Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Потапов, О свойствах и о применении в теории приближений одного семейства операторов обобщенного сдвига, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 412–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:18:09

УДК 517

О СВОЙСТВАХ И О ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

М. К. Потапов

В работе определяется семейство новых несимметричных операторов обобщенного сдвига и приводятся их свойства. Для каждого из этих операторов вводится обобщенный модуль гладкости и для него приводятся прямая и обратная теоремы теории приближений.

Библиография: 13 названий.

Введение. Для 2π -периодических функций хорошо известны связи между ее обычным модулем гладкости и ее наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами.

Для непериодических функций уже нет таких связей между ее обычным модулем гладкости и ее наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. Однако полная аналогия с 2π -периодическим случаем имеет место тогда, когда обычный модуль гладкости заменен обобщенным модулем гладкости.

Обобщенные модули гладкости могут определяться разными способами (см., например, [1]). Одним из таких способов является определение таких модулей при помощи операторов обобщенного сдвига [2]. Поскольку каждый оператор обобщенного сдвига действует в своем классе весовых пространств, актуальным является построение новых операторов обобщенного сдвига.

Ранее вводились и изучались симметричные операторы обобщенного сдвига (см., например, [3]–[9]).

В этой работе вводится одно семейство несимметричных операторов обобщенного сдвига, изучаются его свойства и показывается его применение в теории приближений. В частном случае аналогичные результаты получены в [10].

Определения и обозначения. Обозначим через L_p , где $1 \leq p \leq \infty$, множество функций f , которые при $1 \leq p < \infty$ измеримы по Лебегу и суммируемы в p -й степени на отрезке $[-1, 1]$, а при $p = \infty$ непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, причем

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{-1}^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00062, и программы поддержки ведущих научных школ, грант № 00-15-96143.

Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество функций f таких, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$, причем

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p.$$

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов $\mathcal{P}_{n-1}$ степени не выше, чем $n-1$, в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{\mathcal{P}_{n-1}} \|f - \mathcal{P}_{n-1}\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Для каждой пары натуральных чисел s и r введем оператор обобщенного сдвига

$$T_y(f, x, r, s) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int_{-1}^1 f(R)\psi(x, y, z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \frac{\cos[s(\varphi_1 - \varphi) + r(\varphi_1 - \mu)](1-R)^r(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+y)^{s+r}(1-x)^r(1-x^2)^{\frac{s}{2}}}, \\ R &= xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, \\ \cos \varphi_1 &= z, \quad \sin \varphi_1 = \sqrt{1-z^2}, \\ \cos \varphi &= \frac{-\sqrt{1-y^2}x + yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \\ \cos \mu &= \frac{z(1-xy) - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}, \quad \sin \mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Дальше будем считать фиксированными числа s и r , т.е. считать фиксированным оператор $T_y(f, x, r, s)$ и будем обозначать его через $T_y(f, x)$. При помощи этого оператора обобщенного сдвига для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим обобщенный модуль гладкости

$$\tilde{\omega}(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t| \leq \delta} \|T_{\cos t}(f, x) - f(x)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_{u,\nu,\mu}$ оператор дифференцирования

$$\mathcal{D}_{u,\nu,\mu} = (1-u^2) \frac{d^2}{du^2} + (\mu - \nu - (\mu + \nu + 2)u) \frac{d}{du}.$$

Будем писать, что $f \in \mathcal{AD}(p, \alpha, \beta, \nu, \mu)$, если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ и $\mathcal{D}_{x,\nu,\mu}f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$. Пусть

$$K(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g \in \mathcal{AD}(p,\alpha,\beta,\nu,\mu)} (\|f - g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^2 \|\mathcal{D}_{x,\nu,\mu}g(x)\|_{p,\alpha,\beta})$$

есть K -функционал Петре, интерполирующий между пространствами $L_{p,\alpha,\beta}$ и $\mathcal{AD}(p, \alpha, \beta, \nu, \mu)$.

Будем обозначать через $\mathcal{P}_n^{(\nu,\mu)}(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) многочлены Якоби, т.е. многочлены степени n , ортогональные друг другу с весом $(1-x)^\nu(1+x)^\mu$ на отрезке $[-1, 1]$ и нормированные условием $\mathcal{P}_n^{(\nu,\mu)}(1) = 1$.

Через $a_n(f)$ обозначим коэффициенты Фурье-Якоби функции $f \in L_{1,s+2r,s}$ по системе многочленов Якоби $\{\mathcal{P}_n^{(s+2r,s)}(x)\}_{n=0}^\infty$, т.е.

$$a_n(f) = \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{P}_n^{(s+2r,s)}(x) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Свойства оператора.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $T_y(f, x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) оператор $T_y(f, x)$ линеен по f ;
- 2) $T_1(f, x) = f(x)$;
- 3) $T_y(\mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}, x) = \mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(x) \cdot \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- 4) $T_y(1, x) = 1$;
- 5) если $g(x)T_y(f, x) \in L_{1, s+2r, s}$ и $f(x)T_y(g, x) \in L_{1, s+2r, s}$ для любого $y \in (-1, 1)$, то

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 f(x)T_y(g, x)(1-x)^{s+2r}(1+x)^s dx \\ &= \int_{-1}^1 g(x)T_y(f, x)(1-x)^{s+2r}(1+x)^s dx; \end{aligned}$$

- 6) $a_n(T_y(f, x)) = a_n(f) \cdot \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 2) следуют сразу из определения оператора $T_y(x)$. Для доказательства свойства 3) рассмотрим функции (см. [11, с. 133])

$$P_{\lambda, \nu}^l(z) = \mathcal{P}_n^{(\alpha, \beta)}(z) 2^{-\lambda} \binom{n+\alpha}{n} i^{\lambda-\nu} \sqrt{\frac{(l-\lambda)!(l+\lambda)!}{(l-\nu)!(l+\nu)!}} (1-z)^{(\lambda-\nu)/2} (1+z)^{(\lambda+\nu)/2}, \quad (2)$$

где $l = n + (\alpha + \beta)/2$, $\lambda = (\alpha + \beta)/2$, $\nu = (\beta - \alpha)/2$.

Для этих функций справедлива формула умножения (см. [11, с. 140]):

$$P_{m, q}^l(\cos \theta_1) P_{q, r}^l(\cos \theta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q\varphi_2 - (m-r)\varphi - r(\varphi+\eta))} P_{m, r}^l(\cos \theta) d\varphi_2,$$

где

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2, \\ e^{i\varphi} &= \frac{\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + i \sin \theta_2 \sin \varphi_2}{\sin \theta}, \\ e^{i(\varphi+\eta)} &= \frac{-\sin \theta_1 \sin \theta_2 + (1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \cos \varphi_2 + i(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \sin \varphi_2}{1 + \cos \theta}. \end{aligned}$$

Так как можно считать, что $\varphi = \varphi(\varphi_2)$, $\mu = \varphi + \eta = \mu(\varphi_2)$, $\theta = \theta(\varphi_2)$, легко видеть, что $\varphi(-\varphi_2) = -\varphi(\varphi_2)$, $\mu(-\varphi_2) = -\mu(\varphi_2)$, $\theta(-\varphi_2) = \theta(\varphi_2)$. Поэтому

$$P_{m, q}^l(\cos \theta_1) P_{q, r}^l(\cos \theta_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(q\varphi_2 - (m-r)\varphi - r(\varphi+\eta)) P_{m, r}^l(\cos \theta) d\varphi_2.$$

Полагая в этой формуле $m = q = s + r$, $\mu = \varphi + \eta$ и применяя формулу (2), имеем

$$\mathcal{P}_n^{(s, s+2r)}(\cos \theta_2) \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(\cos \theta_1) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{P}_n^{(s, s+2r)}(\cos \theta) \psi_1 d\varphi_2,$$

где

$$\psi_1 = \frac{(\sin \theta)^s (1 + \cos \theta)^r \cos(s(\varphi_1 - \varphi) + r(\varphi_1 - \mu))}{(1 + \cos \theta_1)^{s+r} (\sin \theta_2)^s (1 + \cos \theta_2)^r}.$$

Сделав сначала замену переменных $\theta_2 = \pi - \theta_3$, учитывая (см. [12, с. 171]), что

$$\mathcal{P}_n^{(s, s+2r)}(-z) = (-1)^n \mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(z),$$

и обозначая $\cos \theta_3 = x$, $\cos \theta_1 = y$, $\cos \varphi_2 = z$, получаем, что

$$\mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(x) \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(y) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int_{-1}^1 \mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(R) \psi(x, y, z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (3)$$

где $\psi(x, y, z)$, R , φ и μ определены формулами (1). Равенство (3) означает справедливость свойства 3).

Справедливость свойства 4) вытекает из справедливости свойства 3) при $n = 0$.

Докажем теперь свойство 5). Рассмотрим

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 f(x) T_y(g, x) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s dx \\ &= \frac{2^{s+r}}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x) g(R) \psi(x, y, z) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}, \end{aligned}$$

где ψ , R , μ , φ и φ_1 определены формулами (1). Поскольку μ , φ и φ_1 являются функциями от x , y и z , то, обозначая $\lambda = \lambda(x, y, z) = \varphi - \varphi_1$, $\chi = \chi(x, y, z) = \mu - \varphi_1$, получим, что

$$\psi(x, y, z) = \frac{\cos(s\lambda + r\chi)(1-R)^r (1-R^2)^{s/2}}{(1+y)^{s+r} (1-x)^r (1-x^2)^{s/2}}.$$

Сделав в двойном интеграле замену переменных

$$x = Ry + \nu \sqrt{1-R^2} \sqrt{1-y^2}, \quad z = \frac{R\sqrt{1-y^2} - \nu y \sqrt{1-R^2}}{\sqrt{1-(Ry + \nu \sqrt{1-R^2} \sqrt{1-y^2})^2}}, \quad (4)$$

получим, что

$$I = \int_{-1}^1 g(R) \left(\frac{2^{s+r}}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \psi_1(R, y, \nu) \frac{d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \right) (1-R)^{s+2r} (1+R)^s dR, \quad (5)$$

где

$$\psi_1(R, y, \nu) = \frac{\cos(s\bar{\lambda} + r\bar{\chi})(1-x)^r (1-x^2)^{s/2}}{(1+y)^{s+r} (1-R)^r (1-R^2)^{s/2}},$$

$\bar{\lambda}$ и $\bar{\chi}$ — функции от R , y , ν .

Поскольку можно показать, что $\cos \bar{\lambda} = \cos \lambda(R, y, \nu)$, $\sin \bar{\lambda} = \sin \lambda(R, y, \nu)$, $\cos \bar{\chi} = \cos \chi(R, y, \nu)$, $\sin \bar{\chi} = \sin \chi(R, y, \nu)$, справедливо равенство

$$\cos(s\bar{\lambda} + r\bar{\chi}) = \cos(s\lambda(R, y, \nu) + r\chi(R, y, \nu)).$$

Это равенство означает, что $\psi_1(R, y, \nu) = \psi(R, y, \nu)$, и поэтому из (5) получаем, что

$$I = \int_{-1}^1 g(R) T_y(f, R) (1-R)^{s+2r} (1+R)^s dR,$$

т.е. получаем справедливость свойства 5).

Для доказательства свойства 6) рассмотрим

$$I_1 = a_n(T_y(f, x)) = \int_{-1}^1 T_y(f, x) \mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(x) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s dx.$$

Используя доказанные выше свойства 5) и 3), получаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 f(x) T_y(\mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}, x) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s dx \\ &= \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(y) \int_{-1}^1 f(x) \mathcal{P}_n^{(s+2r, s)}(x) (1-x)^{s+2r} (1+x)^s dx = \mathcal{P}_n^{(0, 2s+2r)}(y) a_n(f), \end{aligned}$$

и свойство 6) доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны числа s, r, p и α такие, что s и r – натуральные числа, $1 \leq p \leq \infty$, $s/2 - 1/2 < \alpha \leq s/2$ при $p = 1$, $s/2 - 1/(2p) < \alpha < s/2 + 1/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty$, $s/2 \leq \alpha < s/2 + 1/2$ при $p = \infty$. Пусть функция $f \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_y(f, x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C}{(1+y)^{s+r}} \|f\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и $y \in (-1, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p = 1$. Рассмотрим

$$J = \|T_y(f, x)\|_{1, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{2^{s+r}}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)| |\psi(x, y, z)| (1-x)^{\alpha+r} (1+x)^{\alpha} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}},$$

где функция ψ определена формулами (2). Так как

$$|\psi(x, y, z)| \leq \frac{(1-R)^r (1-R^2)^{s/2}}{(1+y)^{s+r} (1-x)^r (1-x^2)^{s/2}}, \quad (6)$$

то

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{2^{s+r}}{\pi (1+y)^{s+r}} \\ &\times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)| (1-R^2)^{s/2} (1-R)^r ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-s/2} (1-z^2)^{s/2-\alpha} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha \leq s/2$, то $(1-z^2)^{s/2-\alpha} \leq 1$. Поэтому

$$J \leq \frac{2^{s+r}}{\pi (1+y)^{s+r}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)| (1-R^2)^{s/2} (1-R)^r ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-s/2} \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Сделаем в двойном интеграле замену переменных по формулам (4), получим

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{2^{s+r}}{\pi(1+y)^{s+r}} \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R^2)^{s/2}(1-R)^r((1-R^2)(1-\nu^2))^{\alpha-s/2} \frac{dR d\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} \\ &= \frac{2^{s+r}}{\pi(1+y)^{s+r}} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R)^{\alpha+r}(1+R)^\alpha dR \int_{-1}^1 (1-\nu^2)^{\alpha-s/2-1/2} d\nu. \end{aligned}$$

Так как $\alpha > s/2 - 1/2$, то

$$\int_{-1}^1 (1-\nu^2)^{\alpha-s/2-1/2} d\nu = C_1.$$

Поэтому

$$J \leq \frac{C_2}{(1+y)^{s+r}} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R)^{\alpha+r}(1+R)^\alpha dR = \frac{C_2}{(1+y)^{s+r}} \|f\|_{1, \alpha+r, \alpha}$$

и теорема 2 доказана для $p = 1$.

Пусть $1 < p < \infty$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} J^p &= \|T_y(f, x)\|_{p, \alpha+r, \alpha}^p \\ &\leq \left(\frac{2^{s+r}}{\pi} \right)^p \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 |f(R)| |\psi(x, y, z)|(1-x)^{\alpha+r}(1+x)^\alpha \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right)^p dx. \end{aligned}$$

Применяя оценку (6), имеем

$$\begin{aligned} J^p &\leq \frac{2^{(s+r)p}}{\pi^p(1+y)^{(s+r)p}} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 |f(R)|(1-R)^r(1-R^2)^{s/2}((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-s/2} \right. \\ &\quad \times (1-z^2)^{1/(2p)-\alpha+s/2-1/2} \frac{dz}{(1-z^2)^{1/(2p)}} \Big)^p dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера к внутреннему интегралу, получаем

$$\begin{aligned} J^p &\leq \frac{2^{(s+r)p}}{\pi^p(1+y)^{(s+r)p}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (|f(R)|(1-R)^r(1-R^2)^{s/2} \\ &\quad \times ((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-s/2})^p \frac{dz dx}{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-1}^1 (1-z^2)^{(1/(2p)-\alpha+s/2-1/2)p/(p-1)} dz \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Так как $\alpha < s/2 + 1/2 - 1/(2p)$, то

$$\left(\int_{-1}^1 (1-z^2)^{(1/(2p)-\alpha+s/2-1/2)p/(p-1)} dz \right)^{p-1} = C_3.$$

Поэтому

$$J^p \leq \frac{C_4}{(1+y)^{(s+r)p}} \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (|f(R)|(1-R)^r(1-R^2)^{s/2}((1-x^2)(1-z^2))^{\alpha-s/2})^p \frac{dz dx}{(1-z^2)^{1/2}}.$$

Сделав в двойном интеграле замену переменных по формулам (4), имеем

$$J^p \leq \frac{C_4}{(1+y)^{(s+r)p}} \int_{-1}^1 (|f(R)|(1-R)^{\alpha+r}(1+R)^\alpha)^p dR \int_{-1}^1 (1-\nu^2)^{(\alpha-s/2)p-1/2} d\nu.$$

Поскольку $\alpha > s/2 - 1/(2p)$, то

$$\int_{-1}^1 (1-\nu^2)^{(\alpha-s/2)p-1/2} d\nu = C_5.$$

Поэтому

$$J^p \leq \frac{C_6}{(1+y)^{(s+r)p}} \int_{-1}^1 (|f(R)|(1-R)^{\alpha+r}(1+R)^\alpha)^p dR,$$

откуда следует, что

$$J \leq \frac{C_7}{(1+y)^{s+r}} \|f\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

и теорема 2 доказана для $p \in (1, \infty)$.

Пусть $p = \infty$. Рассмотрим

$$I_1 = \frac{2^{s+r}}{\pi} \left| \int_{-1}^1 f(R) \psi(x, y, z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right| (1-x)^{\alpha+r} (1+x)^\alpha.$$

Учитывая оценку (6), имеем

$$I_1 \leq \frac{2^{s+r}}{\pi(1+y)^{s+r}} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R)^r(1-R^2)^{\frac{s}{2}}(1-x^2)^{\alpha-\frac{s}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Легко проверить, что

$$(1-x^2)(1-z^2) = 1-R^2 - (x\sqrt{1-y^2} - zy\sqrt{1-x^2})^2.$$

Откуда $(1-x^2) \leq (1-R^2)/(1-z^2)$. Применяя эту оценку и учитывая, что $\alpha \geq s/2$, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{2^{s+r}}{\pi(1+y)^{s+r}} \int_{-1}^1 |f(R)|(1-R)^{\alpha+r}(1+R)^\alpha(1-z^2)^{-\alpha+s/2-1/2} dz \\ &\leq \frac{2^{s+r}}{\pi(1+y)^{s+r}} \|f\|_{\infty, \alpha+r, \alpha} \int_{-1}^1 (1-z^2)^{-\alpha+s/2-1/2} dz. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha < s/2 + 1/2$, то $\int_{-1}^1 (1-z^2)^{-\alpha+s/2-1/2} dz = C_8$. Поэтому

$$I_1 \leq \frac{C_9}{(1+y)^{s+r}} \|f\|_{\infty, \alpha+r, \alpha}.$$

Так как $J = \|T_y(f, x)\|_{\infty, \alpha+r, \alpha} = \max_{-1 \leq x \leq 1} I_1$, отсюда следует, что

$$J \leq \frac{C_9}{(1+y)^{s+r}} \|f\|_{\infty, \alpha+r, \alpha},$$

и теорема 2 доказана для $p = \infty$.

Оценки модуля гладкости через K -функционал.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ абсолютно непрерывную производную $f'(x)$ и $D_{x, s+2r, s} f(x) \in L_{1, s+2r, s}$. Тогда при любом $y \in (-1, 1)$ для почти всех $x \in (-1, 1)$ справедливы равенства:

- 1) $T_y(D_{x, s+2r, s} f(x), x) = D_{x, s+2r, s}(T_y(f, x)),$
- 2) $T_y(f, x) - f(x) = \int_1^y (1-v)^{-1} (1+v)^{-(2s+2r+1)} \times \int_1^v (1+u)^{2s+2r} T_u(D_{x, s+2r, s} f(x), x) du dv,$
- 3) $T_y(f, x) - T_0(f, x) = - \int_1^y (1-v)^{-1} (1+v)^{-(2s+2r+1)} \times \int_v^{-1} (1+u)^{2s+2r} T_u(D_{x, s+2r, s} f(x), x) du dv.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 1 проводится стандартными рассуждениями (см., например, [10]) и поэтому опускается.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом отрезке $[a, b] \subset (-1, 1)$ абсолютно непрерывную производную $f'(x)$ и $D_{x, s+2r, s} f(x) \in L_{1, s+2r, s}$. Тогда при любом $t \in (-\pi, \pi)$ для почти всех $x \in (-1, 1)$ справедливы равенства

$$T_{\cos t}(f, x) - f(x) = \int_0^t \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \times \int_0^v T_{\cos u}(D_{x, s+2r, s} f(x), x) \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv$$

u

$$T_{\cos t}(f, x) - T_0(f, x) = - \int_{\pi/2}^t \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \times \int_v^\pi T_{\cos u}(D_{x, s+2r, s} f(x), x) \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из второго равенства леммы 1 подстановкой $\cos u$ и $\cos v$ вместо u и v соответственно. Аналогично второе равенство следует из третьего равенства леммы 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны числа s, r, p и α такие, что s и r – натуральные числа, $1 \leq p \leq \infty$, $s/2 - 1/2 < \alpha \leq s/2$ при $p = 1$, $s/2 - 1/(2p) < \alpha < s/2 - 1/(2p) + 1/2$ при $1 < p < \infty$, $s/2 \leq \alpha < s/2 + 1/2$ при $p = \infty$. Пусть $f \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$. Тогда для любого $\delta \in (0, \pi)$ справедливы неравенства

$$C_1 K(f, \delta, s+2r, s)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_2}{(\cos \frac{\delta}{2})^{2s+2r}} K(f, \delta, s+2r, s)_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от δ и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любой функции $g \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$ и любого $t \in (-\pi, \pi)$ справедливо неравенство

$$\|T_{\cos t}(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \leq \frac{C_3}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}} t^2 \|D_{x, s+2r, s} g(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha}, \quad (7)$$

где постоянная C_3 не зависит от t и g .

Пусть $0 < t \leq \pi/2$. Тогда по следствию из леммы 1, применяя обобщенное неравенство Минковского и теорему 2, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \|T_{\cos t}(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \\ &\leq \int_0^t \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2}\right)^{-(4s+4r+1)} \\ &\quad \times \int_0^v \|T_{\cos u}(D_{x, s+2r, s} f(x), x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{4s+4r+1} du dv \\ &\leq C_4 \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \\ &\quad \times \int_0^t \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2}\right)^{-(4s+4r+1)} \int_0^v \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2s+2r+1} du dv. \end{aligned}$$

Так как для $0 < t \leq \pi/2$ имеем

$$\int_0^t \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2}\right)^{-(4s+4r+1)} \int_0^v \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2s+2r+1} du dv \leq \frac{C_5 t^2}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}},$$

то, учитывая это неравенство, получаем, что

$$I_1 \leq \frac{C_6 t^2}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha}.$$

Пусть $\pi/2 \leq t < \pi$. Тогда по следствию из леммы 1, применяя обобщенное неравенство Минковского и теорему 2, получим, что

$$\begin{aligned} I_2 &= \|T_{\cos t}(g, x) - T_0(g, x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \\ &\leq C_7 \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \\ &\quad \times \int_{\pi/2}^t \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2}\right)^{-(4s+4r+1)} \int_v^\pi \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2s+2r+1} du dv. \end{aligned}$$

Поскольку для $\pi/2 \leq t < \pi$ имеем

$$\int_{\pi/2}^t \left(\sin \frac{v}{2}\right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2}\right)^{-(4s+4r+1)} \int_v^\pi \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2}\right)^{2s+2r+1} du dv \leq \frac{C_8}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}},$$

то, учитывая это неравенство, получаем, что

$$I_2 \leq \frac{C_9}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha} \leq \frac{C_9 t^2}{\left(\cos \frac{t}{2}\right)^{2s+2r}} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha + r, \alpha}.$$

Так как

$$\|T_{\cos t}(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \|T_{\cos t}(g, x) - T_0(g, x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \|T_0(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

то, применяя оценку для I_2 и оценку для I при $t = \pi/2$, получаем, что для $\pi/2 \leq t < \pi$ справедливо неравенство

$$\|T_{\cos t}(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{10}t^2}{(\cos \frac{t}{2})^{2s+2r}} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Таким образом, неравенство (7) доказано для $t \in (0, \pi)$. Так как $T_{\cos t}(g, x) = T_{\cos(-t)}(g, x)$, можно сказать, что неравенство (7) справедливо для $0 < |t| < \pi$.

Пусть $f \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$ и $0 < |t| \leq \delta < \pi$. Тогда для любой функции $g \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$, применяя теорему 1, имеем

$$\begin{aligned} \|T_{\cos t}(f, x) - f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq \|T_{\cos t}(f - g, x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\quad + \|T_{\cos t}(g, x) - g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \|g - f\|_{p, \alpha+r, \alpha}. \end{aligned}$$

Применяя теперь теорему 2 и неравенство (7), получаем, что

$$\|T_{\cos t}(f, x) - f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{11}}{(\cos \frac{t}{2})^{2s+2r}} (\|f - g\|_{p, \alpha+r, \alpha} + t^2 \|D_{x, s+2r, s} g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha}),$$

где постоянная C_{11} не зависит от t , f и g . Следовательно, переходя к точной нижней грани в этом неравенстве при $|t| \leq \delta$ и $g \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$, получаем справедливость правого неравенства теоремы 3 для $0 < \delta < \pi$.

Для доказательства левого неравенства рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &= \frac{1}{K(\delta)} \int_0^\delta \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \\ &\quad \times \int_0^v T_{\cos u}(f, x) \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv, \end{aligned}$$

где

$$K(\delta) = \int_0^\delta \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \int_0^v \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, а затем теорему 2, получаем, что

$$\|g_\delta\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{12}}{(\cos \frac{\delta}{2})^{2s+2r}} \|f\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

т.е. получаем, что $g_\delta \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$.

Пусть $0 < \delta \leq \pi/2$. Тогда легко показать, что

$$K(\delta) \geq C_{13}\delta^2, \tag{8}$$

где постоянная C_{13} не зависит от δ .

В условиях теоремы 3 из того, что $f \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$, следует, что $f \in L_{1, s+2r, s}$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = - \int_0^x (1-y)^{-(s+2r+1)} (1+y)^{-(s+1)} \int_y^1 (1-z)^{s+2r} (1+z)^s \left(f(z) - \frac{C_1}{C_0} \right) dz dy,$$

где

$$C_1 = \int_{-1}^1 f(z) (1-z)^{s+2r} (1+z)^s dz, \quad C_0 = \int_{-1}^1 (1-z)^{s+2r} (1+z)^s dz.$$

Поскольку $D_{x, s+2r, s} g(x) = f(x) - C_1/C_0$, то

$$\begin{aligned} g_\delta(x) &= \frac{1}{K(\delta)} \int_0^\delta \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \\ &\quad \times \int_0^v T_{\cos u}(D_{x, s+2r, s} g(x), x) \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv + \frac{C_1}{C_0}. \end{aligned}$$

Применяя следствие из леммы 1, получаем, что

$$g_\delta(x) = \frac{1}{K(\delta)} (T_{\cos \delta}(g, x) - g(x)) + \frac{C_1}{C_0}.$$

Применяя к этому равенству оператор $D_{x, s+2r, s}$ и лемму 1, находим, что

$$\begin{aligned} D_{x, s+2r, s} g_\delta(x) &= \frac{1}{K(\delta)} (T_{\cos \delta}(D_{x, s+2r, s} g(x), x) - D_{x, s+2r, s} g(x)) \\ &= \frac{1}{K(\delta)} (T_{\cos \delta}(f, x) - f(x)). \end{aligned}$$

Применяя теперь теорему 2 и лемму 1, заключаем, что $g_\delta \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$.

Из последнего равенства и неравенства (8) получаем, что

$$\|D_{x, s+2r, s} g_\delta(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{14}}{\delta^2} \|T_{\cos \delta}(f, x) - f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

откуда следует, что

$$\|D_{x, s+2r, s} g_\delta(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{14}}{\delta^2} \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Теперь оценим

$$I_3 = \|f - g_\delta\|_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{1}{K(\delta)} \int_0^\delta \left(\sin \frac{v}{2} \right)^{-1} \left(\cos \frac{v}{2} \right)^{-(4s+4r+1)} \\ &\quad \times \int_0^v \|f(x) - T_{\cos u}(f, x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \sin \frac{u}{2} \left(\cos \frac{u}{2} \right)^{4s+4r+1} du dv \\ &\leq \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha+r, \alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $0 < \delta \leq \pi/2$ показано, что

$$I(\delta) = \|f - g_\delta\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \delta^2 \|D_{x, s+2r, s} g_\delta(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_{15} \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Так как для $\pi/2 \leq \delta < \pi$

$$\begin{aligned} K(f, \delta, s+2r, s) &\leq \pi^2 (\|f - g_1\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \|D_{x, s+2r, s} g_1\|_{p, \alpha+r, \alpha}) = \pi^2 I(1) \\ &\leq \pi^2 C_{15} \tilde{\omega}(f, 1)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_{16} \tilde{\omega}(f, \delta)_{p, \alpha+r, \alpha}, \end{aligned}$$

то левое неравенство теоремы 3 справедливо для любого $\delta \in (0, \pi)$.

Теорема 3 доказана полностью.

Оценки модуля гладкости через наилучшие приближения.

ЛЕММА 2. Пусть даны числа p и α такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $-1/(2p) < \alpha < s + 1/2 - 1/(2p)$. Пусть $f \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$. Тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C}{n^2} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где постоянная C не зависит от f и n ($n \in \mathbb{N}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального числа n и фиксированного натурального числа $q \geq 8$ выберем натуральное число m такое, что

$$\frac{n-1}{q+2} < m \leq \frac{n-1}{q+2} + 1.$$

Из условий леммы следует, что $f \in L_{1, s+2r, s}$. Для этой функции введем симметричный оператор обобщенного сдвига

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t(f, x) &= \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \int_{-1}^1 f \left(x \cos t + yz \sin t \sqrt{1-z^2} - (1-y^2)(1-x) \sin^2 \frac{t}{2} \right) \\ &\quad \times (1-y^2)^{2r-1} y^{2s+1} (1-z^2)^{s-\frac{1}{2}} dz dy, \end{aligned}$$

где $\gamma = \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-y^2)^{2r-1} y^{2s+1} (1-z^2)^{s-\frac{1}{2}} dz dy$. В работе [6] показано, что функция

$$Q(x) = \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi \mathcal{T}_t(f, x) \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2s+4r+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2s+1} dt,$$

где

$$\gamma_m = \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2s+4r+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2s+1} dt,$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $n-1$. Поэтому, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq \|f - Q\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\leq \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi \|\mathcal{T}_t(f, x) - f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\quad \times \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2s+4r+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2s+1} dt. \end{aligned}$$

В работе [7] показано, что для всех t справедливо неравенство

$$\|\mathcal{T}_t(f, x) - f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_1 t^2 \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где постоянная C_1 не зависит от t и f . Поэтому

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq C_1 \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\times \frac{1}{\gamma_m} \int_0^\pi t^2 \left(\frac{\sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2q+4} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{2s+4r+1} \left(\cos \frac{t}{2} \right)^{2s+1} dt. \end{aligned}$$

Учитывая стандартную оценку ядра Джексона, получаем, что

$$E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_2}{m^2} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_3}{n^2} \|D_{x, s+2r, s} f(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где постоянные C_2 и C_3 не зависят от f и n ($n \in \mathbb{N}$). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{P}_{n-1}$ – алгебраический многочлен степени не выше, чем $n-1$. Пусть даны числа p, σ, α и β такие, что $1 \leq p \leq \infty, \sigma \geq 0$,

$$\alpha > -\frac{1}{p} \quad \text{и} \quad \beta > -\frac{1}{p} \quad \text{при} \quad 1 \leq p < \infty, \quad \alpha \geq 0 \quad \text{и} \quad \beta \geq 0 \quad \text{при} \quad p = \infty.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\|\mathcal{P}'_{n-1}\|_{p, \alpha+1/2, \beta+1/2} \leq C_1 n \|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p, \alpha, \beta}$$

и

$$\|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p, \alpha, \beta} \leq C_2 n^{2\sigma} \|\mathcal{P}_{n-1}\|_{p, \alpha+\sigma, \beta+\sigma},$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от n ($n \in \mathbb{N}$).

Лемма 3 доказана в работе [13].

ТЕОРЕМА 4. Пусть даны числа s, r, p и α такие, что s и r – натуральные числа, $1 \leq p \leq \infty, s/2 - 1/2 < \alpha \leq s/2$ при $p = 1, s/2 - 1/(2p) < \alpha < s/2 + 1/2 - 1/(2p)$ при $1 < p < \infty, s/2 \leq \alpha < s/2 + 1/2$ при $p = \infty$. Пусть функция $f \in L_{p, \alpha+r, \alpha}$. Тогда для любого натурального n справедливы неравенства

$$C_1 E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \tilde{\omega} \left(f, \frac{1}{n} \right)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_2}{n^2} \sum_{\nu=1}^n \nu E_\nu(f)_{p, \alpha+r, \alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $g \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$, применяя лемму 2, имеем

$$\begin{aligned} E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq E_n(f - g)_{p, \alpha+r, \alpha} + E_n(g)_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\leq \|f - g\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \frac{C_3}{n^2} \|D_{x, s+2r, s} g(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha}, \end{aligned}$$

где постоянная C_3 не зависит от g и n ($n \in \mathbb{N}$). Отсюда, переходя к точной нижней грани по всем функциям $g \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$, а затем применяя теорему 3, получим, что

$$E_n(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_4 K\left(f, \frac{1}{n}, s + 2r, s\right)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_5 \tilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p, \alpha+r, \alpha},$$

и левое неравенство теоремы 4 доказано.

Докажем теперь правое неравенство теоремы 4. Пусть $Q_n(x)$ – алгебраический многочлен степени не выше, чем $n-1$, осуществляющий наилучшее приближение функции f в метрике $L_{p, \alpha+r, \alpha}$. Пусть целое число k выбрано так, что

$$2^k \leq n < 2^{k+1}. \quad (9)$$

Поскольку $Q_{2^k}(x) \in AD(p, \alpha + r, \alpha, s + 2r, s)$, применяя теорему 3, получаем, что

$$\tilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq C_6 \left(\|f - Q_{2^k}\|_{p, \alpha+r, \alpha} + \frac{1}{n^2} \|D_{x, s+2r, s} Q_{2^k}(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \right).$$

Так как

$$D_{x, s+2r, s} Q_{2^k}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} D_{x, s+2r, s} (Q_{2^{\nu+1}}(x) - Q_{2^\nu}(x)),$$

то

$$\|D_{x, s+2r, s} Q_{2^k}(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \|D_{x, s+2r, s} (Q_{2^{\nu+1}}(x) - Q_{2^\nu}(x))\|_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\begin{aligned} \|D_{x, s+2r, s} Q_n(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq \|(1-x^2)Q_n''(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} + C_7 \|Q_n'(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\leq C_8 n^2 \|Q_n\|_{p, \alpha+r, \alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|D_{x, s+2r, s} Q_{2^k}(x)\|_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)} \|(Q_{2^{\nu+1}}(x) - Q_{2^\nu}(x))\|_{p, \alpha+r, \alpha} \\ &\leq 2C_9 \sum_{\nu=0}^{k-1} 2^{2(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p, \alpha+r, \alpha}. \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая неравенство (9), имеем

$$\tilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p, \alpha+r, \alpha} \leq \frac{C_{10}}{n^2} \sum_{\nu=0}^k 2^{2(\nu+1)} E_{2^\nu}(f)_{p, \alpha+r, \alpha}.$$

Замечая, что для $\nu = 1, 2, \dots, k$

$$\sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} j E_j(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \geq 2^{2(\nu-1)} E_{2^{\nu}}(f)_{p, \alpha+r, \alpha},$$

находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p, \alpha+r, \alpha} &\leq \frac{C_{11}}{n^2} \left(E_1(f)_{p, \alpha+r, \alpha} + \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1} j E_j(f)_{p, \alpha+r, \alpha} \right) \\ &\leq \frac{C_{12}}{n^2} \sum_{\nu=1}^n \nu E_{\nu}(f)_{p, \alpha+r, \alpha}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness. New York: Springer, 1987.
- [2] Löfström J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.
- [3] Pawelke S. Ein Satz von Jackenschen Typ für algebraische Polynome // Acta Sci. Math. 1972. V. 33. № 3–4. P. 323–336.
- [4] Butzer P., Stens R., Wehrens M. Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation // C. R. Math. Rend. Acad. Sci. Canada. 1980. № 2. P. 83–87.
- [5] Потапов М.К. О структурных и конструктивных характеристиках некоторых классов функций // Тр. МИАН. 1974. Т. 131. С. 211–231.
- [6] Потапов М.К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 260–277.
- [7] Потапов М.К. О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 3. С. 43–52.
- [8] Потапов М.К., Федоров В.М. О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости // Тр. МИАН. 1985. Т. 172. С. 291–298.
- [9] Potapov M.K. The operators of generalized translation in the approximation theory // Proceedings of the II Mathematical Conference in Pristina. Pristina, 1997. P. 27–36.
- [10] Потапов М.К. О приближении функций, характеризуемых одним несимметричным оператором обобщенного сдвига // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 243–259.
- [11] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
- [12] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
- [13] Халилова Б.А. О некоторых оценках для полиномов // Изв. АН АзССР. Сер. физ. -тех. наук. 1974. № 2. С. 46–55.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило

09.11.1999

Исправленный вариант

03.03.2000