(g)$ делится на 54. Поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 45, 90\}$.

Пусть $p = 2$. По лемме 1.5 для графа $\bar{\Omega}$ выполняется одна из пяти возможностей.

Пусть $|\bar{\Omega}| = 1$, $\alpha_1(\bar{g}) = 20$, $\alpha_2(\bar{g}) = 60$ и вершины из окрестности неподвижной точки сдвигаются по ребру. Тогда подграф, индуцированный α_0 - и α_4 -вершинами, – это антиподальный класс Y , $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 120$ и $\alpha_2(g) = 360$. Далее, подграф, индуцированный α_2 -вершинами, – это $\Gamma_2(a)$ для вершины $a \in Y$. Противоречие с тем, что для вершины u с $d(u, u^g) = 2$ подграф $[u] \cap [u^g]$ пересекает Ω .

Пусть $\bar{\Omega}$ является 3×3 -решеткой, $\alpha_2(\bar{g}) = 72$ и каждая вершина из $\bar{\Gamma} - \bar{\Omega}$ смежна с двумя вершинами из $\bar{\Omega}$. Тогда $\alpha_2(g) = 432$. Так как в окрестности неподвижной точки имеется шестнадцать α_2 -вершин, то $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 27$; противоречие.

Пусть $\bar{\Omega}$ является 9-коккликой, окрестность каждой вершины из $\bar{\Omega}$ содержит два $\bar{g}$ -инвариантных ребра, $\alpha_1(g) = \alpha_2(g) = 36$ и каждая α_2 -вершина смежна с четырьмя вершинами из $\bar{\Omega}$. Тогда $\alpha_2(g) = 216$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 216$ и $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 54$. Так как в окрестности неподвижной точки имеется ровно шестнадцать α_2 -вершин, то $\alpha_0(g) = 216/16$; противоречие.

Пусть $\bar{\Omega}$ является 3-коккликой, $\alpha_1(\bar{g}) = 24$, $\alpha_2(\bar{g}) = 54$ и окрестность каждой вершины из $\bar{\Omega}$ содержит четыре $\bar{g}$ -инвариантных ребра. Тогда $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 144$ и $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 18$. Так как в окрестности неподвижной точки имеется ровно 12 α_2 -вершин, то $\alpha_0(g) = 324/12 = 27$; противоречие.

Пусть $\bar{\Omega}$ – реберно регулярный граф степени 8 и диаметра 2 на 27 вершинах и $\alpha_2(\bar{g}) = 54$. Тогда $\alpha_2(g) = 324$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 162$. Так как в окрестности неподвижной точки имеется ровно 12 α_2 -вершин, то $\alpha_0(g) = 324/12 = 27$; противоречие с четностью $\alpha_4(g)$.

Пусть $p = 3$. Если автоморфизм $\bar{g}$ тривиален, то $\alpha_4(g) = 486$. Если автоморфизм $\bar{g}$ нетривиален, то выполняется одна из трех возможностей.

Пусть $\alpha_1(\bar{g}) = 81$. Тогда $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 486$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 9.

Пусть $\alpha_2(\bar{g}) = 81$. Тогда $\alpha_2(g) = 486$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является объединением трех изолированных треугольников, $\alpha_1(\bar{g}) = 18$, $\alpha_2(\bar{g}) = 54$ и подграф α_1 -вершин является объединением изолированных треугольников. Тогда $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 108$, $\alpha_2(g) = 324$ и $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 54$. Так как каждая α_2 -вершина смежна не более чем с одной неподвижной точкой, то $\alpha_0(g) \leq 18$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $20\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g)$ делится на 54. Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $25\alpha_0(g) - 6\alpha_1(g)$ делится на 54, поэтому $\alpha_0(g)$ делится на 6.

Если $a \in \Omega$, то $\alpha_0(g) \geq 9$. Для $c \in \Omega \cap \Gamma_2(a)$ подграф $[a] \cap [c]$ является 2-коккликой из $\Omega(a)$; противоречие. Поэтому либо $\alpha_0(g) = 9$, $\alpha_4(g) = 45$, либо $\alpha_0(g) = 18$, $\alpha_4(g) = 36$. Но в первом случае получим противоречие с четностью $\alpha_0(g)$. Лемма и теорема 3 доказаны.

Из леммы 4.2 следует, что группа автоморфизмов G графа Γ является $\{3, 5\}$ -группой. Поэтому G не может транзитивно действовать на множестве вершин графа Γ . Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Stud. Texts, **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **18**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1989.
- [3] P. J. Cameron, J. H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links*, London Math. Soc. Stud. Texts, **22**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [4] А. А. Махнев, В. В. Носов, “Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0$ и $\mu = 3$ ”, *Проблемы теоретической и прикладной математики*, Труды 34-й Региональной молодежной конференции, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2003, 30–33.

Го Вэньбинь

Институт математики и механики Уро РАН

Поступило

14.05.2008

А. А. Махнев

Институт математики и механики Уро РАН

E-mail: makhnev@imm.uran.ru**Д. В. Падучих**

Институт математики и механики Уро РАН