Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, Абелевы группы и регулярные модули, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 402–411

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:25:27

УДК 512.541+512.553

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДУЛИ

П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова

Рассматривается строение аддитивной группы регулярного модуля. Изучаются абелевы группы, являющиеся регулярными модулями над своими кольцами эндоморфизмов. Описаны нередуцированные эндорегулярные группы и эндорегулярные группы конечного ранга без кручения.

Библиография: 18 названий.

В теории абелевых групп активно развивается исследование групп как модулей над их кольцами эндоморфизмов (по поводу этой тематики см. [1], [2]). В данной статье группы рассматриваются как регулярные модули над своими кольцами эндоморфизмов. Такие группы называются *эндорегулярными*. *Регулярный модуль* определен в [3, § 10.5] как модуль, каждый циклический подмодуль которого является прямым слагаемым. Это расширяет понятие регулярного кольца в смысле фон Неймана. В регулярном модуле каждый конечно порожденный подмодуль является прямым слагаемым.

Теорема 1 дает определенную информацию об аддитивной группе регулярного модуля. Известной проблемой, примыкающей к теориям абелевых групп и колец, является проблема исследования аддитивных групп колец [4, гл. 17]. Кажется уместным сформулировать более общую задачу, пограничную между теориями абелевых групп и модулей, изучения аддитивных групп модулей (прежде всего из различных специальных классов). Укажем, что в [5] предлагается описать аддитивные группы инъективных модулей. Теорема 1 обобщает теорему 124.1 из книги [4] об аддитивных группах регулярного кольца.

В п. 2 дается описание нередуцированных эндорегулярных групп. Их оказывается немного. Главный интерес представляют редуцированные эндорегулярные группы. Теорема 2 характеризует редуцированные эндорегулярные группы конечного ранга без кручения.

Модули, встречающиеся в статье, – левые унитарные над ассоциативным кольцом с единицей; группы – абелевы. Групповые термины, примененные к кольцу или модулю, относятся к их аддитивным группам; $\oplus$, $\prod$ – знаки прямой суммы и произведения соответственно; $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Если A – группа, то $E(A)$ – ее кольцо эндоморфизмов, A_p – p -компонента группы A , т.е. наибольшая подгруппа в A , являющаяся p -группой. При $A_p \neq 0$ говорим, что p относится к A . Далее, $T(A)$ – периодическая часть группы A – совокупность всех ее элементов конечного порядка; имеем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00876.

$T(A) = \bigoplus_p A_p$. *Смешанная группа* – это группа, содержащая как ненулевые элементы конечных порядков, так и элементы бесконечного порядка. *Рангом группы без кручения* называется мощность любой максимальной линейно независимой системы ее элементов. Под *рангом без кручения* $r_0(A)$ *смешанной группы* A понимается ранг факторгруппы $A/T(A)$. *Элементарной группой* называется прямая сумма циклических групп простых порядков.

1. Аддитивное строение регулярного модуля. Теорема 1 (она анонсирована в [6]) дает довольно ясное представление об аддитивных группах регулярных модулей. Замечание в конце статьи наводит на мысль, что исчерпывающее их описание едва ли достижимо. Приведем ряд простых свойств регулярных модулей.

ЛЕММА 1. *Подмодуль регулярного модуля регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – регулярный R -модуль, A – его подмодуль и $a \in A$. Тогда $M = Ra \oplus K$ для некоторого подмодуля K . Из $Ra \subseteq A$ выводим $A = Ra \oplus (A \cap K)$, что означает регулярность модуля A .

ЛЕММА 2. *Пусть $h: R \rightarrow S$ – сюръективный гомоморфизм колец, M – S -модуль. Регулярность S -модуля M равносильна его регулярности как притягивающего R -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что S -подмодули и R -подмодули в M совпадают (см. [7, лемма 11.12]).

ЛЕММА 3. *Пусть M – регулярный R -модуль, $e^2 = e \in R$. Тогда eM – регулярный eRe -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный элемент $em \in eM$. Нужно установить, что $eRe(em)$ – прямое слагаемое eRe -модуля eM . Регулярность модуля M влечет $M = R(em) \oplus K$ для некоторого подмодуля K . Откуда $eM = eRe(em) \oplus eK$.

ТЕОРЕМА 1. *Аддитивная группа регулярного R -модуля M является прямой суммой некоторой делимой группы без кручения D и редуцированной группы A такой, что*

$$\bigoplus_p C_p \subseteq A \subseteq \prod_p C_p,$$

где C_p – элементарная p -группа, а A сервантна в $\prod_p C_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что M не имеет кручения как группа. Допустим, напротив, что $pM \neq M$ для некоторого числа p . Тогда $p^2M \neq pM$. Выберем элемент $x \in pM - p^2M$. Ввиду регулярности M имеем $M = Rx \oplus L$, где L – какой-то модуль, а $Rx \subseteq pM$. Записав $x = py$ с $y \in M$, найдем $py \in Rx$ и $y \in Rx$. Откуда $y \in pM$ и $y = pz$ для некоторого $z \in M$. И далее, $x = py = p^2z \in p^2M$, что противоречит выбору элемента x .

Пусть теперь M – произвольный регулярный R -модуль. Покажем, что $T(M)$ – элементарная группа. Обозначим через C_p p -компоненту группы M . Допустим напротив, что нашелся элемент $x \in C_p$ порядка p^k , $k > 1$. Имеем $M = R(p^{k-1}x) \oplus Y$, где Y – некоторый модуль. Запишем $x = z + y$, где $z \in R(p^{k-1}x)$, $y \in Y$. Откуда находим $0 \neq p^{k-1}x = p^{k-1}z + p^{k-1}y = p^{k-1}y \in Y$, чего не может быть. Таким образом, $T(M)$ –

элементарная группа. Следовательно, $M = C_p \oplus E_p$ для каждого p , относящегося к M , E_p – дополнительное слагаемое. Заметим, что C_p является подмодулем R -модуля M . Покажем, что E_p – также подмодуль. Поскольку в E_p нет элементов порядка p , то деление элементов группы E_p на p однозначно. Так же, как в первом абзаце доказательства, можно найти, что $pE_p = E_p$. Отсюда заключаем, что E_p – подмодуль. Имеем модульное разложение $M = C_p \oplus E_p$ для каждого $p \in P$, где P обозначает множество всех простых чисел, относящихся к M .

Для каждого $p \in P$ пусть e_p – проекция модулей $M \rightarrow C_p$ с ядром E_p . С помощью этих проекций строим модульный гомоморфизм

$$f: M \rightarrow \prod_{p \in P} C_p,$$

полагая $f(m) = \langle e_p(m) \rangle$ для каждого $m \in M$. Ясно, что

$$\ker f = \bigcap_{p \in P} E_p.$$

Обозначим подмодуль $\ker f$ через D . Тогда D – регулярный модуль без кручения (лемма 1). По уже доказанному D – делимая группа. Значит, можно написать прямую сумму $M = D \oplus A$ для какой-то группы A .

Возьмем фактормодуль M/D , изоморфный $\text{im } f$. Удобно отождествить M/D с $\text{im } f$. Так как f действует на сумме $\bigoplus_p C_p$ тождественно, то можем считать, что

$$\bigoplus_p C_p \subseteq M/D \subseteq \prod_p C_p,$$

где вложения являются модульными. Убедимся в сервантности подгруппы M/D в $\prod_p C_p$. Это равносильно делимости факторгруппы $(M/D)/T(M/D)$, которую обозначим буквой G . Заметим, что $T(M/D) = \bigoplus_p C_p$. Если $p \in P$, то G делится на p как гомоморфный образ p -делимой группы M/C_p (она изоморфна E_p). Если же $p \notin P$, т.е. M не имеет p -компоненты, то $pM = M$ (см. замечание о p -делимости группы E_p выше). Тем более делится на такое p группа G . Итак, G – делимая группа, а M/D – сервантная подгруппа в $\prod_p C_p$. Так как $A \cong M/D$, то для группы A имеем сервантные вложения

$$\bigoplus_p C_p \subseteq A \subseteq \prod_p C_p.$$

Таким образом, $M = D \oplus A$, где D и A такие, как утверждается в теореме. Теорема доказана.

Неясно, можно ли подгруппу A выбрать так, чтобы она была подмодулем. Тем не менее, в ситуации теоремы 1 имеет место такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) M/D – регулярный R -модуль.

2) Если модуль D конечно порожден, то A является подмодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть элемент $\bar{a} = a + D \in M/D$, $a \in A$. Тогда $M = Ra \oplus X$ для некоторого подмодуля X . Проверим, что $M/D = R\bar{a} \oplus \bar{X}$, где $R\bar{a} = (Ra + D)/D$, $\bar{X} = (X + D)/D$. Нужно лишь убедиться, что $R\bar{a} \cap \bar{X} = 0$ или $(Ra + D) \cap (X + D) \subseteq D$. Если $b \in (Ra + D) \cap (X + D)$, то $b = ra + c = x + d$, где $r \in R$, $c, d \in D$, $x \in X$. Поскольку D – вполне инвариантный подмодуль как максимальная делимая подгруппа, то $D = (D \cap Ra) \oplus (D \cap X)$. Запишем $c = c_1 + c_2$, $d = d_1 + d_2$, где $c_1, d_1 \in D \cap Ra$, $c_2, d_2 \in X$. Теперь получаем $ra + c_1 - d_1 = x + d_2 - c_2 \in Ra \cap X = 0$ и $ra = d_1 - c_1 \in D$. Отсюда $b = ra + c \in D$. Итак, $M/D = R\bar{a} \oplus \bar{X}$ и M/D – регулярный модуль.

2) Конечно порожденный подмодуль D выделяется в M прямым слагаемым в модульном смысле. Следствие доказано.

Пусть, как в теореме, $M = D \oplus A$. Группы A и M/D канонически изоморфны, поэтому A можно превратить в R -модуль, полагая для $r \in R$ и $a \in A$, $r \circ a = a_1$, где $ra = d + a_1$, $d \in D$, $a_1 \in A$. При этом $A \cong M/D$ как R -модули. По следствию 1 A – регулярный R -модуль при указанном действии R на A .

Вопрос Ричмена и Уокера [5] об описании аддитивных групп инъективных модулей остается открытым. Напомним об одном замечательном факте: инъективный модуль обязательно алгебраически компактен как абелева группа [8, с. 209].

СЛЕДСТВИЕ 2. На группе M можно задать регулярный инъективный модуль тогда и только тогда, когда $M = \prod_p C_p \oplus D$, где C_p – элементарная p -группа, D – делимая группа без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – регулярный инъективный модуль. Тогда $M = A \oplus D$, где A и D – такие группы, как в теореме 1. Группа A алгебраически компактна как прямое слагаемое алгебраически компактной группы. Из $\bigoplus_p C_p \subseteq A \subseteq \prod_p C_p$, сервантности A в $\prod_p C_p$ и определения алгебраически компактной группы [8, § 38] выводится, что в действительности $A = \prod_p C_p$. Обратно, пусть $M = \prod_p C_p \oplus D$. Тогда C_p – регулярный инъективный F_p -модуль (F_p – поле из p элементов), D – регулярный инъективный $\mathbb{Q}$ -модуль, а M будет регулярным инъективным модулем над кольцом $\prod_p F_p \times \mathbb{Q}$.

2. Эндорегулярные нередуцированные группы. Применим теорему 1 к описанию групп, указанных в заглавии.

ЛЕММА 4. Прямое слагаемое эндорегулярной группы есть эндорегулярная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – эндорегулярная группа, A – ее прямое слагаемое, $e: G \rightarrow A$ – проекция. Тогда $A = eG$, $E(A) = eE(G)e$ и осталось сослаться на лемму 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Нередуцированная группа G является эндорегулярной тогда и только тогда, когда $G = D \oplus A$, где D – делимая группа без кручения, A – элементарная группа (может быть, $A = 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – эндорегулярная группа. Тогда $G = D \oplus A$, где D и A – группы из теоремы 1. Согласно условию $D \neq 0$. Известное строение делимых групп позволяет заключить, что D – циклический $E(G)$ -модуль. В таком случае A – $E(G)$ -подмодуль, т.е. вполне характеристическая подгруппа в G (следствие 1). Допустим, что $A \neq 0$ и элемент $a \in A$ имеет бесконечный порядок. Существует мономорфизм

$\langle a \rangle \rightarrow D$, который продолжается в силу инъективности группы D до гомоморфизма $A \rightarrow D$. Но это противоречит вполне характеристичности A в G . Значит, A – периодическая группа, $A = \bigoplus_p C_p$, где C_p – элементарная p -группа. Таким образом, A – элементарная группа.

Допустим, что $G = \bigoplus_p C_p \oplus D$, где C_p – элементарная p -группа, D – делимая группа без кручения. Все группы C_p и D являются неприводимыми $E(G)$ -модулями, а G – вполне приводимый $E(G)$ -модуль. Тем более, G – регулярный $E(G)$ -модуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Эндорегулярность нередуцированной группы G равносильна также тому, что $E(G)$ – регулярное кольцо [4, предложение 112.7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Некоторая группа G является вполне приводимым $E(G)$ -модулем тогда и только тогда, когда $G = D \oplus A$, где D – делимая без кручения, A – элементарная группа.

Работа [5] содержит описание групп, инъективных над своими кольцами эндоморфизмов, т.е. эндоинъективных групп. Из [5], следствия 2 и предложения 1 получается такой результат.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Группа G является эндорегулярной эндоинъективной тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих видов:*

- 1) $G = D \oplus A$, где D – делимая без кручения, A – элементарная группы конечных рангов;
- 2) $G = \prod_p C_p$, где C_p – конечная элементарная p -группа для каждого p .

3. Эндорегулярные sr -группы. Предложение 1 сводит проблему описания эндорегулярных групп к случаю редуцированных групп. Согласно теореме 1 для редуцированной эндорегулярной группы A имеют место сервантные вложения

$$\bigoplus_p A_p \subseteq A \subseteq \prod_p A_p,$$

где A_p обозначает p -компоненту группы A . Группа $\bigoplus_p A_p$ эндорегулярна (предложение 1). Поэтому считаем, что $A \neq \bigoplus_p A_p$, т.е. A – смешанная группа. Такие смешанные группы, лежащие между суммой и произведением своих p -компонент, привлекли в последнее время внимание многих специалистов [9]–[14]. Здесь мы называем их sr -группами. Дадим точное определение: sr -группой называется редуцированная смешанная группа A с бесконечным числом ненулевых p -компонент такая, что вложение $\bigoplus_p A_p \rightarrow A$ продолжается до сервантного вложения $A \rightarrow \prod_p A_p$. Таким образом, для sr -группы A можно считать, что $\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p$, причем A сервантна в $\prod_p A_p$. Здесь и далее подразумевается, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A . *Элементарная sr -группа* – это такая sr -группа, все p -компоненты которой – элементарные группы. В свете сказанного выше получается, что при изучении эндорегулярных групп можно ограничиться элементарными sr -группами.

Приведем несколько фактов о sr -группах. Они будут нужны для доказательства основной теоремы 2. Для группы A положим $E_t(A) = \text{Hom}(A, T(A))$ и $E_f(A) = \{\alpha \in E(A) \mid \alpha A \text{ содержится в сумме конечного числа компонент } A_p\}$. Здесь $E_t(A)$ и $E_f(A)$ – идеалы кольца $E(A)$, причем $E_f(A) \subseteq E_t(A)$.

Напомним определение категории Уокера Walk [15]. Объектами категории Walk служат группы, а множество морфизмов $\text{Hom}_W(A, B)$ есть $\text{Hom}(A, B)/\text{Hom}(A, T(B))$. Walk является аддитивной категорией с бесконечными суммами и ядрами. Заметим, что $E(A)/E_t(A)$ – это кольцо эндоморфизмов группы A в Walk . Обозначим его $E_W(A)$.

Пусть W – полная подкатегория категории Walk , состоящая из sp -групп A таких, что $E_t(A) = E_f(A)$. Из [15] выводится эквивалентность следующих утверждений:

- 1) $A \cong B$ в W ;
- 2) $A \oplus T \cong B \oplus S$, где T и S – периодические группы с конечным числом p -компонент;
- 3) $A \cong C \oplus S$, $B \cong C \oplus T$, где $C \in W$, S и T такие, как в 2).

Говорят, что идемпотенты расщепляются в аддитивной категории $\mathcal{E}$, если всякий раз когда $e^2 = e \in E_{\mathcal{E}}(A)$, то существуют объект $B \in \mathcal{E}$ и морфизмы $g \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, A)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)$ с $gh = e$ и $hg = 1_B$ [16, определение 18.15].

Для группы A фиксируем обозначения: $R = E(A)$, $R_t = E_t(A)$ и $S = R/R_t$.

ЛЕММА 5. *В категории W расщепляются идемпотенты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть даны группа $A \in W$ и идемпотент $\bar{e} = e + R_t$ кольца S , где $e \in R$. Имеем $e^2 = e + r$ для некоторого $r \in R_t$. Можно записать $A = C \oplus V$, где $rC = 0$, V – прямая сумма конечного числа p -групп, причем C и V не имеют p -компонент для одинаковых p . Определим $f \in R$, полагая $f(x) = e(x)$ для $x \in C$ и $fV = 0$. Тогда $f^2 = f$ и $A = B \oplus \ker f$, где $B = fA$. Если $g: B \rightarrow A$ – вложение, $h: A \rightarrow B$ – проекция, то $hg = 1_B$, $gh = f$. Откуда $\bar{h}\bar{g} = 1$, $\bar{g}\bar{h} = \bar{f} = \bar{e}$ (черта обозначает смежный класс относительно R_t). Итак, нашлись группа $B \in W$ и морфизмы $\bar{g}, \bar{h}$ с указанными свойствами. Значит, $\bar{e}$ расщепляется.

ЛЕММА 6. *Если $A \in W$, то всякое конечное полное ортогональное множество идемпотентов кольца S можно поднять до полного ортогонального множества идемпотентов кольца R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из доказательства леммы 5, множество идемпотентов кольца S сразу можно взять в виде $e_1 + R_t, \dots, e_n + R_t$, где $e_1, \dots, e_n$ – идемпотенты кольца R . Для любых различных индексов i, j имеем $e_i e_j \in R_t$. Поэтому существует разложение $A = C_{ij} \oplus V_{ij}$ такое, что $e_i e_j C_{ij} = 0$, V_{ij} – прямая сумма конечного числа p -групп. При этом C_{ij} и V_{ij} не имеют p -компонент для одинаковых p . Пусть V – сумма всех групп V_{ij} , C – дополнительное к V слагаемое, $A = C \oplus V$. Считаем, что все e_i аннулируют V . Тогда $e_1, \dots, e_n$ – система ортогональных идемпотентов кольца R . Полнота в S означает, что $(e_1 + R_t) + \dots + (e_n + R_t) = 1$. Добавляя к V некоторые p -компоненты группы C , можно добиться того, что $e_1 + \dots + e_n = 1$ в R . Лемма доказана.

Понятие групповой суммы в W имеет теоретико-групповую интерпретацию. Из предыдущего (см. также [17, лемма 7.1]) можно вывести следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Группа A является прямой суммой групп $A_1, \dots, A_n$ в W тогда и только тогда, когда $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, где $B_i \in W$ и $A_i \cong B_i$ в W , $i = 1, \dots, n$.*

Поскольку W – аддитивная категория с расщепляющимися идемпотентами, в ней выполняется теорема Крулля–Шмидта [16, теорема 18.18]. Справедливы также стандартные соотношения между группой A из W и ее кольцом эндоморфизмов $E_W(A)$. Так, следующее предложение можно доказать непосредственно с помощью леммы 6 и аналогичного факта для модулей (см. [18, § 3.4, лемма 1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $A \in W$, ε и ω – идемпотенты кольца R . Тогда

- 1) справедлив изоморфизм групп $\text{Hom}_W(\omega A, \varepsilon A) \cong \overline{\varepsilon} S \overline{\omega}$ и кольцевой изоморфизм $E_W(\varepsilon A) \cong \overline{\varepsilon} S \overline{\varepsilon}$ (черта обозначает смежный класс относительно R_t);
- 2) эквивалентны следующие утверждения:
  - а) существуют $r, s \in S$ такие, что $rs = \overline{\varepsilon}$ и $sr = \overline{\omega}$;
  - б) $\varepsilon A \cong \omega A$ в W ;
  - в) $S \overline{\varepsilon} \cong S \overline{\omega}$ как левые S -модули.

Пусть $A \in W$. В дополнение к введенным уже обозначениям положим $T = T(A)$, $V = A/T$. Тогда V – $\mathbb{Q}$ -пространство, S – $\mathbb{Q}$ -алгебра. Кроме того, V – левый R -модуль, аннулятор которого равен R_t . Поэтому V является левым S -модулем: $sv = rv$, где $v \in V$, $r \in R$, $s = r + R_t$.

Обозначим через W_f полную подкатегорию категории W , состоящую из групп с конечным рангом без кручения. Пусть $A \in W_f$. $\mathbb{Q}$ -алгебра S вкладывается в $\text{End}_{\mathbb{Q}} V$, и поэтому S – конечномерная алгебра. Используя лемму 6, получаем, что неразложимость группы A в W_f равносильна локальности кольца S . Следовательно, A обладает свойством единственности разложения в категории W_f в прямую сумму неразложимых в W_f групп [10] (см. замечание выше о теореме Крулля–Шмидта в W). Из предложения 2, опираясь на известное строение артинова полупростого кольца, выводится такой результат (он получается также из [12, теорема 2.4]).

СЛЕДСТВИЕ 5. Записанные ниже утверждения о группе $A \in W_f$ эквивалентны:

- 1) V – вполне приводимый S -модуль;
- 2) S – полупростая алгебра;
- 3) $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где $\text{Hom}(A_i, A_j) = \text{Hom}(A_i, T(A_j))$ для всех различных $i, j = 1, \dots, n$; $A_i = \bigoplus_{k=1}^{n_i} A_{ik}$, $A_{ik} \cong A_{il}$ в W и $E_W(A_{ik})$ – тело ($i = 1, \dots, n$, $k, l = 1, \dots, n_i$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – элементарная sr -группа конечного ранга без кручения. Тогда $A = C \oplus E$, где $C \in W_f$, E – элементарная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого p , относящегося к A , запишем $A = A_p \oplus B_p$, где B_p – дополнительное слагаемое. Пусть e_p обозначает проекцию $A \rightarrow A_p$ с ядром B_p . Выберем свободную подгруппу F группы A с образующими $c_1, \dots, c_n$, где n равно рангу без кручения группы A . Любая подгруппа элементарной группы является прямым слагаемым. Следовательно, для каждого p имеем $A_p = e_p F \oplus E_p$, где E_p – некоторая подгруппа. Положим $\overline{A} = \prod_p A_p$. Группу A можно считать сервантной подгруппой в $\overline{A}$. Тогда $\overline{A} = X \oplus Y$, где $X = \prod_p e_p F$, $Y = \prod_p E_p$. Обозначив $C = A \cap X$ и $E = \bigoplus_p E_p$, проверим, что $A = C \oplus E$. По построению $C \cap X = 0$ и $T = T(A) \subset C + E$. Из $(C + E)/T = ((X + T)/T) \cap (A/T)$ заключаем, что подгруппа $(C + E)/T$ сервантна в A/T . Кроме того, она содержит базис $c_1 + T, \dots, c_n + T$ $\mathbb{Q}$ -пространства A/T . Следовательно, $A = C \oplus E$. Имеем $A_p = C_p \oplus E_p = e_p F \oplus E_p$. Поэтому ограничение проекции e_p на C будет проекцией $C \rightarrow C_p$. Так как $C_p = e_p F$, то группа C удовлетворяет так называемому условию на проекции и по [11, следствие 2.4] $C \in W_f$.

ЛЕММА 7. Пусть дана группа $A = C \oplus E$, где E – элементарная группа. Тогда эндорегулярность группы A эквивалентна эндорегулярности группы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что группа C эндорегулярна. Возьмем элемент $a \in A$, $a = c + e$, где $c \in C$, $e \in E$. Имеем $Ra = (Ra \cap C) \oplus (Ra \cap E)$, где $Ra \cap C$ ($Ra \cap E$) – вполне характеристическая подгруппа в C (в E). Причем, $Ra \cap E$ совпадает с суммой некоторых p -компонент E_p . Справедливо также равенство $Ra \cap C = E(C)c + \text{Hom}(E, C)e$. Здесь $E(C)c$ – прямое слагаемое $E(C)$ -модуля C на основании эндорегулярности группы C . Группа $\text{Hom}(E, C)e$ является суммой конечного числа некоторых p -компонент C_p группы C . Отсюда $Ra \cap C$ – прямое слагаемое группы C , а $Ra \cap E$ – прямое слагаемое группы E . Поэтому Ra – прямое слагаемое группы A . Дополнительное к Ra слагаемое будет модульным, т.е. оно является вполне характеристической подгруппой. Это вытекает из таких соображений. Согласно теореме 1 все A_p – элементарные группы и, значит, они будут модульными слагаемыми в A . Затем Ra содержит все те компоненты A_p , относительно которых элемент a имеет ненулевые координаты. Итак, A – эндорегулярная группа. Обратное содержится в лемме 4. Лемма доказана.

Используем введенные ранее обозначения: $T = T(A)$, $V = A/T$, $R = E(A)$, $R_t = \text{Hom}(A, T)$ и $S = R/R_t$. По аналогии с группами без кручения назовем sp -группу A неприводимой, если V – неприводимый S -модуль.

Пусть A – sp -группа, $a \in A$. Для каждого p имеем разложение $A = A_p \oplus B_p$. Запишем $a = a_p + b_p$, где $a_p \in A_p$, $b_p \in B_p$. Элемент a_p называем p -координатой элемента a . Введем также следующие множества простых чисел: $\pi(A) = \{p \mid A_p \neq 0\}$ и $\pi(a) = \{p \mid a \text{ имеет ненулевую } p\text{-координату}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Элементарная sp -группа A конечного ранга без кручения эндорегулярна тогда и только тогда, когда $A = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \oplus E$, где $C_1, \dots, C_n$ – неприводимые sp -группы, причем $\text{Hom}(C_i, C_j) = 0$ для любых различных $i, j = 1, \dots, n$, E – элементарная группа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие $\text{Hom}(C_i, C_j) = 0$ эквивалентно тому, что C_i и C_j имеют ненулевые p -компоненты для различных p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что группа A эндорегулярна. Убедимся, что V – регулярный S -модуль. Возьмем некоторый элемент $\bar{a} = a + T \in V$, отличный от нуля. Ввиду эндорегулярности группы A имеем $A = Ra \oplus B$ для какого-то R -модуля B . Покажем, что $V = S\bar{a} \oplus \bar{B}$, где $\bar{B} = (B+T)/T$. Ясно, что $S\bar{a}$ и $\bar{B}$ порождают V . Допустим, что $\overline{ra} = \bar{b} \in S\bar{a} \cap \bar{B}$. В группе A получаем $b = ra + c$ для некоторого $c \in T$. Можно записать $c = sa + d$, где $s \in R$, $d \in T(B)$. Теперь находим $b - d = ra + sa \in Ra \cap B = 0$, и далее, $b = d \in T$, $\bar{b} = 0$. Значит, $V = S\bar{a} \oplus \bar{B}$ и V – регулярный S -модуль. Артиновость кольца S (абзац перед следствием 5) влечет вполне приводимость S -модуля V [3, с. 266, упр. 16]. Точность этого модуля в свою очередь дает полупростоту кольца S .

По предложению 3 $A = C \oplus E$, где $C \in W_f$, E – элементарная группа. Имеем $S = E(C)/E_t(C) = E_W(C)$ и, значит, $E_W(C)$ – полупростое артиново кольцо. По следствию 5 можно написать $A = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \oplus E$, где $\text{Hom}(C_i, C_j) = \text{Hom}(C_i, T(C_j))$ для всех i, j , $s \neq j$. Кроме того, если обозначить $R_i = E(C_i)$, $S_i = R_i/E_t(C_i)$, то S_i – простое артиново кольцо. Установим, что каждая C_i – неприводимая sp -группа. Обозначим $V_i = C_i/T(C_i)$. Заметим, что $S = S_1 \times \dots \times S_n$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ (при естественном отождествлении). Нужно доказать неприводимость S_i -модуля V_i . Допустим напротив,

что этот модуль не является неприводимым. Найдется элемент $\bar{a} = a + T \in V_i$, для которого $S_i \bar{a} \neq V_i$. По лемме 4 группа C_i эндорегулярна, поэтому $C_i = R_i a \oplus M$, где M – какой-нибудь R_i -модуль, причем $M \not\subseteq T$ и $r_0(R_i a) < r_0(C_i)$. Применяя следствие 5 к группе C_i , получаем $C_i = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, где $B_1 \cong B_2 \cong \dots \cong B_m$ в категории W и все B_i неразложимы в W . Далее, $R_i a = (R_i a \cap B_1) \oplus \dots \oplus (R_i a \cap B_m)$, где $R_i a \cap B_1 \cong \dots \cong R_i a \cap B_m$ в W . Так как $r_0(R_i a) < r_0(C_i)$, то $r_0(R_i a \cap B_1) < r_0(B_1)$. Но это невозможно по свойству изоморфизма прямых разложений в W_f (замечание перед следствием 5). Таким образом, V_i – неприводимый S_i -модуль, а C_i – неприводимая группа.

Возьмем некоторые слагаемые C_i и C_j ($i \neq j$) и допустим, что $\text{Hom}(C_i, C_j) \neq 0$. Если C_i и C_j имеют лишь конечное число p -компонент для одинаковых p , то все эти компоненты можно присоединить к E . После чего будет $\text{Hom}(C_i, C_j) = 0$. Поэтому пусть C_i и C_j имеют ненулевые p -компоненты для бесконечного числа одних и тех же p . Выберем элемент $a \in C_i - T(C_i)$. Тогда $S_i \bar{a} = V_i$ в силу неприводимости S_i -модуля V_i . Откуда $C_i/R_i a$ – периодическая группа. Поскольку C_i – эндорегулярная группа (лемма 4), то $C_i = R_i a \oplus G$, где G – элементарная группа с конечным числом p -компонент (нужно учесть, что $C_i \in W$). Эндорегулярность же группы A влечет $A = Ra \oplus B$ для некоторой группы B . Подгруппа Ra вполне характеристична в A , поэтому из разложения $A = C_1 \oplus \dots \oplus C_n \oplus E$ выводим $Ra = (Ra \cap C_j) \oplus M$, где M – дополнительное слагаемое. Так как $\text{Hom}(C_i, C_j) = \text{Hom}(C_i, T(C_j))$, то понятно, что $Ra \cap C_j \subseteq T(C_j)$ и $Ra \cap C_j$ – элементарная группа. Кроме того, $Ra \cap C_j$ – прямое слагаемое группы C_j ; p -координаты элемента a отличны от нуля для почти всех p , относящихся к C_i . Ввиду нашего соглашения о p -компонентах групп C_i и C_j получаем, что a имеет ненулевые p -координаты для бесконечного множества чисел p , относящихся к C_j . Можно сделать вывод, что элементарная группа $Ra \cap C_j$ имеет бесконечно много p -компонент. Однако это противоречит тому обстоятельству, что $A \in W$. Таким образом, $\text{Hom}(C_i, C_j) = 0$.

Предположим теперь, что выполнены условия теоремы. В силу леммы 7 достаточно установить эндорегулярность суммы $C_1 \oplus \dots \oplus C_n$. Из $\text{Hom}(C_i, C_j) = 0$ при $i \neq j$ в свою очередь выводим, что нужно убедиться в эндорегулярности каждой из групп $C_1, \dots, C_n$. Возьмем, например, C_1 . Неприводимость S_1 -модуля V_1 влечет, что для любых элементов $b, c \in C_1 - T(C_1)$ существуют $\varphi, \psi \in R_1$ и $g, h \in T(C_1)$ такие, что $c = \varphi b + g$ и $b = \psi c + h$ (здесь, конечно, $R_1 = E(C_1)$, $S_1 = R_1/E_t(C_1)$ и $V_1 = C_1/T(C_1)$). Заключаем, что множества $\pi(b)$ и $\pi(c)$ “почти” равны в том смысле, что оба множества $\pi(b) - \pi(c)$ и $\pi(c) - \pi(b)$ конечны. Пусть элементы $v_1 + T(C_1), \dots, v_k + T(C_1)$ составляют базис $\mathbb{Q}$ -пространства $C_1/T(C_1)$. Как только что замечено, $\pi(v_i) - \pi(v_j)$ – конечное множество для любых i и j . Теперь пусть элемент $a \in C_1$. Если $a \in T(C_1)$, то понятно, что $R_1 a$ есть сумма p -компонент группы C_1 для всех $p \in \pi(a)$. Значит, $R_1 a$ – прямое слагаемое R_1 -модуля C_1 . Если $a \in C_1 - T(C_1)$, то элемент a равен линейной комбинации элементов $v_1, \dots, v_k$ с рациональными коэффициентами плюс некоторый элемент из $T(C_1)$. Из всего сказанного можно сделать вывод, что $\pi(a)$ состоит из почти всех чисел множества $\pi(C_1)$, т.е. $\pi(C_1) - \pi(a)$ – конечное множество. Запишем $C_1 = B \oplus G$, где G – сумма p -компонент группы C_1 для всех $p \in \pi(C_1) - \pi(a)$. Очевидно, что $a \in B$, $R_1 a \subseteq B$ и $T(B) \subset R_1 a$. Неприводимость S_1 -модуля V_1 дает $R_1 a + T(C_1) = C_1$. Но $T(C_1) = T(B) \oplus G$ и $C_1 = R_1 a + T(C_1) = R_1 a \oplus G$. Итак, $R_1 a$ является R_1 -модульным прямым слагаемым в C_1 , что доказывает эндорегулярность группы C_1 . Теорема доказана.

Класс эндорегулярных sr -групп бесконечного ранга без кручения, по-видимому, мало обозрим. Авторы располагают примером эндорегулярной sr -группы A бесконечного ранга без кручения, для которой $A/T(A)$ — суперразложимый регулярный R/R_t -модуль.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марков В. Т., Михалев А. В., Скорняков Л. А., Туганбаев А. А. Кольца эндоморфизмов модулей и структуры подмодулей // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 183–254.
- [2] Крылов П. А. Абелевы группы без кручения как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Абелевы группы и модули. Вып. 13, 14. Томск: Изд-во ТГУ, 1996. С. 77–104.
- [3] Капш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
- [4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
- [5] Richman F., Walker E. A. Modules over PIDs that are injective over their endomorphism rings // Ring Theory. New York: Acad. Press, 1972. P. 363–372.
- [6] Пахомова Е. Г. Абелевы группы как регулярные модули над кольцами эндоморфизмов // Межд. конф. “Всесибирские чтения по математике и механике”. Т. 1. Томск, 1997. С. 32–33.
- [7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1977.
- [8] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
- [9] Glaz S., Wickless W. Regular and principal projective endomorphism rings of mixed abelian groups // Comm. Algebra. 1994. V. 22. № 4. P. 1161–1176.
- [10] Wickless W. A functor from mixed groups to torsion-free groups // Contem. Math. 1995. V. 171. P. 407–419.
- [11] Albrecht U. F., Goeters H. P., Wickless W. The flat dimension of mixed abelian groups as E -modules // Rocky Mount. J. Math. 1995. V. 25. № 2. P. 569–590.
- [12] Albrecht U. Mixed abelian groups with artinian quasi-endomorphism ring // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 11. P. 3497–3511.
- [13] Fomin A., Wickless W. Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Comm. Algebra. 1998. V. 26. № 11. P. 3563–3580.
- [14] Крылов П. А. Кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Межд. конф. “Всесибирские чтения по математике и механике”. Т. 1. Томск, 1997. С. 20–21.
- [15] Warfield R. B. (Jr.) The structure of mixed abelian groups // Lect. Notes Math. 1997. V. 616. P. 1–38.
- [16] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1979.
- [17] Arnold D. M. Finite rank torsion-free abelian groups and rings // Lect. Notes Math. 1982. V. 931.
- [18] Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.