Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Иконникова, Проблема делителей Ингама на множестве чисел без k -х степеней, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 383–401

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:50:54

УДК 512.542

ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ ИНГАМА НА МНОЖЕСТВЕ ЧИСЕЛ БЕЗ k -Х СТЕПЕНЕЙ

Т. К. Иконникова

Пусть целые фиксированные k и l такие, что $k \geq 2$ и $l \geq 2$, M_k – множество чисел без k -х степеней и $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. В статье получены асимптотические оценки сумм $\sum \tau(n)\tau(n+1)$ по $n \leq x$, $n \in M_k$.

Библиография: 5 названий.

Введение. Пусть $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, где целое $n \geq 1$, и $S(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) \cdot \tau(n+1)$.

В 1927 году Ингам [1] сформулировал задачу: найти оптимальный остаток в следующем асимптотическом равенстве:

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) \cdot \tau(n+1) = A_1 x \cdot \ln^2 x + R(x), \quad \text{где} \quad A_1 = \frac{6}{\pi^2}.$$

В этой же работе Ингам доказал, что $R(x) = O(x \ln x)$, $x \rightarrow \infty$.

В 1931 году Эстерман [2] усилил результат Ингама, доказав, что

$$S(x) = A_1 x \cdot \ln^2 x + A_2 x \cdot \ln x + A_3 x + O(x^{11/12} \cdot \ln x), \quad x \rightarrow \infty,$$

где A_2 и A_3 – некоторые постоянные.

В 1979 году Д. Исмоилов [3] и Д. Хиз-Браун [4], в свою очередь, независимо друг от друга усилили результат Эстермана: в равенстве Эстермана ими был получен остаток $O(x^{5/6+\varepsilon})$, где $x \rightarrow \infty$, а ε – произвольное фиксированное положительное число.

В 2000 году А. И. Павлов [5] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть арифметическая функция F удовлетворяет условиям:

- 1) F мультипликативна;
- 2) если $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, то существует $\alpha > 0$ такое, что при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство $f(n) = O(n^{-\alpha})$.

Тогда существуют постоянные A_1, A_2, A_3 такие, что для любого $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\sum_{n \leq x} F(n) \cdot \tau(n) \cdot \tau(n+1) = A_1 x \ln^2 x + A_2 x \ln x + A_3 x + O(x^{5/6+\varepsilon} + x^{1-\alpha/6+\varepsilon}).$$

Прежде чем формулировать основные результаты данной работы, напомним одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если целое $k \geq 2$, то M_k — множество всех натуральных чисел m таких, что для любого простого p выполняется условие $p^k \nmid m$.

Далее будем предполагать, что целые $k \geq 2$ и $l \geq 2$ фиксированы.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$T^{(k)}(x) = \sum_{n \leq x, n \in M_k} \tau(n) \cdot \tau(n+1).$$

Тогда существуют постоянные $A^{(k)}$, $B^{(k)}$, $C^{(k)}$ такие, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$T^{(k)}(x) = A^{(k)}x \cdot \ln^2 x + B^{(k)}x \cdot \ln x + C^{(k)}x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}),$$

причем

$$A^{(k)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} \right) > 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$S^{(k,l)}(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M_k, n+1 \in M_l}} \tau(n) \cdot \tau(n+1).$$

Тогда существуют постоянные $D^{(k,l)}$, $E^{(k,l)}$, $F^{(k,l)}$ такие, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $x \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$S^{(k,l)}(x) = D^{(k,l)}x \cdot \ln^2 x + E^{(k,l)}x \cdot \ln x + F^{(k,l)}x + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где $h = \min(k, l)$, причем

$$D^{(k,l)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \right) > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Если $k = l$, то

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M_k, n+1 \in M_k}} \tau(n) \cdot \tau(n+1) = D^{(k)}x \cdot \ln^2 x + E^{(k)}x \cdot \ln x + F^{(k)}x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}),$$

где $D^{(k)} = D^{(k,k)}$, $E^{(k)} = E^{(k,k)}$, $F^{(k)} = F^{(k,k)}$, причем

$$D^{(k)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{2k+2}{p^k} + \frac{4k+2}{p^{k+1}} - \frac{2k}{p^{k+2}} \right) > 0.$$

Постоянные в знаке O в теоремах 1 и 2 зависят только от ε и k, l .

При доказательстве обеих теорем будет использоваться следующий результат Хиз-Брауна [4].

ТЕОРЕМА. Пусть

$$D(x, q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \tau(n).$$

Тогда при произвольном фиксированном положительном ε и $x \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} D(x, q, a) = \frac{x}{q^2} & \left(\sum_{t|(a, q)} \sum_{s|qt^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{q}{ts}\right) \left(\ln \frac{x}{q^2} + 2\gamma - 1 \right) \right. \\ & \left. + 2 \sum_{t|(a, q)} \sum_{s|qt^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{q}{ts}\right) \ln s \right) + R(x), \end{aligned}$$

где $R(x) = O(x^{1/3+\varepsilon})$ равномерно по $1 \leq q = O(x^{2/3})$, γ – константа Эйлера, (a, q) – наибольший общий делитель чисел a и q .

Кроме того, нетрудно доказать, что если

$$\chi_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in M_k, \\ 0, & \text{если } n \notin M_k, \end{cases}$$

– характеристическая функция множества M_k , то она имеет вид $\chi_k(n) = \sum_{d^k|n} \mu(d)$.

1. Доказательство теоремы 2. Пользуясь определением функции $\tau(n)$ и разбивая на области так же, как в классической проблеме делителей Дирихле, получим

$$S^{(k, l)}(x) = \sum_{\substack{mn \leq x \\ mn \in M_k, mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1) = 2S_1^{(k, l)}(x) - S_2^{(k, l)}(x),$$

где

$$\begin{aligned} S_1^{(k, l)}(x) &= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq xm^{-1} \\ mn \in M_k, mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1), \\ S_2^{(k, l)}(x) &= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ mn \in M_k, mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1). \end{aligned}$$

Сначала найдем асимптотику $S_1^{(k, l)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$.

Согласно определению $S_1^{(k, l)}(x)$ и известному свойству чисел из M_k

$$\begin{aligned} S_1^{(k, l)}(x) &= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq xm^{-1} \\ mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1) \sum_{d^k|mn} \mu(d) \\ &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq xm^{-1} \\ mn+1 \in M_l, mn \equiv 0 \pmod{d^k}}} \tau(mn+1). \end{aligned}$$

Пусть в последней сумме $mn + 1 = q$. Тогда

$$\sum_{\substack{n \leq x m^{-1} \\ mn+1 \in M_l, mn \equiv 0 \pmod{d^k}}} \tau(mn+1) = \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1, q \in M_l \\ q \equiv 1 \pmod{m}, q \equiv 1 \pmod{d^k}}} \tau(q).$$

Следовательно, если $(m, d^k) = a$, то система сравнений

$$\begin{cases} q \equiv 1 \pmod{m}, \\ q \equiv 1 \pmod{d^k} \end{cases}$$

эквивалентна сравнению $q \equiv 1 \pmod{d^k m a^{-1}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_1^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ (m, d^k) = a}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1, q \in M_l \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m a^{-1}}}} \tau(q) \\ &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1, q \in M_l \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q). \end{aligned} \quad (1)$$

Разобьем в равенстве (1) сумму по d на две: в первой сумме $1 \leq d \leq x^{1/(6k)}$, во второй $x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}$. Тогда

$$S_1^{(k,l)}(x) = S_3^{(k,l)}(x) + R_1^{(k,l)}(x),$$

где

$$\begin{aligned} S_3^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1, q \in M_l \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q), \\ R_1^{(k,l)}(x) &= O\left(\sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \right). \end{aligned}$$

Внутренняя сумма в $R_1^{(k,l)}(x)$ пустая при $d^k m > x$; иначе из $q \equiv 1 \pmod{d^k m}$ следует $q = 1 + d^k m \cdot n$, где $1 \leq n \leq x/(d^k m)$, поскольку $2 \leq q \leq x+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} R_1^{(k,l)}(x) &= O\left(x^\varepsilon \sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{n \leq x/d^k m^{-1}} 1 \right) \\ &= O\left(x^\varepsilon \sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \frac{x}{d^k m} \right) \\ &= O\left(x^{1+\varepsilon} \sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \frac{1}{d^k} \right) = O(x^{1+\varepsilon} \cdot (x^{1/(6k)})^{1-k}) = O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}). \end{aligned}$$

В $S_3^{(k,l)}(x)$, используя характеристическую функцию множества M_l , получим

$$S_3^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \sum_{\delta^l | q} \mu(\delta)$$

$$= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\delta \leq (x+1)^{1/l}} \mu(\delta) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1})=1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m} \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l}}} \tau(q).$$

Покажем, что если $m \leq \sqrt{x}$ и $\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}$, то $d^k m \delta^l \leq (x+1)^{2/3}$.

Действительно, из $\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}$ следует $\delta^l d^k \leq x^{1/6}$, поэтому $\delta^l d^k m \leq x^{1/6} m \leq x^{1/6} \sqrt{x} = x^{2/3} \leq (x+1)^{2/3}$.

Разобьем сумму по δ на три: в первой сумме $1 \leq \delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}$, во второй $x^{1/(6l)} < \delta \leq x^{1/(6l)}$, в третьей $x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}$. Тогда

$$S_3^{(k,l)}(x) = S_4^{(k,l)}(x) + R_2^{(k,l)}(x) + R_3^{(k,l)}(x),$$

где

$$S_4^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}} \mu(\delta) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1})=1}} \sum_{\substack{q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m} \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l}}} \tau(q),$$

$$R_2^{(k,l)}(x) = O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq x^{1/(6l)}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x}a^{-1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m} \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l}}} \tau(q) \right),$$

$$R_3^{(k,l)}(x) = O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x}a^{-1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m} \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l}}} \tau(q) \right).$$

Заметим, что если $d^k \mid (q-1)$ и $\delta^l \mid q$, то $(d, \delta) = 1$. Аналогично, если $m \mid (q-1)$ и $\delta^l \mid q$, то $(m, \delta) = 1$. Следовательно, система сравнений

$$\begin{cases} q \equiv 1 \pmod{d^k m}, \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l} \end{cases}$$

имеет единственное решение $q \equiv r \pmod{d^k m \delta^l}$. Причем $(r, d^k m \delta^l) = \delta^l$, так как $\delta^l \mid r$ и $(r, d^k m) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} R_2^{(k,l)}(x) &= O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq x^{1/(6l)}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x}a^{-1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv r \pmod{d^k m \delta^l}}} \tau(q) \right) \\ &= O\left(x^\varepsilon \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq x^{1/(6l)}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x}a^{-1}} \left(\frac{x+1}{d^k m \delta^l} + 1 \right) \right) \\ &= O\left(x^{1+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{1}{d^k} \sum_{x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq x^{1/(6l)}} \frac{1}{\delta^l} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O\left(x^{1+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{1}{d^k} (x^{1/(6l)} d^{-k/l})^{1-l}\right) \\
&= O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l}\right).
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l}\right) = O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где $h = \min(k, l)$. Действительно, если $k = l$, то

$$\begin{aligned}
O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l}\right) &= O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6l)}} d^{-1}\right) \\
&= O(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon});
\end{aligned}$$

если $k > l$, то

$$O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l}\right) = O(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon});$$

если $k < l$, то

$$\begin{aligned}
O\left(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l}\right) &= O(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon} (x^{1/(6k)})^{1-k/l}) \\
&= O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Теперь оценим $R_3^{(k,l)}(x)$. Напомним, что

$$R_3^{(k,l)}(x) = O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x}a^{-1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m} \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l}}} \tau(q)\right).$$

Из сравнения $q \equiv 1 \pmod{d^k m}$ следует, что $q = 1 + d^k m \cdot u$, где $1 \leq u \leq x/(d^k m)$. Аналогично, из сравнения $q \equiv 0 \pmod{\delta^l}$ следует, что $q = \delta^l \cdot \nu$, где $1 \leq \nu \leq (x+1)/\delta^l$. Таким образом, если $\tau_3(N) = \sum_{\substack{x_1, x_2, x_3 \geq 1 \\ x_1 x_2 x_3 = N}} 1$, то

$$\begin{aligned}
R_3^{(k,l)}(x) &= O\left(x^\varepsilon \sum_{x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \sum_{\nu \leq (x+1)/\delta^l} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{u \geq 1 \\ d^k \cdot m \cdot u = \delta^l \nu - 1}} 1\right) \\
&= O\left(x^\varepsilon \sum_{x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \sum_{\nu \leq (x+1)/\delta^l} \tau_3(\delta^l \nu - 1)\right) \\
&= O\left(x^\varepsilon \sum_{x^{1/(6l)} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \frac{x+1}{\delta^l}\right) = O(x^{1+\varepsilon} (x^{1/(6l)})^{1-l}) \\
&= O(x^{5/6+1/(6l)+\varepsilon}).
\end{aligned}$$

При этом было использовано равенство $\tau_3(N) = O(N^\varepsilon)$, где $N \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$ и фиксировано.

Таким образом,

$$S_1^{(k,l)}(x) = S_4^{(k,l)}(x) + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}). \quad (2)$$

Теперь найдем асимптотику $S_4^{(k,l)}(x)$ в равенстве (2). Имеем

$$S_4^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \mu(\delta) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \sum_{\substack{q \leq x+1, q \equiv r \pmod{d^k m \delta^l} \\ (r, d^k m \delta^l)=\delta^l}} \tau(q).$$

Следовательно, применяя теорему Хиз-Брауна, получим

$$\begin{aligned} S_4^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \mu(\delta) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{x+1}{(d^k m \delta^l)^2} \\ &\quad \times \left(\sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right) \cdot \left(\ln \frac{x+1}{(d^k m \delta^l)^2} + 2\gamma - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right) \ln s \right) \\ &\quad + O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x} a^{-1}} x^{1/3+\varepsilon} \right) \\ &= x(\ln x + 2\gamma - 1) \cdot S_5^{(k,l)}(x) + x \cdot S_6^{(k,l)}(x) \\ &\quad + O\left(x^{1/3+\varepsilon} \sqrt{x} \cdot x^{1/(6l)} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} d^{-k/l} \right) \\ &= x(\ln x + 2\gamma - 1) \cdot S_5^{(k,l)}(x) + x \cdot S_6^{(k,l)}(x) + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_5^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2l}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m^2} \\ &\quad \times \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right), \\ S_6^{(k,l)}(x) &= 2 \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2l}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m^2} \\ &\quad \times \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right) \ln\left(\frac{s}{d^k m \delta^l}\right). \end{aligned}$$

Заменяя во внутренней сумме для $S_5^{(k,l)}(x)$ переменную s на $d^k m \delta^l / (ts)$, получим

$$\begin{aligned} S_5^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2l}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m^2} \\ &\quad \times \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot \frac{d^k m \delta^l}{ts} \cdot \mu(s) \\ &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m} \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} \frac{\mu(s)}{s}. \end{aligned}$$

Делая суммирование по s внешним и заменяя t на δ^l / t , получим

$$\begin{aligned} S_5^{(k,l)}(x) &= \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \sum_{a|d^k} \sum_{t|\delta^l} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1 \\ m d^k t \equiv 0 \pmod{s}}} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s} \sum_{b|s} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1 \\ m \equiv 0 \pmod{sb^{-1}}}} \frac{1}{m} \\ &= \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \\ &\quad \times \sum_{\substack{a|d^k \\ (d^k \delta a^{-1}, sb^{-1})=1}} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \sum_{\substack{f \leq b(sa)^{-1} \sqrt{x} \\ (f, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{f}. \end{aligned}$$

Воспользуемся равномерной по $a \geq 1$ асимптотикой

$$\sum_{\substack{m \leq T \\ (m, a)=1}} \frac{1}{m} = \frac{\varphi(a)}{a} (\ln T + \gamma) - \sum_{d|a} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O\left(\frac{\tau(a)}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty.$$

Получим

$$\begin{aligned} S_5^{(k,l)}(x) &= \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \\ &\quad \times \sum_{\substack{a|d^k \\ (d^k \delta a^{-1}, sb^{-1})=1}} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \left(\frac{\varphi(d^k \delta a^{-1})}{d^k \delta a^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{b\sqrt{x}}{sa} + \gamma \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q|d^k \delta a^{-1}} \frac{\mu(q) \ln q}{q} + O\left(\frac{\tau(d^k \delta a^{-1}) sa}{b\sqrt{x}}\right) \right). \end{aligned}$$

Меняя в последнем равенстве a на d^k/a и раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned}
 S_5^{(k,l)}(x) = & \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \\
 & \times \sum_{\substack{a|d^k \\ (\delta a, sb^{-1})=1}} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \frac{\varphi(\delta a)}{\delta a} \\
 & + \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l} \\ (\delta, d)=1}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \\
 & \times \sum_{\substack{a|d^k \\ (\delta a, sb^{-1})=1}} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \sum_{q|a\delta} \frac{\mu(q)}{q} \ln \frac{ba}{sd^k q} \\
 & + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{s \leq x^{2/3}} \frac{1}{s} \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{1}{d^k} \sum_{\delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}} \frac{\tau(\delta)}{\delta^l} \sum_{a|d^k} \frac{\tau(a)}{a} d^k \sum_{t|\delta^l} 1 \right).
 \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались равенством $\tau(\delta a) = \tau(\delta) \cdot \tau(a)$, поскольку $(\delta, a) = 1$. Пусть

$$\begin{aligned}
 D^{(k,l)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta=1 \\ (\delta, d)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \cdot \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{a|d^k \\ (a\delta, sb^{-1})=1}} \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} 1, \\
 D_1^{(k,l)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta=1 \\ (\delta, d)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \sum_{\substack{a|d^k \\ (a\delta, sb^{-1})=1}} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k, s)=b}} \sum_{q|a\delta} \frac{\mu(q)}{q} \ln \frac{ba}{sd^k q}.
 \end{aligned}$$

Тогда, переходя в выражении для $S_5^{(k,l)}(x)$ к бесконечным суммам, получим

$$S_5^{(k,l)}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) D^{(k,l)} + D_1^{(k,l)} + R_4^{(k,l)}(x),$$

где $R_4^{(k,l)}(x)$ содержит “хвосты” бесконечных рядов.

Покажем, что ряды для $D^{(k,l)}$ и $D_1^{(k,l)}$ сходятся. Заметим, что $t \mid \delta^l$ и $(d, \delta) = 1$; следовательно, $(t, d^k) = 1$. Поскольку $b \mid td^k$ и $(t, d^k) = 1$, то $b = b_1 b_2$, где $b_1 \mid t$ и $b_2 \mid d^k$. Так как s бесквадратное, $b \mid s$ и $b = b_1 b_2$, то b_1 и b_2 – тоже бесквадратные. Поэтому $b_1 \mid \delta$ и $b_2 \mid d$.

Пользуясь этим, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C = C(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned}
 |D^{(k,l)}| &< C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{b_1 b_2 | s} \frac{1}{b_1^{l-1} b_2^{k-1}} \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^k} \sum_{\delta_1=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_1^l} (b_1 b_2)^{\varepsilon} d_1^{\varepsilon} \delta_1^{\varepsilon} \\
 &\leq C \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{b|s} \frac{1}{b^{h-1-\varepsilon}} \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{k-\varepsilon}} \sum_{\delta_1=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_1^{l-\varepsilon}},
 \end{aligned}$$

что и доказывает сходимость ряда, определяющего $D^{(k,l)}$, так как $h = \min(k, l) \geq 2$. Пользуясь тем, что

$$\left| \ln \frac{ba}{sd^k q} \right| \leq \ln b + \ln s + \ln a + \ln q + \ln d^k = O(\ln s + \ln d) = O(s^\varepsilon \cdot d^\varepsilon),$$

получим

$$|D_1^{(k,l)}| \leq C' \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{b|s} \frac{1}{b^{h-1}} \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^k} \sum_{\delta_1=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_1^l} d_1^\varepsilon \delta_1^\varepsilon s^\varepsilon b^\varepsilon.$$

Следовательно, ряд для $D_1^{(k,l)}$ тоже сходится. Рассуждая аналогично, получим

$$R_4^{(k,l)}(x) = O(x^{-1/6+1/(6h)+\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$S_5^{(k,l)}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) D^{(k,l)} + D_1^{(k,l)} + O(x^{-1/6+1/(6h)+\varepsilon}).$$

Аналогично, преобразовывая $S_6^{(k,l)}(x)$, получим

$$S_6^{(k,l)}(x) = -2 \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) D_2^{(k,l)} - 2D_3^{(k,l)} + O(x^{-1/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где $D_2^{(k,l)}$ и $D_3^{(k,l)}$ — константы. Таким образом,

$$S_1^{(k,l)}(x) = \frac{1}{2} D^{(k,l)} x \ln^2 x + G^{(k,l)} \cdot x \ln x + H^{(k,l)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где

$$\begin{aligned} G^{(k,l)} &= \left(2\gamma - \frac{1}{2} \right) D^{(k,l)} + D_1^{(k,l)} - D_2^{(k,l)}, \\ H^{(k,l)} &= (2\gamma^2 - \gamma) D^{(k,l)} + (2\gamma - 1) D_1^{(k,l)} - 2\gamma D_2^{(k,l)} - 2D_3^{(k,l)}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что асимптотика $S_2^{(k,l)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$S_2^{(k,l)}(x) = D^{(k,l)} x \ln x + M^{(k,l)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где $M^{(k,l)}$ — некоторая константа, не зависящая от x . Напомним, что

$$S_2^{(k,l)}(x) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ mn \in M_k, mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1).$$

Делая аналогично $S_1^{(k,l)}(x)$, получим

$$\begin{aligned}
 S_2^{(k,l)}(x) &= \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ mn+1 \in M_l}} \tau(mn+1) \sum_{d^k | mn} \mu(d) \\
 &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ mn+1 \in M_l, mn \equiv 0 \pmod{d^k}}} \tau(mn+1) \\
 &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ (m, d^k) = a}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m\sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m a^{-1}}}} \tau(q) \\
 &= \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \\
 &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \\
 &\quad + \sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q).
 \end{aligned}$$

Поскольку $m \leq \sqrt{x} a^{-1}$, то $ma\sqrt{x} + 1 \leq x + 1$; следовательно, второе слагаемое оценивается так же, как и аналогичное слагаемое в сумме $S_1^{(k,l)}(x)$. То есть

$$O\left(\sum_{x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}} \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \right) = O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$S_2^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

При просеивании второй раз, получим

$$\begin{aligned}
 S_2^{(k,l)}(x) &= \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\delta \leq (x+1)^{1/l}} \mu(\delta) \sum_{a|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1}) = 1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x}+1 \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l} \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \\
 &\quad + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Разбивая в равенстве (3) сумму по δ на две: в первой сумме $1 \leq \delta \leq x^{1/(6l)} d^{-k/l}$, во второй $x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq (x+1)^{1/l}$, получим

$$S_2^{(k,l)}(x) = S_7^{(k,l)}(x) + R_5^{(k,l)}(x),$$

где

$$S_7^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} \\ (\delta, d)=1}} d^{-k/l} \sum_{a|d^k} \mu(\delta) \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \sum_{\substack{q \leq m a \sqrt{x} + 1 \\ q \equiv r \pmod{d^k m \delta^l} \\ (r, d^k m \delta^l) = \delta^l}} \tau(q),$$

$$R_5^{(k,l)}(x) = O\left(\sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \sum_{x^{1/(6l)} d^{-k/l} < \delta \leq (x+1)^{1/l}} \sum_{a|d^k} \sum_{m \leq \sqrt{x} a^{-1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq m a \sqrt{x} + 1 \\ q \equiv 0 \pmod{\delta^l} \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q) \right) + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}) = O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}).$$

После применения теоремы Хиз-Брауна к $S_7^{(k,l)}(x)$ будем иметь

$$S_7^{(k,l)}(x) = \sqrt{x} \left(\frac{1}{2} \ln x + 2\gamma - 1 \right) \cdot S_8^{(k,l)}(x) + \sqrt{x} \cdot S_9^{(k,l)}(x) + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где

$$S_8^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} \\ (\delta, d)=1}} d^{-k/l} \sum_{a|d^k} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2l}} \sum_a a \times \\ \times \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m} \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right),$$

$$S_9^{(k,l)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^{2k}} \sum_{\substack{\delta \leq x^{1/(6l)} \\ (\delta, d)=1}} d^{-k/l} \sum_{a|d^k} \frac{\mu(\delta)}{\delta^{2l}} \sum_a a \times \\ \times \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} a^{-1} \\ (m, d^k \delta a^{-1})=1}} \frac{1}{m} \sum_{t|\delta^l} \sum_{s|d^k m \delta^l t^{-1}} t \cdot s \cdot \mu\left(\frac{d^k m \delta^l}{ts}\right) \ln\left(\frac{s^2 m a}{(d^k m \delta^l)^2}\right).$$

Делая так же, как раньше, получим, что

$$S_8^{(k,l)}(x) = \sqrt{x} D^{(k,l)} + O(x^{1/3+1/(6h)+\varepsilon});$$

$S_9^{(k,l)}(x)$ отличается от всех предыдущих сумм наличием $\ln m$. Поэтому при нахождении асимптотики $S_9^{(k,l)}(x)$ необходимо воспользоваться равномерной по $a \geq 1$ асимптотикой

$$\sum_{\substack{m \leq T \\ (m,a)=1}} \ln m = \frac{\varphi(a)}{a} (T \ln T - T) + O(\tau(a) \ln(aT)), \quad T \rightarrow \infty.$$

В итоге получим

$$S_9^{(k,l)}(x) = \frac{1}{2} D^{(k,l)} \sqrt{x} \ln x - (D^{(k,l)} + 2D_2^{(k,l)}) \sqrt{x} + O(x^{1/3+1/(6h)+\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$S_2^{(k,l)}(x) = D^{(k,l)}x \ln x + M^{(k,l)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где

$$M^{(k,l)} = (2\gamma - 2)D^{(k,l)} - 2D_2^{(k,l)}.$$

Возвращаясь к $S^{(k,l)}(x)$, будем иметь

$$S^{(k,l)}(x) = D^{(k,l)}x \ln^2 x + E^{(k,l)} \cdot x \ln x + F^{(k,l)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6h)+\varepsilon}),$$

где

$$\begin{aligned} E^{(k,l)} &= (4\gamma - 2)D^{(k,l)} + 2D_1^{(k,l)} - 2D_2^{(k,l)}, \\ F^{(k,l)} &= (4\gamma^2 - 4\gamma + 2)D^{(k,l)} + (4\gamma - 2)D_1^{(k,l)} - (4\gamma - 2)D_2^{(k,l)} - 4D_3^{(k,l)}. \end{aligned}$$

Покажем, что постоянная $D^{(k,l)} > 0$. Для этого сначала докажем, что

$$D^{(k,l)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \right).$$

Напомним, что

$$D^{(k,l)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b|s} b \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{\delta=1 \\ (\delta,d)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta)}{\delta^l} \cdot \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{a|d^k \\ (a,\delta s b^{-1})=1}} \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{\substack{t|\delta^l \\ (td^k,s)=b}} 1.$$

Если $t \mid \delta^l$ и $(\delta, d) = 1$, то $(t, d^k) = 1$. Поэтому так как $(td^k, s) = b$ и $(t, d^k) = 1$, то $b = b_1 \cdot b_2$, где $b_1 \mid t$ и $b_2 \mid d^k$. Кроме того, поскольку $b \mid s$ и $s \in M_2$, то $b_1 \in M_2$ и $b_2 \in M_2$, значит, $b_1 \mid \delta$, $b_2 \mid d$. Пусть $b_3 = sb^{-1}$. Тогда $s = b_1 b_2 b_3$, где b_1, b_2, b_3 попарно взаимно просты. Следовательно, если $d = d_1 \cdot b_2$ и $\delta = \delta_1 \cdot b_1$, то

$$\begin{aligned} D^{(k,l)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1 b_2 b_3 = s} b_1 b_2 \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{\mu(d_1 b_2)}{(d_1 b_2)^k} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1 b_1, d_1 b_2)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta_1 b_1)}{(\delta_1 b_1)^l} \cdot \frac{\varphi(\delta_1 b_1)}{\delta_1 b_1} \sum_{\substack{a|(d_1 b_2)^k \\ (a \delta_1 b_1, b_3)=1}} \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{\substack{t|(\delta_1 b_1)^l \\ (t b_1^{-1} d_1^k b_2^{k-1}, b_3)=1}} 1 \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1 b_2 b_3 = s} b_1 b_2 \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, b_1 b_3)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1 b_2)}{(d_1 b_2)^k} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1, d_1 b_2 b_3)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta_1 b_1)}{(\delta_1 b_1)^l} \cdot \frac{\varphi(\delta_1 b_1)}{\delta_1 b_1} \sum_{\substack{a|(d_1 b_2)^k \\ (a, b_3)=1}} \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{\substack{t|\delta_1^l b_1^{l-1} \\ (t, b_3)=1}} 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$D^{(k,l)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1|s} \frac{\mu(b_1)}{b_1^{l-1}} \cdot \frac{\varphi(b_1)}{b_1} \sum_{b_2|sb_1^{-1}} \frac{\mu(b_2)}{b_2^{k-1}} \\ \times \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1,s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^k} \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1,d_1s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^l} \cdot \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1} \sum_{a|(d_1b_2)^k} \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{t|\delta_1^l b_1^{l-1}} 1.$$

В последнем равенстве условия $(a, b_3) = 1$ и $(t, b_3) = 1$ не учитываются, поскольку $a | d_1^k b_2^k$, $(d_1, b_3) = 1$ и $(b_2, b_3) = 1$; аналогично, $t | \delta_1^l b_1^{l-1}$, $(\delta_1, b_3) = 1$ и $(b_1, b_3) = 1$. Так как $(b_1, \delta_1) = 1$, то, пользуясь равенством

$$\sum_{t|\delta_1^l b_1^{l-1}} 1 = \tau(b_1^{l-1}) \cdot \tau(\delta_1^l),$$

получим

$$D^{(k,l)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1|s} \frac{\mu(b_1)}{b_1^{l-1}} \cdot \frac{\varphi(b_1)}{b_1} \cdot \tau(b_1^{l-1}) \sum_{b_2|sb_1^{-1}} \frac{\mu(b_2)}{b_2^{k-1}} \\ \times \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1,s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^k} \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1,d_1s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^l} \cdot \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1} \cdot \tau(\delta_1^l) \sum_{a|(d_1b_2)^k} \frac{\varphi(a)}{a}.$$

Из $\mu(n) \neq 0$ следует равенство

$$\sum_{d|n^k} \frac{\varphi(d)}{d} = \prod_{p|n} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Действительно, так как $n \in M_2$, то $n = p_1 \cdots p_s$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Тогда

$$\sum_{d|n^k} \frac{\varphi(d)}{d} = \sum_{0 \leq \beta_1, \dots, \beta_s \leq k} \frac{\varphi(p_1^{\beta_1})}{p_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\varphi(p_s^{\beta_s})}{p_s^{\beta_s}} = \prod_{i=1}^s \left(\frac{\varphi(p_i^0)}{p_i^0} + \cdots + \frac{\varphi(p_i^k)}{p_i^k} \right) \\ = \prod_{p|n} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Кроме того, $(d_1, b_2) = 1$, поэтому

$$\sum_{a|d_1^k b_2^k} \frac{\varphi(a)}{a} = \sum_{a_1|d_1^k} \frac{\varphi(a_1)}{a_1} \sum_{a_2|b_2^k} \frac{\varphi(a_2)}{a_2} = \prod_{p|d_1} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \cdot \prod_{p|b_2} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Следовательно,

$$D^{(k,l)} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1|s} \frac{\mu(b_1)}{b_1^{l-1}} \cdot \frac{\varphi(b_1)}{b_1} \cdot \tau(b_1^{l-1}) \sum_{b_2|sb_1^{-1}} \frac{\mu(b_2)}{b_2^{k-1}} \prod_{p|b_2} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \\ \times \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (d_1,s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^l} \cdot \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1} \tau(\delta_1^l) \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1,\delta_1s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^k} \prod_{p|d_1} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{b_2|sb_1^{-1}} \frac{\mu(b_2)}{b_2^{k-1}} \prod_{p|b_2} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) &= \sum_{b_2|sb_1^{-1}} \prod_{p|b_2} \frac{-1}{p^{k-1}} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) \\ &= \prod_{\substack{p|s \\ p \nmid b_1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, \delta_1 s)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^k} \prod_{p|d_1} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) &= \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, \delta_1 s)=1}}^{\infty} \prod_{p|d_1} \frac{-1}{p^k} \left(1 + k \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right) \\ &= \prod_{p \nmid \delta_1 s} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right), \end{aligned}$$

то из $\tau(b_1^{l-1}) = \prod_{p|b_1} l$ и $\tau(\delta_1^l) = \prod_{p|\delta_1} (l+1)$ следует

$$\begin{aligned} D^{(k,l)} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \sum_{b_1|s} \prod_{p|b_1} \frac{(1-p)l}{p^l} \prod_{\substack{p|s \\ p \nmid b_1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1, s)=1}}^{\infty} \prod_{p|\delta_1} \frac{(1-p)(l+1)}{p^{l+1}} \prod_{p \nmid \delta_1 s} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, после несложных преобразований, получим

$$\begin{aligned} D^{(k,l)} &= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mu(s)}{s^2} \prod_{p|s} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right) \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{b_1|s} \prod_{p|b_1} \frac{(1-p)l}{p^l} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right)^{-1} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1, s)=1}}^{\infty} \prod_{p|\delta_1} \frac{(1-p)(l+1)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{b_1|s} \prod_{p|b_1} \frac{(1-p)l}{p^l} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right)^{-1} = \prod_{p|s} \left(1 + \frac{(1-p)l}{p^l} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}\right)^{-1}\right)$$

и

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\delta_1=1 \\ (\delta_1, s)=1}}^{\infty} \prod_{p|\delta_1} \frac{(1-p)(l+1)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right)^{-1} \\ &= \frac{\prod_p \left(1 + \frac{(1-p)(l+1)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right)^{-1}\right)}{\prod_{p|s} \left(1 + \frac{(1-p)(l+1)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}\right)^{-1}\right)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
D^{(k,l)} &= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} \right) \cdot \left(1 + \frac{(l+1)(1-p)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} \right)^{-1} \right) \\
&\quad \times \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{p|s} \frac{-1}{p^2} \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}}{1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}} \cdot \frac{1 + \frac{(1-p)l}{p^l} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k} \right)^{-1}}{1 + \frac{(l+1)(1-p)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{(k+1)}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} \right)^{-1}} \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} + \frac{(l+1)(1-p)}{p^{l+1}} \right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{-1}{p^2} \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k}}{1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}}} \cdot \frac{1 + \frac{(1-p)l}{p^l} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k} \right)^{-1}}{1 + \frac{(l+1)(1-p)}{p^{l+1}} \left(1 - \frac{(k+1)}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} \right)^{-1}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{l+1}{p^{l+1}} \right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k} + \frac{(1-p)l}{p^l}}{1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} + \frac{(l+1)(1-p)}{p^{l+1}}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{l+1}{p^{l+1}} \right) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k} - \frac{l}{p^{l-1}} + \frac{l}{p^l}}{1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{l+1}{p^{l+1}}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{l+1}{p^{l+1}} - \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{k+1}{p^{k-1}} + \frac{k}{p^k} - \frac{l}{p^{l-1}} + \frac{l}{p^l} \right) \right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{k+1}{p^k} + \frac{k}{p^{k+1}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{l+1}{p^{l+1}} - \frac{1}{p^2} + \frac{k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} + \frac{l}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \right) \\
&= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$D^{(k,l)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \right).$$

Покажем, что если $k \geq 2$ и $l \geq 2$, то для любого простого p выполнено неравенство

$$1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} > 0. \quad (4)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p^2} - \frac{l+1}{p^l} + \frac{2l+1}{p^{l+1}} - \frac{l}{p^{l+2}} \\
 &= \frac{1}{2p^{k+2}}(p^k(p-1)(p+1) - (2k+2)p(p-1) + 2k(p-1)) \\
 &\quad + \frac{1}{2p^{l+2}}(p^l(p-1)(p+1) - (2l+2)p(p-1) + 2l(p-1)) \\
 &= \frac{p-1}{2p^{k+2}}(p(p^k - 2k) + p(p^{k-1} - 2) + 2k) + \frac{p-1}{2p^{l+2}}(p(p^l - 2l) + p(p^{l-1} - 2) + 2l).
 \end{aligned}$$

Так как $p^k \geq 2^k \geq 2k$ при $k \geq 2$ (аналогично для l), получим неравенство (4). Следовательно, неравенство $D^{(k,l)} > 0$ доказано.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1 гораздо проще, чем доказательство теоремы 2. При этом новых идей не требуется. Поэтому наметим лишь ход доказательства теоремы 1.

2. Доказательство теоремы 1. Пользуясь определением функции $\tau(n)$, получим

$$T^{(k)}(x) = \sum_{\substack{mn \leq x \\ mn \in M_k}} \tau(mn+1) = 2T_1^{(k)}(x) - T_2^{(k)}(x),$$

где

$$T_1^{(k)}(x) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq xm^{-1} \\ mn \in M_k}} \tau(mn+1), \quad T_2^{(k)}(x) = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ mn \in M_k}} \tau(mn+1).$$

Сначала покажем, что асимптотика для $T_1^{(k)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$T_1^{(k)}(x) = \frac{1}{2} A^{(k)} x \ln^2 x + P^{(k)} \cdot x \ln x + Q^{(k)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}),$$

где $P^{(k)}, Q^{(k)}$ – некоторые константы, не зависящие от x .

Пользуясь характеристической функцией M_k и делая замену $mn+1 = q$, получим

$$T_1^{(k)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/k}} \mu(d) \sum_{l|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} l^{-1} \\ (m, d^k l^{-1})=1}} \sum_{\substack{2 \leq q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q). \quad (5)$$

Разобьем в равенстве (5) сумму по d на две: в первой сумме $1 \leq d \leq x^{1/(6k)}$, во второй $x^{1/(6k)} < d \leq x^{1/k}$. Тогда

$$T_1^{(k)}(x) = T_3^{(k)}(x) + R_1^{(k)}(x), \quad (6)$$

где

$$T_3^{(k)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{l|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}l^{-1} \\ (m, d^k l^{-1})=1}} \sum_{\substack{q \leq x+1 \\ q \equiv 1 \pmod{d^k m}}} \tau(q),$$

$$R_1^{(k)}(x) = O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Теперь найдем асимптотику $T_3^{(k)}(x)$ в равенстве (6). Применим частный случай теоремы Хиз-Брауна (при $a = 1$) в следующем виде:

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 1 \pmod{q}}} \tau(n) = \frac{\varphi(q)}{q^2} x \cdot \ln x + \left((2\gamma - 1) \frac{\varphi(q)}{q^2} - \frac{2}{q} \cdot \sum_{\delta|q} \frac{\mu(\delta) \cdot \ln \delta}{\delta} \right) \cdot x + O(x^{1/3+\varepsilon}).$$

Получим

$$T_3^{(k)}(x) = x(\ln x + 2\gamma - 1) \cdot T_4^{(k)}(x) - 2x \cdot T_5^{(k)}(x) + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}),$$

где

$$T_4^{(k)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \mu(d) \sum_{l|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}l^{-1} \\ (m, d^k l^{-1})=1}} \frac{\varphi(d^k m)}{(d^k m)^2},$$

$$T_5^{(k)}(x) = \sum_{d \leq x^{1/(6k)}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{l|d^k} \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x}l^{-1} \\ (m, d^k l^{-1})=1}} \frac{1}{m} \sum_{\delta|d^k m} \frac{\mu(\delta) \ln \delta}{\delta}.$$

Сделаем в сумме для $T_4^{(k)}(x)$ суммирование по δ внешним и воспользуемся равномерной по $a \geq 1$ асимптотикой

$$\sum_{\substack{m \leq T \\ (m, a)=1}} \frac{1}{m} = \frac{\varphi(a)}{a} (\ln T + \gamma) - \sum_{d|a} \frac{\mu(d) \ln d}{d} + O\left(\frac{\tau(a)}{T}\right), \quad T \rightarrow \infty.$$

Получим

$$T_4^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) \sum_{\delta \leq x^{2/3}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{b|\delta} b \sum_{\substack{d \leq x^{1/(6k)} \\ (d, \delta)=b}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{l|d^k \\ (l, \delta b^{-1})=1}} \frac{\varphi(l)}{l}$$

$$+ \sum_{\delta \leq x^{2/3}} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{b|\delta} b \sum_{\substack{d \leq x^{1/(6k)} \\ (d, \delta)=b}} \frac{\mu(d)}{d^k} \sum_{\substack{l|d^k \\ (l, \delta b^{-1})=1}} \sum_{q|l} \frac{\mu(q)}{q} \cdot \ln \frac{lb}{d^k \delta q}$$

$$+ O(x^{-1/2+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Тогда, переходя в выражении для $T_4^{(k)}(x)$ к бесконечным суммам, получим

$$T_4^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma \right) A^{(k)} + A_1^{(k)} + O(x^{-1/6+1/(6k)+\varepsilon}),$$

где $A^{(k)}$ и $A_1^{(k)}$ – некоторые постоянные, которые выписываются подобно соответствующим константам в теореме 2.

Аналогично получаем

$$T_5^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x + \gamma\right) A_2^{(k)} + A_3^{(k)} + O(x^{-1/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$T_1^{(k)}(x) = \frac{1}{2} A^{(k)} \cdot x \ln^2 x + P^{(k)} \cdot x \ln x + Q^{(k)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Рассуждая так же, как раньше, получим

$$T_2^{(k)}(x) = A^{(k)} \cdot x \ln x + S^{(k)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Возвращаясь к $T^{(k)}(x)$, будем иметь

$$T^{(k)}(x) = A^{(k)} \cdot x \ln^2 x + B^{(k)} \cdot x \ln x + C^{(k)} \cdot x + O(x^{5/6+1/(6k)+\varepsilon}).$$

Так же, как при доказательстве теоремы 2, доказывается, что

$$A^{(k)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} - \frac{k+1}{p^k} + \frac{2k+1}{p^{k+1}} - \frac{k}{p^{k+2}}\right) > 0.$$

На этом доказательство теоремы 1 закончим.

Автор благодарит А. И. Павлова за постановку задач и советы при их решении.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ingham A. E. Some asymptotic formulae in the theory of numbers // J. London Math. Soc. 1927. V. 2. № 3. P. 202–208.
- [2] Esterman T. Über die Darstellung einer Zahl als Differenz von zwei Produkten // J. Reine Angew. Math. 1931. V. 164. P. 173–182.
- [3] Исмоилов Д. Об асимптотике представления чисел как разности двух произведений // Докл. АН Тадж. ССР. 1979. Т. 22. № 2. С. 75–79.
- [4] Heath-Brown D. R. The fourth power moment of the Riemann zeta function // Proc. London Math. Soc. 1979. V. 38. № 3. P. 385–422.
- [5] Павлов А. И. О проблеме делителей Ингама // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 3. С. 429–438.

Московский педагогический государственный университет

Поступило
21.06.2000