Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горелов, О гипотезе Зигеля для случая линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 549–565

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 11:43:51

УДК 511.36

О ГИПОТЕЗЕ ЗИГЕЛЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. А. Горелов

Выясняется структура множества E -функций, удовлетворяющих линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$.
Библиография: 11 названий.

Введение. Метод Зигеля, опубликованный в 1929 г. (см. [1]) и в дальнейшем получивший значительное развитие, до настоящего времени остается одним из основных методов теории трансцендентных чисел. Этот метод позволяет исследовать арифметическую природу значений некоторого класса целых аналитических функций (так называемых E -функций), удовлетворяющих системам линейных дифференциальных уравнений. Современное состояние метода, связанные с ним понятия и обозначения можно найти в книге [2].

В вопросе о границах применимости метода Зигеля и в вопросах его эффективности существенное значение имеет известная гипотеза Зигеля о том, что всякая E -функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$, представляется в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от z и конечного числа гипергеометрических E -функций, а также функций, получающихся из них заменой z на αz при $\alpha \in \mathbb{A}$, где $\mathbb{A}$ – множество всех алгебраических чисел.

К гипергеометрическим E -функциям, в частности, относятся используемые в настоящей работе функции

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y' = \left(1 - \frac{\lambda}{z}\right)y + \frac{\lambda}{z},$$

и функции Куммера (они же конфлюентные, или вырожденные гипергеометрические функции)

$$A_{\mu, \nu}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu+1) \cdots (\nu+n-1)}{n! \mu(\mu+1) \cdots (\mu+n-1)} z^n, \quad \mu \neq 0, -1, \dots,$$

удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$y'' + \left(-1 + \frac{\mu}{z}\right)y' - \left(\frac{\nu}{z}\right)y = 0 \quad (1)$$

с рациональными параметрами λ, μ, ν .

Автору в работе [3] удалось доказать гипотезу Зигеля для случая дифференциальных уравнений первого порядка. Было установлено, что E -функция $f(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $f(z) = P\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *E -функция $f(z)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$f(z) = (PA_{\mu,\nu}(\alpha z) + P_1 A'_{\mu,\nu}(\alpha z))e^{\alpha_1 z}, \quad (2)$$

где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если E -функции $f_1(z), f_2(z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, то каждая из них также имеет вид (2).

2. Так как $A'_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\nu/\mu)A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)$, то для рассматриваемого в теореме случая гипотеза Зигеля справедлива.

3. Поскольку $A_{\lambda+1,1}(\alpha z) = \varphi_\lambda(\alpha z)$, а $\varphi'_\lambda(\alpha z) = (1 - \lambda/(\alpha z))\varphi_\lambda(\alpha z) + \lambda/(\alpha z)$, то при $\mu = \lambda + 1$, $\nu = 1$, $P = P_2 + (1 - \alpha z/\lambda)P_3$, $P_1 = (\alpha z/\lambda)P_3$, где $P_2, P_3 \in \mathbb{A}[z]$, равенство (2) принимает вид

$$f(z) = (P_2\varphi_\lambda(\alpha z) + P_3)e^{\alpha_1 z}. \quad (3)$$

В этом виде могут быть представлены функции $P(z) \in \mathbb{A}[z]$, $\varphi_\lambda(z)$, e^z , $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, всякая “неполная” гамма-функция

$$F_p(z) = \int_0^z t^{p-1} e^{-t} dt = \frac{z^p e^{-z} \varphi_p(z)}{p},$$

являющаяся целой, т.е. при $p \in \mathbb{N}$ (см. [2, с. 195, 197]). В виде (2) представляются также функции Куммера $A_{\mu,\nu}(z)$, функции Зигеля

$$K_\lambda(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1) \cdots (\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \dots,$$

и все целые функции Бесселя $J_p(z)$ (при $p \in \mathbb{Z}^+$), так как

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda K_\lambda(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda e^{-iz} A_{2\lambda+1, \lambda+1/2}(2iz),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция (см. [2, с. 212] и [4, с. 318]). Кроме того, в виде (2) могут быть представлены все целые функции Уиттекера (см. [4, с. 272]).

Следующая теорема дополняет результаты статьи [5].

ТЕОРЕМА 2. При условиях теоремы 1 функции $f(z)$ и $f'(z)$ алгебраически зависимы (соответственно однородно алгебраически зависимы) над $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z) = (P\varphi_\lambda(\alpha z) + P_1)e^{\sigma\alpha z}$ (соответственно $f(z) = Pe^{\alpha z}$), где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $\lambda, \sigma \in \mathbb{Q}$, причем если $\sigma \neq 0$, то $\lambda \in \mathbb{Z}^+$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. При $\sigma \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ функция $f(z)$ есть линейная комбинация показательных функций с коэффициентами из $\mathbb{A}(z)$. Например, E -функция $(\sin z)/z$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y'' + (2/z)y' + y = 0$, представляется в виде $(e^{iz} - e^{-iz})/(2iz) = e^{iz}\varphi_1(-2iz) = K_{1/2}(z)$.

2. Утверждение теоремы 2 справедливо также для алгебраически зависимых над $\mathbb{C}(z)$ E -функций $f_1(z)$, $f_2(z)$, составляющих решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

1. О дифференциальных уравнениях, которым удовлетворяют E -функции. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле алгебраических чисел, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = h$. Поля, сопряженные с $\mathbb{K}$, будем обозначать $\mathbb{K}_j$, $j = 1, \dots, h$, $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}$. Если α , $L(z_1, \dots, z_m)$, $P(z_1, \dots, z_m)$, $f(z)$ суть соответственно число из $\mathbb{K}$, линейная форма, многочлен и формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{K}$, то через $\alpha_{[j]}$, $L_{[j]}(z_1, \dots, z_m)$, $P_{[j]}(z_1, \dots, z_m)$, $f_{[j]}(z)$ соответственно будем обозначать число, линейную форму, многочлен и формальный степенной ряд, сопряженные с ними относительно поля $\mathbb{K}_j$ (см. [2, гл. 11, § 2]). Если $z_{m+1} = 1$, то линейную форму $L(z_1, \dots, z_{m+1})$ будем называть *линейной неоднородной формой* от переменных $z_1, \dots, z_m$.

ЛЕММА 1. Пусть совокупность формальных степенных рядов

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} z^n, \quad a_{k,n} \in \mathbb{K}, \quad k = 1, \dots, m, \quad m \geq 1,$$

связана алгебраическим уравнением

$$P(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \quad P = P(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}[z, z_1, \dots, z_m], \quad P \neq 0.$$

Тогда

1) ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ связаны также алгебраическим уравнением

$$P^*(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) = 0, \\ P^* = P^*(z, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z, z_1, \dots, z_m], \quad P^* \neq 0,$$

причем если некоторый числовой коэффициент в многочлене P^* отличен от нуля, то соответствующий коэффициент в P также отличен от нуля;

2) для любого такого многочлена P^* и для любого j , $1 \leq j \leq h$,

$$P_{[j]}^*(z, (f_1)_{[j]}(z), \dots, (f_m)_{[j]}(z)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать все ненулевые числовые коэффициенты многочлена P как неопределенные. Рассуждая аналогично доказательству леммы 2 § 2 гл. 3 книги [2], получим, что эти неопределенные коэффициенты удовлетворяют системе из конечного числа линейных однородных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Поэтому искомые коэффициенты могут быть выбраны из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, и первое утверждение леммы доказано. Для доказательства второго утверждения леммы заметим, что при повторении прежних рассуждений для сопряженных рядов $(f_1)_{[j]}(z), \dots, (f_m)_{[j]}(z)$ мы получим систему линейных уравнений, сопряженных с прежними. Следовательно, каждое ее решение также будет сопряженным с прежним. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть KE -функция (см. [2]) $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$Q_m y^{(m)} + Q_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + Q_0 y = Q, \quad m \geq 1, \quad (4)$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$, взаимно простыми в совокупности, и не удовлетворяет никакому линейному дифференциальному уравнению меньшего порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ (или, при $Q \equiv 0$, – никакому линейному однородному дифференциальному уравнению меньшего порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$). Тогда

- 1) коэффициенты уравнения (4) определены однозначно с точностью до множителя из $\mathbb{C}$ и могут быть выбраны из $\mathbb{K}[z]$;
- 2) при выборе коэффициентов уравнения (4) из $\mathbb{K}[z]$ всякая сопряженная функция $f_{[j]}(z)$, $1 \leq j \leq h$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(Q_m)_{[j]} y^{(m)} + (Q_{m-1})_{[j]} y^{(m-1)} + \dots + (Q_0)_{[j]} y = (Q)_{[j]}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условиях леммы функция $f(z)$, очевидно, линейно независима над $\mathbb{C}[z]$ с $f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$ и 1, а в однородном случае – с $f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$. Поэтому рациональные функции Q_k/Q_m определяются однозначно, а многочлены $Q, Q_0, \dots, Q_m$ – с точностью до множителя из $\mathbb{C}$. Отсюда, применяя лемму 1, получаем утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2, а $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Тогда существуют числа $r_1, \dots, r_m \in \mathbb{Z}^+$ такие, что для произвольной линейной неоднородной (в однородном случае – линейной) формы $L(z_1, \dots, z_m) \neq 0$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ размера H и произвольного $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq h} |L_{[j]}(f_{[j]}^{(r_1)}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(r_m)}(\xi_{[j]}))| > bH^\delta, \quad (6)$$

где $\delta = -m - \varepsilon$ (в однородном случае $\delta = 1 - m - \varepsilon$), $b > 0$ – постоянная, не зависящая от H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим функцию $f(z)$, а также многочлены Q_k в степенные ряды по степеням $\zeta = z - \xi$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \zeta^\nu, \quad Q_k = q_{k,0} + q_{k,1}\zeta + \dots + q_{k,\mu}\zeta^\mu, \\ Q = q_0 + q_1\zeta + \dots + q_\omega\zeta^\omega, \quad q_j, q_{k,l} \in \mathbb{A}, \quad \mu = \max \deg Q_k.$$

При подстановке этих разложений в уравнение (4) и приравнявании в нем коэффициентов при степенях $\zeta^{\nu-m}$ получается линейное рекуррентное соотношение для тейлоровских коэффициентов a_ν функции $f(z)$. Чтобы найти явный вид этого соотношения, заметим, что применение дифференциального оператора $q_{k,l}\zeta^l(d/d\zeta)^k$, $0 \leq k \leq m$, $0 \leq l \leq \mu$, к члену ряда $a_{\nu-s}\zeta^{\nu-s}$, $s \in \mathbb{Z}$, дает одночлен степени $\nu - s - k + l$. Поскольку $\nu - s - m \leq \nu - s - k + l \leq \nu - s + \mu$, то для получения одночлена, содержащего $\zeta^{\nu-m}$, необходимо условие $0 \leq s \leq m + \mu$. При выполнении этого условия одночлен степени $\nu - m$ можно получить из члена ряда $a_{\nu-s}\zeta^{\nu-s}$, применяя любой дифференциальный оператор $q_{m-j,s-j}\zeta^{s-j}(d/d\zeta)^{m-j}$, где $0 \leq j \leq \min(s, m)$. Коэффициент у полученного одночлена будет равен $a_{\nu-s}q_{m-j,s-j}(\nu-s) \cdots (\nu-s-m+j+1)$, если $j \leq m-1$, и

$a_{\nu-s}q_{0,s-m}$, если $j = m$ (в этом случае $s \geq m$). Складывая эти коэффициенты, находим искомое рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{m-1} a_{\nu-s} \sum_{j=0}^s q_{m-j,s-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (\nu-s-i) \\ + \sum_{s=m}^{m+\mu} a_{\nu-s} \left(\sum_{j=0}^{m-1} q_{m-j,s-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (\nu-s-i) + q_{0,s-m} \right) = q_{\nu-m}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если положить $a_{\nu} = 0$ при $\nu < 0$, $q_{k,l} = 0$ при $l < 0$ и $l > \mu$, $q_{\nu} = 0$ при $\nu < 0$ и $\nu > \omega$, то равенство (7) справедливо для всех $\nu \in \mathbb{Z}$. Запишем равенство (7) в виде

$$p_{s_0}(\nu-s_0)a_{\nu-s_0} + p_{s_0+1}(\nu-s_0)a_{\nu-s_0-1} + \dots + p_{m+\mu}(\nu-s_0)a_{\nu-m-\mu} = q_{\nu-m},$$

что равносильно

$$p_{s_0}(r)a_r + p_{s_0+1}(r)a_{r-1} + \dots + p_{m+\mu}(r)a_{r-m-\mu+s_0} = q_{r-m+s_0}, \quad (8)$$

где $p_s(x) \in \mathbb{A}[x]$, $\deg p_s(x) \leq m$, а s_0 — наименьшее из s таких, что $\sum_{j=0}^s |q_{m-j,s-j}| \neq 0$. Поскольку $Q_m \neq 0$, то $s_0 \leq \min(m, \mu)$. Как следует из равенства (7),

$$p_{s_0}(x) = \sum_{j=0}^{\min(s_0, m-1)} q_{m-j, s_0-j} \prod_{i=0}^{m-1-j} (x-i) + q_{0, s_0-m}.$$

При условиях леммы E -функция $f(z)$ не является многочленом (в однородном случае $f(z) \neq 0$). Поэтому степень трансцендентности (в однородном случае однородной трансцендентности) множества функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$ не меньше 1. Для любого $r \in \mathbb{Z}^+$ обозначим $\mathbf{L}_r$ линейное пространство над $\mathbb{A}$, порожденное числами $a_0, a_1, \dots, a_r$ и 1 (в однородном случае — $a_0, a_1, \dots, a_r$), и пусть $\mathbf{L}_{-1} = \mathbb{A}$ (в однородном случае $\mathbf{L}_{-1} = \{0\}$). Если $m_1 = \max \dim \mathbf{L}_r$, то, как следует из теоремы 1 работы [3] и соотношения (8), $1 \leq m_1 < \infty$. Обозначим через $r_{1,1}$ наименьший из индексов $r \in \mathbb{Z}^+$ со свойством $a_r \notin \mathbf{L}_{r-1}$, $r_{1,2}$ — второй по величине индекс с таким свойством и так далее до r_{1,m_1} . Подставляя в равенство (8) любое $r = r_{1,t}$, $1 \leq t \leq m_1$, получим, что $p_{s_0}(r_{1,t}) = 0$, — иначе число $a_{r_{1,t}}$ линейно зависело бы от чисел a_r с $r < r_{1,t}$ и, следовательно, принадлежало бы $\mathbf{L}_{r_{1,t}-1}$. Вообще, поскольку всякая функция $f_{[j]}(z)$, $1 \leq j \leq h$, является E -функцией, удовлетворяющей уравнению (5), то коэффициенты $a_{j,r}$ ее степенного разложения по степеням $(z - \xi_{[j]})$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(p_{s_0})_{[j]}(r)a_{j,r} + (p_{s_0+1})_{[j]}(r)a_{j,r-1} + \dots + (p_{m+\mu})_{[j]}(r)a_{j,r-m-\mu+s_0} = (q_{r-m+s_0})_{[j]},$$

а многочлен $(p_{s_0})_{[j]}(r)$ имеет не менее $m_j \geq 1$ попарно различных целых неотрицательных корней $r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}$. Положим

$$\{x_1, \dots, x_{m_0}\} = \bigcup_{j=1}^h \{r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}\}.$$

Поскольку рациональные корни многочлена не меняются при алгебраическом сопряжении и $\deg p_{s_0}(x) \leq m$, то все числа $x_1 < x_2 < \dots < x_{m_0}$ являются корнями многочлена $p_{s_0}(r)$, а $1 \leq m_0 \leq m$. При этом не исключается, что многочлен $p_{s_0}(r)$ может

иметь и другие корни из $\mathbb{Z}^+$. Очевидно, что для любого j , $1 \leq j \leq h$, среди чисел $f_{[j]}^{(x_1)}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(x_{m_0})}(\xi_{[j]})$ имеются линейно независимые и потому отличные от нуля.

Если функции

$$f^{(x_1)}(z), \dots, f^{(x_{m_0})}(z) \quad (9)$$

линейно зависимы с 1 (в однородном случае – линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$, то согласно лемме 1 найдутся многочлены $A_1(z), \dots, A_{m_0}(z), A(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, взаимно простые в совокупности и не все тождественно равные нулю (в однородном случае $A(z) \equiv 0$), такие, что

$$(A_{m_0})_{[j]}(z)f_{[j]}^{(x_{m_0})}(z) + \dots + (A_1)_{[j]}(z)f_{[j]}^{(x_1)}(z) + A_{[j]}(z) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Пусть l – наибольший из индексов, для которых $A_l(\xi) \neq 0$. Так как $(A_l)_{[j]}(\xi_{[j]}) \neq 0$ для любого j , $1 \leq j \leq h$, то отсюда следует, что число a_{j,r_l} линейно зависимо с $a_{j,r_l-1}, \dots, a_{j,0}$ и 1 (в однородном случае – с $a_{j,r_l-1}, \dots, a_{j,0}$). Но при некотором j это противоречит выбору $r_{j,1}, \dots, r_{j,m_j}$. Следовательно, функции (9) линейно независимы с 1 (в однородном случае – линейно независимы) над $\mathbb{C}(z)$. В однородном случае дополним множество этих функций до базиса в линейном пространстве над $\mathbb{C}(z)$, порожденном функциями

$$f(z), f'(z), \dots, f^{(k)}(z), \dots \quad (10)$$

Элементы этого базиса также выберем из (10) и обозначим $g_1(z), \dots, g_m(z)$. Общий случай сводится к однородному введением функции $g_0(z) \equiv 1$. Как и при доказательстве леммы 8 работы [3], для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ построим m линейно независимых линейных форм

$$L_k = b_{k,1}g_1(\xi) + \dots + b_{k,m}g_m(\xi), \quad b_{k,\lambda} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \quad k, \lambda = 1, \dots, m,$$

с условием

$$\max_{1 \leq j \leq h} |(b_{k,1})_{[j]}(g_1)_{[j]}(\xi_{[j]}) + \dots + (b_{k,m})_{[j]}(g_m)_{[j]}(\xi_{[j]})| = O(n^{-(m-1-\varepsilon)n}),$$

$$\overline{|b_{k,\lambda}|} = O(n^{(1+\varepsilon)n}), \quad k, \lambda = 1, \dots, m.$$

Среди этих линейных форм можно выбрать $m-1$ форм, линейно независимых с формой $L(g_1(\xi), \dots, g_m(\xi))$. Кроме того, согласно доказанному выше для любого j , $1 \leq j \leq h$, среди чисел $(g_1)_{[j]}(\xi_{[j]}), \dots, (g_m)_{[j]}(\xi_{[j]})$ найдутся отличные от нуля. Далее дословно повторяем рассуждения доказательства теоремы 1 гл. 11 книги [2].

ЛЕММА 4. *При условиях леммы 2 всякая особая точка $\xi \neq 0$ дифференциального уравнения (4) есть регулярная особая точка соответствующего однородного уравнения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кроме корней $x_1, \dots, x_{m_0}$, существование которых установлено при доказательстве леммы 3, многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет и другие целые неотрицательные корни. Обозначим их $d_1, \dots, d_n$. Тогда $m_0 + n \leq \deg p_{s_0}(r) \leq m$. Предположим, что функции

$$f^{(d_1)}(z), \dots, f^{(d_n)}(z), f^{(x_{m_0})}(z), \dots, f^{(x_1)}(z) \quad (11)$$

линейно зависимы с 1 (в однородном случае – линейно зависимы) над $\mathbb{C}(z)$. Рассмотрим все подмножества совокупности функций (11), содержащие множество (9) и связанные только одним линейным уравнением вида

$$B_1(z)f^{(d_{i_1})}(z) + \dots + B_k(z)f^{(d_{i_k})}(z) + B_{k+1}(z)f^{(x_{m_0})}(z) + \dots + B_{k+m_0}(z)f^{(x_1)}(z) + B(z) \equiv 0,$$

где $1 \leq k \leq n$, $d_{i_1} > d_{i_2} > \dots > d_{i_k}$, а $B_1(z), \dots, B_{k+m_0}(z), B(z)$ – взаимно простые в совокупности многочлены из $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$, не все тождественно равные нулю (в однородном случае $B(z) \equiv 0$). Пусть l – наименьший из индексов, для которых $B_l(\xi) \neq 0$. Тогда $(B_l)_{[j]}(\xi_{[j]}) \neq 0$ для любого j , $1 \leq j \leq h$. Следовательно, $l \leq k$, а

$$f_{[j]}^{(d_{i_l})}(\xi_{[j]}) = L_{[j]}(f_{[j]}^{(d_{i_{l+1}})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(d_{i_k})}(\xi_{[j]}), f_{[j]}^{(x_{m_0})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(x_1)}(\xi_{[j]})), \quad (12)$$

где $L(z_1, \dots, z_{m_0+k-l})$ – некоторая линейная неоднородная (в однородном случае – линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Если d – максимум величин d_{i_l} , стоящих в левых частях уравнений (12), то исключим функцию $f^{(d)}(z)$ из множества (11). Допустим, что после этого в нем останутся только линейно независимые с 1 (в однородном случае – линейно независимые) функции

$$f^{(d_{k_1})}(z), \dots, f^{(d_{k_{n-1}})}(z), f^{(x_{m_0})}(z), \dots, f^{(x_1)}(z). \quad (13)$$

Тогда, повторяя рассуждения леммы 3, построим множество (13) до базиса $g_1(z), \dots, g_m(z)$. Одна из этих функций, положим для определенности $g_m(z) = f^{(M)}(z)$, не принадлежит множеству (11). Равенство (8) при $r = M$ имеет вид $L^* = L^*(g_m(\xi), f^{(M-1)}(\xi), \dots, f(\xi)) = 0$, где $L^*(z_1, \dots, z_{M+1})$ – линейная неоднородная (в однородном случае – линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причем ее коэффициент при $g_m(\xi)$ есть $p_{s_0}(M) \neq 0$, так как $M \notin \{x_1, \dots, x_{m_0}, d_1, \dots, d_n\}$. Поскольку те из чисел $f^{(M-1)}(\xi), \dots, f(\xi)$, которые не являются значениями функций (13), можно представить как линейные комбинации значений функций (13), и эти представления сохраняются при алгебраическом сопряжении, то

$$L^* = L^{**}(f^{(M)}(\xi), f^{(d_{k_1})}(\xi), \dots, f^{(d_{k_{n-1}})}(\xi), f^{(x_{m_0})}(\xi), \dots, f^{(x_1)}(\xi)) = 0,$$

где $L^{**}(z_1, \dots, z_{m_0+n}) \not\equiv 0$ – линейная неоднородная (в однородном случае – линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причем

$$L_{[j]}^{**}(f_{[j]}^{(M)}(\xi_{[j]}), f_{[j]}^{(d_{k_1})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(d_{k_{n-1}})}(\xi_{[j]}), f_{[j]}^{(x_{m_0})}(\xi_{[j]}), \dots, f_{[j]}^{(x_1)}(\xi_{[j]})) = 0,$$

где $j = 1, \dots, h$. Полученное противоречие с неравенством (6) показывает, что функции (13) линейно зависимы с 1 (в однородном случае – линейно зависимы). Но тогда, повторяя предыдущие рассуждения с функциями (13) вместо (11), получим множество из m_0+n-2 функций. Вновь повторяя, при необходимости, эти рассуждения, неизбежно придем к множеству линейно независимых функций и противоречию с неравенством (6). Противоречия можно избежать лишь при условии, что функции (11) линейно независимы с 1 (в однородном случае – линейно независимы), $m_0+n = m = \deg p_{s_0}(r)$. Поэтому $q_{m,s_0} \neq 0$, $\text{ord}_{z=\xi} Q_m = s_0$, а многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет m попарно различных целых неотрицательных корней. Из определения s_0 получаем, что $q_{k,l} = 0$ при $l < k - m + s_0$

и, следовательно, $\text{ord}_{z=\xi} Q_k \geq k - m + s_0$. Тогда для любого k , $0 \leq k < m$, порядок полюса функции Q_k/Q_m в точке ξ равен

$$\text{ord}_{z=\xi} Q_m - \text{ord}_{z=\xi} Q_k \leq s_0 - (k - m + s_0) = m - k,$$

что и доказывает лемму.

Показателями дифференциального уравнения (4) (или, если $Q \neq 0$, соответствующего однородного дифференциального уравнения) в точке $z = \xi$ называются корни так называемого определяющего уравнения $F(r) = 0$. В случае регулярной особой точки, умножая дифференциальное уравнение (4) на нужную степень $(z - \xi)$, можно представить его коэффициенты в виде

$$Q_k^* = (z - \xi)^k h_k, \quad h_k \in \mathbb{A}[z - \xi], \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad h_m(\xi) \neq 0.$$

Тогда *определяющее уравнение* имеет вид

$$F(r) = r(r-1) \cdots (r-m+1)h_m(\xi) + \cdots + rh_1(\xi) + h_0(\xi) = 0 \quad (14)$$

(см., например, [6, п. 18.1]). Если функция

$$y = (z - \xi)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(z - \xi)^{\nu}, \quad a_0 \neq 0, \quad r \in \mathbb{C},$$

есть решение линейного однородного дифференциального уравнения, то r – корень его определяющего уравнения в точке ξ (см. там же).

Легко видеть, что при условиях леммы 3 $h_m(\xi) = q_{m,s_0}$, $h_{m-1}(\xi) = q_{m-1,s_0-1}, \dots$, а $F(r) \equiv p_{s_0}(r)$. В конце доказательства леммы 4 установлено, что многочлен $p_{s_0}(r)$ имеет ровно m попарно различных корней из $\mathbb{Z}^+$. Тем самым доказана

ЛЕММА 5. *При условиях леммы 3 показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (4), в точке $z = \xi$ суть m попарно различных целых неотрицательных чисел.*

Если точка $z = \xi$ является регулярной особой точкой дифференциального уравнения, то отсюда, вообще говоря, не следует, что его решения в этой точке также имеют особенности. Докажем, что в нашем случае реализуется именно эта возможность, т.е. что всякая особая точка $\xi \neq 0$ является так называемой кажущейся особенностью.

ЛЕММА 6. *При условиях леммы 3 всякое решение уравнения (4), а также соответствующего ему однородного дифференциального уравнения, голоморфно в точке $z = \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_1 < r_2 < \cdots < r_m$ – показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), в точке ξ . Докажем, что оно имеет фундаментальную систему решений, состоящую из функций вида

$$y = \sum_{\nu=r}^{\infty} a_{\nu}(z - \xi)^{\nu}, \quad a_r \neq 0, \quad (15)$$

где r пробегает множество $\{r_1, \dots, r_m\}$. Коэффициенты a_{ν} для i -го ряда, $1 \leq i \leq m$, выберем следующим образом. В качестве $a_{r_i}, \dots, a_{r_m}$ возьмем произвольные величины, а

для $\nu \notin \{r_i, \dots, r_m\}$, поскольку $p_{s_0}(\nu) \neq 0$, величину a_ν найдем из рекуррентного соотношения (8), положив в нем $q_j = 0$. Докажем, что при условиях леммы равенство (8), где считаем $q_j = 0$, справедливо и для $r = r_k$, $i \leq k \leq m$. Действительно, равенству (8) удовлетворяют тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$. При $r = r_k$ оно будет иметь вид $L = L(f^{(r_k-1)}(\xi)/(r_k-1)!, \dots, f(\xi)) = 0$, где $L(z_1, \dots, z_{r_k})$ – линейная неоднородная (в однородном случае – линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Те числа $f^{(r)}(\xi)/r!$, у которых $r \notin \{r_{k-1}, \dots, r_1\}$, с помощью равенства (8) линейно выражаются через $f^{(r_{k-1})}(\xi)/(r_{k-1})!, \dots, f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!$. Таким образом, $L = L^*(f^{(r_{k-1})}(\xi)/(r_{k-1})!, \dots, f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!) = 0$, где $L^*(z_1, \dots, z_{k-1})$ – линейная неоднородная (в однородном случае – линейная) форма с коэффициентами из $\mathbb{K}$, причем

$$L^*_{[j]} \left(\frac{f^{(r_{k-1})}_{[j]}(\xi_{[j]})}{(r_{k-1})!}, \dots, \frac{f^{(r_1)}_{[j]}(\xi_{[j]})}{(r_1)!} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, h.$$

Согласно лемме 3 $L^*(z_1, \dots, z_{k-1}) \equiv 0$. Для однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), построенная линейная форма будет совпадать с однородной частью линейной формы $L^*(z_1, \dots, z_{k-1})$ и также будет тождественно равна нулю. Но тогда, очевидно, при замене чисел $f^{(r_1)}(\xi)/(r_1)!, \dots, f^{(r_m)}(\xi)/(r_m)!$ на произвольные величины $a_{r_1}, \dots, a_{r_m}$ равенства $L = 0$ и (8) останутся справедливыми. Следовательно, ряды (15) формально удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению, соответствующему (4) и в силу сходимости таких рядов в окрестности регулярной особой точки (см. [7, п. 16.2]) и их линейной независимости мы получаем искомую фундаментальную систему решений. А так как общее решение уравнения (4) есть сумма E -функции $f(z)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения, то оно также голоморфно в точке ξ . Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если при условиях леммы 3 выполнено равенство $Q_m(\xi) = 0$, то

$$\frac{Q_k}{Q_m} = \frac{c_k}{(z-\xi)^{m-k}} + \frac{\psi_k(z)}{(z-\xi)^{m-k-1}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где $c_k \in \mathbb{Z}$, $-c_{m-1} \in \mathbb{N}$, $(-1)^m c_0 \in \mathbb{Z}^+$, $\psi_k(z) \in \mathbb{A}(z)$, $\psi_k(\xi) \neq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $Q_k/Q_m = Q_k^*/Q_m^* = (z-\xi)^{-(m-k)} h_k/h_m$, то $c_k = h_k(\xi)/h_m(\xi)$, и уравнение (14) можно переписать в виде

$$\frac{F(r)}{h_m(\xi)} = r(r-1) \cdots (r-m+1) + r(r-1) \cdots (r-m+2)c_{m-1} + \cdots + rc_1 + c_0 = 0.$$

Последовательно рассматривая в этом уравнении одночлены, содержащие r^k , $k = m-1, m-2, \dots, 0$, убеждаемся, что каждое число c_k выражается в виде линейной комбинации коэффициентов многочлена $F(r)/h_m(\xi)$ и чисел $c_{k+1}, \dots, c_{m-1}$ с целыми коэффициентами. Так как многочлен $F(r)/h_m(\xi)$ имеет целые неотрицательные корни $r_1, \dots, r_m$, то все его коэффициенты и, следовательно, $c_0, \dots, c_{m-1}$ являются целыми числами. Кроме того, $(-1)^m c_0 = r_1 \cdots r_m \geq 0$, а $c_{m-1} = 1 + 2 + \cdots + (m-1) - (r_1 + \cdots + r_m) \leq 0$. Предположим, что $c_{m-1} = 0$. Тогда $r_j = j-1$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (4). Согласно доказательству леммы 6 фундаментальную систему решений этого уравнения можно составить из функций $y_j = (z-\xi)^{j-1} \omega_j$, $j = 1, \dots, m$, где ω_j – функции, голоморфные и не равные нулю в точке $z = \xi$. Пусть наибольший порядок полюсов функций $Q_{m-1}/Q_m, \dots, Q_0/Q_m$ в точке $z = \xi$ равен p , $0 \leq p \leq m$, а l – наибольший из индексов таких, что функция Q_l/Q_m

имеет в точке $z = \xi$ полюс порядка p . Тогда, разделив однородное уравнение, соответствующее (4), на Q_m и подставив в него функцию y_{l+1} , получим, что порядок полюса $(Q_l/Q_m)y_{l+1}^{(l)}$ равен p , а порядок полюсов предыдущих и последующих слагаемых меньше p . Полученное противоречие показывает, что точка $z = \xi$ не является особой точкой однородного уравнения, соответствующего (4), и, следовательно, самого уравнения (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть при условиях леммы 2 функции $f(z), f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$ алгебраически (в однородном случае – однородно алгебраически) независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда в однородном случае наименьший показатель дифференциального уравнения (4) в точке $z = \xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ совпадает с $\text{ord}_{z=\xi} f(z)$, а в общем случае наименьший показатель однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), равен $\max \text{ord}_{z=\xi}(f(z) - P(z))$, где максимум берется по всем многочленам $P(z) \in \mathbb{A}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ – показатели однородного дифференциального уравнения, соответствующего (4), в точке ξ . В случае $Q \equiv 0$ порядок нуля функции $f(z)$ в точке ξ равен одному из r_k . Но поскольку производные функции $f(z)$ порядков $r_1, \dots, r_m$ в точке ξ однородно алгебраически независимы, то $f^{(r_1)}(\xi) \neq 0$ и $\text{ord}_{z=\xi} f(z) = r_1$. В случае $Q \neq 0$ из рекуррентного соотношения (8) получаем, что значения в точке ξ производных функции $f(z)$ до порядка $r_1 - 1$ включительно суть алгебраические числа, а значение производной порядка r_1 трансцендентно. Следовательно, разность функции $f(z)$ и произвольного многочлена с алгебраическими коэффициентами может иметь порядок нуля, не превосходящий r_1 . Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть выполнены условия леммы 8, а $P(z)$ – многочлен с алгебраическими коэффициентами, все корни которого являются нулями функции $f(z)$. Тогда $g(z) = f(z)/P(z)$ есть E-функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция $g(z)$ целая, а лемму достаточно доказать для случая $P(z) = z - \xi$, $\xi \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $Q_m(\xi) = 0$. Пусть разложения функций $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Тейлора имеют вид

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + \frac{a_n}{n!} z^n + \dots, \quad g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + \frac{b_n}{n!} z^n + \dots.$$

Тогда из равенства

$$f(z) = (z - \xi)g(z) \tag{16}$$

следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 = -\xi b_0, \quad a_1 = b_0 - \xi b_1, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{n!} = \frac{b_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\xi b_n}{n!}.$$

Умножая эти равенства соответственно на $1, \xi, \dots, \xi^n$ и складывая, получим

$$\frac{b_n}{n!} \xi^{n+1} = - \left(a_0 + a_1 \xi + \dots + \frac{a_n}{n!} \xi^n \right), \quad n = 0, 1, \dots \tag{17}$$

Пусть $\{d_n\}$ – последовательность натуральных чисел такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_A$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, и $d_n = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, умножая равенства (17) на $n!$, получим, что существует последовательность $\kappa_n = d_n (\text{den}(1/\xi))^{n+1}$ (здесь $\text{den } \alpha$ – знаменатель алгебраического числа α) со свойствами $\kappa_n \in \mathbb{N}$, $\kappa_n b_k \in \mathbb{Z}_A$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\kappa_n = O(n^{\varepsilon n})$, $n = 1, 2, \dots$.

Докажем теперь, что

$$\max_{1 \leq j \leq h} |(b_n)_{[j]}| = O(n^{\varepsilon n}),$$

где $h = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, $\mathbb{K}$ – наименьшее поле алгебраических чисел, содержащее ξ и коэффициенты $a_n/n!$ разложения функции $f(z)$. Согласно второму утверждению леммы 1 из равенства (16) получаем

$$f_{[j]}(z) = (z - \xi_{[j]})g_{[j]}(z), \quad j = 1, \dots, h. \quad (18)$$

Заметим, что $f_{[j]}(z)$ является E -функцией. Согласно лемме 2 она удовлетворяет уравнению (5). Так как $f(\xi) = 0$, то ввиду леммы 8 все показатели однородного уравнения, соответствующего (4), в точке $z = \xi$ больше нуля. Показатели однородного уравнения, соответствующего (5), в точке $z = \xi_{[j]}$ являются корнями определяющего уравнения, сопряженного с (14). Поэтому, будучи целыми числами, они не меняются при алгебраическом сопряжении и также больше нуля. Отсюда в однородном случае согласно лемме 8 получаем $f_{[j]}(\xi_{[j]}) = 0$. В общем случае из равенства (8) имеем $p_{s_0}(0)f(\xi) = q_{s_0} - m = 0$, откуда также получаем

$$f_{[j]}(\xi_{[j]}) = \left(\frac{q_{s_0} - m}{p_{s_0}(0)} \right)_{[j]} = 0.$$

Из определения E -функций и условий доказываемой леммы следует, что $f_{[j]}(z)$, как и $f(z)$, является целой функцией первого порядка. Тогда ввиду равенства (18) $g_{[j]}(z)$ также является целой функцией первого порядка. Отсюда следуют оценки $|(b_n)_{[j]}| = O(n^{\varepsilon n})$, $j = 1, \dots, h$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Всякая E -функция $f(z)$ является либо целой трансцендентной функцией первого порядка, либо многочленом. Если $f(z) \in \mathbb{A}[z]$, то утверждение теоремы справедливо. Поэтому всюду в дальнейшем будем считать, что $f(z)$ – трансцендентная функция, удовлетворяющая уравнению

$$y'' + Q_1 y' + Q_0 y = 0, \quad Q_1, Q_0 \in \mathbb{A}(z). \quad (19)$$

Наличие среди решений уравнения (19) целой функции первого порядка накладывает ограничения на рост коэффициентов Q_1 и Q_0 . Они могут быть установлены с помощью следующего утверждения, доказанного в более сильном варианте Стрелицом [8] (см. также [9, гл. 5, п. 2]).

ЛЕММА 10. Пусть $g(z)$ – функция, имеющая однозначный модуль в некоторой окрестности бесконечности, удовлетворяет уравнению (19), а ее порядок, определяемый так же, как и порядок целой функции, равен ρ . Пусть лорановскими разложениями коэффициентов уравнения (19) являются

$$Q_1 = z^{q_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{z^\nu}, \quad Q_0 = z^{q_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{z^\nu}, \quad q_0, q_1 \in \mathbb{Z}, \quad a_0 b_0 \neq 0,$$

причем не имеет место случай $q_1 \leq -1$, $q_0 \leq -2$ (т.е. случай регулярной особой точки в бесконечности, когда, очевидно, всякое целое решение есть многочлен). Тогда

- 1) если $q_0 \geq 2q_1$, то $\rho = 1 + q_0/2$;
- 2) если $q_0 < q_1$, то

- а) возможно решение $g(z) = z^\mu \psi(z)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, $\psi(z)$ голоморфна в бесконечности;
- б) для всех остальных решений $\rho = 1 + q_1$;
- 3) если $q_1 - 1 < q_0 < 2q_1$, то
- а) возможно решение $g(z) = z^\mu \exp(-\lambda_0 z^{q_0 - q_1 + 1} + \dots + \lambda) \psi(z)$, где $\mu \in \mathbb{C}$, $\psi(z)$ голоморфна в бесконечности;
- б) для всех остальных решений $\rho = 1 + q_1$.

Поскольку $\rho = 1$, то случай 3) возможен лишь при $q_0 = q_1$. Тогда $f(z) = P(z)e^{\alpha z}$, где $P(z) \in \mathbb{A}(z)$, $\alpha \in \mathbb{A}$, и утверждение теоремы выполняется. То, что случай 3) действительно может иметь место, показывает пример уравнения $y'' + zy' + (z - 2 + 2/z)y = 0$, которому удовлетворяет E -функция ze^{-z} . Случаи 1) и 2) возможны лишь при $q_0 q_1 = 0$, $q_0, q_1 \in \mathbb{Z}^-$.

Следовательно, при доказательстве теоремы можно ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения (19) вида

$$y'' + \left(a + \frac{Q_1}{Q}\right)y' + \left(b + \frac{Q_0}{Q}\right)y = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0), \quad (20)$$

где $a, b \in \mathbb{A}$, $Q_0, Q_1, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_0) < \deg Q$.

Следующие две леммы доказываются непосредственным вычислением.

ЛЕММА 11. Пусть f, Q_0, Q_1, P — произвольные аналитические функции, причем функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + Q_1 y' + Q_0 y = 0.$$

Тогда функция $g = Pf$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(Q_1 - \frac{2P'}{P}\right)y' + \left(Q_0 - \frac{P''}{P} - \left(Q_1 - \frac{2P'}{P}\right)\frac{P'}{P}\right)y = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. При условиях леммы 11 функция $g = e^{\alpha z} f$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + (Q_1 - 2\alpha)y' + (Q_0 - \alpha Q_1 + \alpha^2)y = 0.$$

ЛЕММА 12. Пусть f, Q_0, Q_1, Q — произвольные аналитические функции, причем функция f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \frac{Q_1}{Q}y' + \frac{Q_0}{Q}y = 0.$$

Тогда функция $g = f'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(\frac{Q_1}{Q} + \frac{Q'}{Q} - \frac{Q'_0}{Q_0}\right)y' + \left(\frac{Q_0}{Q} + \frac{Q'_1}{Q} - \frac{Q'_0}{Q_0} \frac{Q_1}{Q}\right)y = 0.$$

ЛЕММА 13 (см. [2, гл. 6, лемма 2]). Пусть функция $y_0 \neq 0$ удовлетворяет уравнению (20) и алгебраически зависима с y'_0 над $\mathbb{C}(z)$. Тогда существует решение y_* уравнения (20) такое, что его логарифмическая производная y'_*/y_* есть алгебраическая функция над $\mathbb{C}(z)$.

ЛЕММА 14. При условиях теоремы 2 существует решение v_* уравнения (19) такое, что $v'_*/v_* = P/S$, $P, S \in \mathbb{C}[z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функции $f = f(z)$ и f' однородно алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$, то $f'/f \in \mathbb{C}(z)$ и утверждение леммы выполняется. Если f и f' однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то рассмотрим функцию $g = \exp(az/2)y_*$, где y_* – решение уравнения (20), о котором говорится в лемме 13. Функции g и $\exp(az/2)f$ согласно следствию из леммы 11 удовлетворяют уравнению $y'' + (Q_1/Q)y' + (b^* + Q_2/Q)y = 0$, где $b^* \in \mathbb{A}$, $Q_1, Q_2, Q \in \mathbb{A}[z]$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_2) < \deg Q$. Если $b^* = 0$, то, как следует из леммы 10, $\exp(az/2)f \in \mathbb{A}[z]$ и все доказано. Пусть $b^* \neq 0$. Рассмотрим функцию $u = g'/g = y'_*/y_* + a/2$. Она является алгебраической и удовлетворяет уравнению Риккати

$$u' + u^2 + \frac{Q_1}{Q}u + b^* + \frac{Q_2}{Q} = 0, \quad Q, Q_1, Q_2 \in \mathbb{A}[z], \quad (21)$$

где $b^* \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $\max(\deg Q_1, \deg Q_2) < \deg Q$. Докажем, что $z = \infty$ не является точкой ветвления функции u . Отсюда и из леммы 6 будет следовать, что эта функция не имеет точек ветвления вообще.

Разложим функцию u в окрестности точки $z = \infty$ в степенной ряд с рациональными показателями:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{r_k}, \quad c_0 \neq 0, \quad r_0 > r_1 > r_2 > \dots \quad (22)$$

Подставив разложение (22) в уравнение (21), убеждаемся, что $r_0 = 0$, $c_0^2 = -b^*$. Если не все показатели r_k в ряду (22) целые, то пусть r_{k_1} – наибольший дробный показатель такой, что $c_{k_1} \neq 0$. Тогда, подставляя разложение (22) в уравнение (21) и рассматривая коэффициент при наибольшей дробной степени z , получаем $c_0 c_{k_1} = 0$, что противоречит нашим допущениям. Следовательно, $u \in \mathbb{C}(z)$ и лемма доказана.

Представим функцию f в виде

$$f = v_* \int w \, dz. \quad (23)$$

Тогда функция w должна удовлетворять дифференциальному уравнению $w' + (a + Q_1/Q + 2P/S)w = 0$ (см., например, [7, с. 164]). Дифференцируя равенство (23), получаем

$$f' = \left(\frac{P}{S}\right)f + v_* w, \quad (24)$$

откуда следует, что $v_* w S$ есть E -функция. Она удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению первого порядка

$$y' = \left(\frac{S'}{S} - a - \frac{Q_1}{Q} - \frac{P}{S}\right)y$$

и, следовательно, $v_* w S = R e^{\alpha z}$, где $R \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$ (см. [2, с. 189]). Тогда $v_* w = e^{\alpha z} R/S$ и, подставляя эту функцию в уравнение (24), находим, что E -функция $e^{-\alpha z} f$ удовлетворяет уравнению

$$y' = \left(\frac{P}{S} - \alpha\right)y + \frac{R}{S}.$$

Но тогда согласно теореме 2 работы [3] $e^{-\alpha z} f = P_1 \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_2$, откуда

$$f = (P_1 \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_2) e^{\alpha z}, \quad f' = \frac{(P_3 \varphi_\lambda(\alpha_1 z) + P_4) e^{\alpha z}}{z},$$

где $P_1, \dots, P_4 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha_1 \in \mathbb{A}$. Рассмотрим функцию

$$F = P_1 f' - P_3 \frac{f}{z} = \frac{e^{\alpha z} (P_1 P_4 - P_2 P_3)}{z}.$$

В случае $F \equiv 0$ или $P_1 \equiv 0$ имеем $f'/f \in \mathbb{C}(z)$ и теорема справедлива. Если же $F \neq 0$, $P_1 \neq 0$, то из условий теоремы 2 получаем, что функции f и F алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$, а отсюда следует алгебраическая зависимость функций $e^{\alpha z}$ и $\varphi_\lambda(\alpha_1 z)$. Согласно теореме 2 гл. 5 книги [2] это возможно лишь в случаях $\alpha \alpha_1 = 0$ и $\lambda \in \mathbb{Z}^+$. Но если $\lambda = k \in \mathbb{Z}^+$, то $\varphi_\lambda(z) = k!(e^z - \sum_{n=0}^{k-1} z^n/n!)/z^k$ (см. [2, гл. 5, § 2]), откуда

$$f = R_1 e^{\alpha_1 z} + R_2 e^{\alpha_2 z}, \quad f' = R_3 e^{\alpha_1 z} + R_4 e^{\alpha_2 z},$$

где $R_1, \dots, R_4 \in \mathbb{C}(z)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что функции $e^{\alpha_1 z}$ и $e^{\alpha_2 z}$ алгебраически зависимы над $\mathbb{C}(z)$ и, следовательно, числа α_1, α_2 линейно зависимы. Теорема 2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 15 (см., например, [7, с. 526]). Пусть в дифференциальном уравнении (19)

$$Q_1 = \frac{c_1}{z - \xi} + \psi_1(z), \quad Q_0 = \frac{c_0}{(z - \xi)^2} + \frac{\psi_0(z)}{z - \xi},$$

где $\xi \in \mathbb{C}$, $\psi_1(z), \psi_0(z)$ — функции, голоморфные в точке $z = \xi$. Тогда сумма и произведение показателей дифференциального уравнения (19) в точке ξ равны соответственно $1 - c_1$ и c_0 .

ЛЕММА 16. Пусть f есть E -функция, а $\theta \in \mathbb{A}[z, d/dz]$ — дифференциальный оператор минимального порядка, аннулирующий f . Тогда если $z = 0$ — особая точка дифференциального уравнения $\theta f = 0$, то она является регулярной особой точкой.

Лемма 16 следует из более сильных утверждений, полученных Ивом Андрэ (см. [10, с. 724 и 746]). Отметим, что этим же путем можно получить аналоги лемм 4 и 6 для однородного случая.

ЛЕММА 17. Пусть E -функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a + \frac{a_1}{z}\right) y' + \left(b + \frac{b_1}{z}\right) y = 0, \quad a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{A}. \quad (25)$$

Тогда $f(z)$ либо имеет вид (3), либо $f(z) = cz^l e^{-\alpha z} A_{\beta, \gamma}((2\alpha - a)z)$, $a_1, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{A}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$, причем $l = 0$ при $a_1 \notin \mathbb{Z}^-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b \neq 0$, рассмотрим функцию $g(z) = e^{\alpha z} f(z)$. Согласно следствию из леммы 11 эта функция удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a - 2\alpha + \frac{a_1}{z}\right) y' + \frac{b_1 - \alpha a_1}{z} y = 0,$$

аналогичному исходному, но уже с $b = 0$. Если $a = 2\alpha$, то, как следует из леммы 10, $g(z)$ есть многочлен и все доказано. Если $a \neq 2\alpha$, то рассмотрим функцию $g_1(z) = g(z)/(2\alpha - a)$. Она удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(-1 + \frac{a_1}{z}\right) y' - \left(\frac{\gamma}{z}\right) y = 0, \quad \gamma = \frac{\alpha a_1 - b_1}{2\alpha - a}. \quad (26)$$

Предположим, что уравнение (26) имеет два целых решения, линейно независимых над $\mathbb{C}$. Тогда общее решение уравнения (26) является однозначным и $g_1(z)$ представляется в виде

$$R_1 e^{\alpha_1 z} + R_2 e^{\alpha_2 z} = (R_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)z} + R_2) e^{\alpha_2 z},$$

где $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(z)$ (см. [6, п. 18.6], или [7, п. 15.5]). Но тогда E -функция $g_1(z) e^{-\alpha_2 z} = R_1 e^{(\alpha_1 - \alpha_2)z} + R_2$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению первого порядка с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$. Согласно теореме 2 работы [3] имеет место разложение $g_1(z) e^{-\alpha_2 z} = P \varphi_\lambda(\alpha z) + P_1$, где $P, P_1 \in \mathbb{A}[z]$, и лемма справедлива. Предположим теперь, что уравнение (26) имеет, с точностью до множителя из $\mathbb{C}$, только одно целое решение. Тогда при $a_1 \notin \mathbb{Z}^-$ это решение есть функция Куммера и, следовательно, $g(z)/(2\alpha - a) = c A_{a_1, \gamma}(z)$, $c \in \mathbb{C}$. Отсюда получаем, что $f(z) = c e^{-\alpha z} A_{a_1, \gamma}((2\alpha - a)z)$, $c \in \mathbb{A}$ и $A_{a_1, \gamma}((2\alpha - a)z)$ есть E -функция. Но тогда $a_1, \gamma \in \mathbb{Q}$ или выполняется равенство (3) (см. [11] и [2, с. 228]). Если же $a_1 \in \mathbb{Z}^-$, то согласно лемме 11 $g(z)/(2\alpha - a) = cz^{1-a_1} A_{2-a_1, \gamma-a_1+1}(z)$ и лемма также справедлива.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Достаточность ее условий следует из того, что функция $f(z)$, заданная равенством (2), линейно зависима с $f'(z)$ и $f''(z)$ над $\mathbb{C}(z)$. Для доказательства необходимости, как уже было установлено, можно ограничиться рассмотрением случая, когда функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (20) и однородно алгебраически независима с $f'(z)$ над $\mathbb{C}(z)$. Обозначим $\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_0 = 0$ все конечные особые точки уравнения (20). Пусть функция $f(z)$ имеет в точке ξ_j , $0 \leq j \leq m$, нуль кратности $n_j \geq 0$. Рассмотрим многочлен $P = z^{n_0}(z - \xi_1)^{n_1} \dots (z - \xi_m)^{n_m}$ и функцию $g(z) = f(z)/P$. Согласно леммам 9, 11, 4, 16 $g(z)$ является E -функцией и удовлетворяет дифференциальному уравнению вида (20), не имеющему особых точек, отличных от $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$, причем всякая особая точка является регулярной. Поскольку $g(\xi_j) \neq 0$, $j = 0, 1, \dots, m$, то один из показателей дифференциального уравнения в каждой точке ξ_j равен нулю. Отсюда ввиду леммы 15 получаем, что функция Q_0/Q может иметь полюсы не более чем первого порядка. Тогда из леммы 7 следует, что функция $g(z)$ удовлетворяет либо дифференциальному уравнению (25), либо дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a - \frac{a_0}{z} - \frac{k_1}{z - \xi_1} - \dots - \frac{k_m}{z - \xi_m}\right) y' + \left(b + \frac{b_0}{z} + \frac{b_1}{z - \xi_1} + \dots + \frac{b_m}{z - \xi_m}\right) y = 0, \quad (27)$$

где $a, a_0, b, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{A}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $\xi_j \in \mathbb{A}$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $k = k_1 + \dots + k_m$. Индукцией по k докажем, что все E -функции, удовлетворяющие уравнениям вида (27) и, следовательно, $g(z)$ представляются в виде

$$(R A_{\mu, \nu}(\alpha z) + R_1 A'_{\mu, \nu}(\alpha z)) e^{\alpha_1 z}, \quad (28)$$

где $R, R_1 \in \mathbb{A}(z)$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$. Если $k = 0$, то данное утверждение выполняется согласно лемме 17. Предположим, что утверждение справедливо для всех E -функций, удовлетворяющих произвольным дифференциальным уравнениям вида (27) при любых $m \in \mathbb{Z}^+$, $k \leq n - 1$, $n \geq 1$, и докажем его для $k = n$. Если $b_m \neq 0$, рассмотрим функцию $g_1(z) = \exp(-b_m z/k_m)g(z)$. Согласно следствию из леммы 11 функция $g_1(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \left(a^* - \frac{a_0}{z} - \frac{k_1}{z - \xi_1} - \dots - \frac{k_m}{z - \xi_m} \right) y' + \left(b^* + \frac{b_0^*}{z} + \frac{b_1^*}{z - \xi_1} + \dots + \frac{b_{m-1}^*}{z - \xi_{m-1}} \right) y = 0,$$

где $a^*, b^*, b_0^*, \dots, b_{m-1}^* \in \mathbb{A}$, которое можно записать в виде

$$y'' + \frac{Q_2}{z(z - \xi_1) \dots (z - \xi_m)} y' + \frac{Q_3}{z(z - \xi_1) \dots (z - \xi_m)} y = 0, \quad (29)$$

где $Q_2, Q_3 \in \mathbb{A}[z]$, $\deg Q_2 \leq m + 1$. Если $Q_3 \equiv 0$, то $g_1(z) = R e^{\alpha z}$, $R \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha \in \mathbb{A}$, и доказываемое утверждение справедливо. Если $Q_3 \neq 0$, то $Q_3 = z^{l_0}(z - \xi_1)^{l_1} \dots \times (z - \xi_m)^{l_m} Q_4$, $Q_4 \in \mathbb{A}[z]$, $l_j \geq 0$, $l_m \geq 1$, $\deg Q_4 = t \leq m + 1 - (l_0 + l_1 + \dots + l_m)$, $Q_4 = c(z - \beta_1)^{t_1} \dots (z - \beta_s)^{t_s}$, $t_i \in \mathbb{N}$, $\beta_i \neq \beta_j$, $\beta_i \neq \xi_j$, $c \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. Согласно лемме 12 функция $g_1'(z)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left(a^* + \frac{1 - a_0 - l_0}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{k_j - 1 + l_j}{z - \xi_j} - \sum_{i=1}^s \frac{t_i}{z - \beta_i} \right) y' + \left(\frac{a_0 l_0}{z^2} + \sum_{j=1}^m \frac{k_j l_j}{(z - \xi_j)^2} + \frac{Q_5}{z(z - \xi_1) \dots (z - \xi_m)(z - \beta_1) \dots (z - \beta_s)} \right) y = 0, \quad (30)$$

где $Q_5 \in \mathbb{A}[z]$. Показатели дифференциального уравнения (30) в точке $\xi_j \neq 0$ согласно лемме 15 равны l_j и k_j (в точке ξ_0 — соответственно l_0 и a_0). Ввиду леммы 8 порядок нуля функции $g_1'(z)$ в точке $\xi_j \neq 0$ равен $l_j^* = \min(l_j, k_j)$, $l_m^* \geq 1$. Рассмотрим функцию $g_2(z) = g_1'(z)/P_1(z)$, где $P_1(z) = z^{l_0^*}(z - \xi_1)^{l_1^*} \dots (z - \xi_m)^{l_m^*}$, $l_0^* = \text{ord}_{z=0} g_1'(z)$. Согласно леммам 9, 11 и 15 $g_2(z)$ является E -функцией, удовлетворяющей дифференциальному уравнению, коэффициент которого при y имеет полюсы не более чем первого порядка, а коэффициент при y' равен

$$a^* + \frac{1 - a_0 - l_0 + 2l_0^*}{z} - \sum_{j=1}^m \frac{k_j - 1 + l_j - 2l_j^*}{z - \xi_j} - \sum_{i=1}^s \frac{t_i}{z - \beta_i}.$$

Величина k у полученного дифференциального уравнения не превосходит $n + t - m + (l_1 + \dots + l_m) - 2(l_1^* + \dots + l_m^*) \leq n + 1 - 2(l_1^* + \dots + l_m^*) \leq n - 1$. Согласно индуктивному предположению функция $g_2(z)$ и, следовательно, $g_1'(z)$, имеет вид (28). Но тогда из уравнения (29), которому удовлетворяет функция $g_1(z)$, получаем, что $g_1(z)$ и $g(z)$ также имеют вид (28). Поскольку $g(z) = f(z)/P(z)$, то тем самым доказана представимость функции $f(z)$ в виде (28) или, что равносильно, в виде

$$f(z) = \left(\frac{P_2 A_{\mu, \nu}(\alpha z) + P_3 A'_{\mu, \nu}(\alpha z)}{P_4} \right) e^{\alpha_1 z}, \quad (31)$$

где P_2, P_3, P_4 – многочлены с алгебраическими коэффициентами, взаимно простые в совокупности. Предположим, что многочлен P_4 имеет корень $\xi \neq 0$. Тогда из равенства (31) следует однородная алгебраическая зависимость чисел $A_{\mu,\nu}(\alpha\xi), A'_{\mu,\nu}(\alpha\xi)$. Согласно первой основной теореме Шидловского (см. [2, гл. 3]) отсюда получаем, что функции $A_{\mu,\nu}(z), A'_{\mu,\nu}(z)$ должны быть однородно алгебраически зависимыми над $\mathbb{C}(z)$. Но тогда функция $A_{\mu,\nu}(z)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению первого порядка и поэтому $A_{\mu,\nu}(z) = P_5 e^{\alpha_2 z}$, $P_5 \in \mathbb{A}[z]$. Из равенства (31) $f(z) = R_2 e^{\alpha_3 z}$, где $R_2 \in \mathbb{A}(z)$. Но поскольку $f(z)$ есть E -функция, то $R_2 \in \mathbb{A}[z]$ и утверждение теоремы выполняется. Осталось разобрать случай, когда $P_4 = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда равенство (31) имеет вид

$$f(z) = \left(\left(\frac{p_{-n}}{z^n} + \dots + p_0 + \dots + p_t z^t \right) A_{\mu,\nu}(\alpha z) + \left(\frac{q_{-n}}{z^n} + \dots + q_0 + \dots + q_t z^t \right) A'_{\mu,\nu}(\alpha z) \right) e^{\alpha_1 z}, \quad (32)$$

где $t \in \mathbb{Z}^+$, $p_j, q_j \in \mathbb{A}$, $j = -n, \dots, t$, $(p_{-n}, q_{-n}) \neq (0, 0)$. Так как правая часть равенства (32) должна быть целой функцией, то $p_{-n} + q_{-n}\nu/\mu = 0$. Из уравнения (1) получаем $A_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\mu/\nu - \alpha z/\nu) A'_{\mu,\nu}(\alpha z) + (\alpha z/\nu) A''_{\mu,\nu}(\alpha z)$. Подставив это выражение в равенство (32) и учитывая, что $A'_{\mu,\nu}(\alpha z) = (\nu/\mu) A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z)$, получим

$$f(z) = \left(\left(\frac{p_{-n+1}^*}{z^{n-1}} + \dots + p_0^* + \dots + p_{t+1}^* z^{t+1} \right) A_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z) + \left(\frac{q_{-n+1}^*}{z^{n-1}} + \dots + q_0^* + \dots + q_{t+1}^* z^{t+1} \right) A'_{\mu+1,\nu+1}(\alpha z) \right) e^{\alpha_1 z},$$

где $p_j^*, q_j^* \in \mathbb{A}$, $j = -n+1, \dots, t+1$. Повторив эту процедуру не более чем n раз, приходим к равенству

$$f(z) = (P_6 A_{\mu+m,\nu+m}(\alpha z) + P_7 A'_{\mu+m,\nu+m}(\alpha z)) e^{\alpha_1 z},$$

где $P_6, P_7 \in \mathbb{A}[z]$, $\alpha, \alpha_1 \in \mathbb{A}$, $\mu, \nu \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$. Следовательно, $f(z)$ имеет вид (2). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929–1930. № 1. P. 1–70.
- [2] Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
- [3] Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений E -функций в особых точках и гипотезе Зигеля // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 2. С. 174–190.
- [4] Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963.
- [5] Шидловский А. Б. О трансцендентности значений E -функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 5. С. 75–84.
- [6] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.
- [7] Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
- [8] Стрелиц III. И. О росте решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1958. Т. 46. № 4. С. 433–450.
- [9] Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: ФМ, 1960.
- [10] Andre Y. Séries Gevrey de type arithmétique // Ann. of Math. 2000. V. 151. P. 705–756.
- [11] Галочкин А. И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E -функций // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 1. С. 3–14.