Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 427–442

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:51:35

УДК 517.9+517.43

ФОРМУЛА СЛЕДА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов

Пусть $u(x)$ – функция ограниченной вариации на $[0, \pi]$, непрерывная в концах этого отрезка. Тогда корректно определен оператор Штурма–Лиувилля $Sy = -y'' + q(x)$ с краевыми условиями Дирихле и потенциалом $q(x) = u'(x)$ (равенство в смысле распределений). В работе доказана формула следа

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 - k^2 + b_{2k}) = -\frac{1}{8} \sum h_j^2,$$

где λ_k – собственные значения S , $b_k = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos kx du(x)$, а h_j – скачки функции $u(x)$. Более того, в случае локальной непрерывности $q(x)$ в точках 0 и π ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - k^2)$ суммируется методом средних и его сумма равна

$$-\frac{(q(0) + q(\pi))}{4} - \frac{1}{8} \sum h_j^2.$$

Библиография: 28 названий.

В этой работе мы получим формулу регуляризованного следа для дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с сингулярными потенциалами, не являющимися локально интегрируемыми функциями. В дальнейшем через S обозначаем оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y \tag{1}$$

и краевыми условиями Дирихле

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

В 1953 году И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [1] в предположении непрерывной дифференцируемости функции $q(x)$ получили замечательную формулу регуляризованного следа

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - k^2) = -\frac{q(0) + q(\pi)}{4}. \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-01000 и № 00-15-96100.

Здесь λ_k – собственные значения оператора S , и предполагается, что среднее потенциала $q(x)$ равно нулю.

Эта работа получила многочисленные продолжения. Здесь приведем ссылки на статьи [2]–[20], с которыми авторы познакомились при подготовке этой работы. Для обобщения этой формулы на случай операторов как второго, так и высших порядков, а также для операторов в частных производных, были развиты несколько тонких методов. Первый из них основан на исследовании гиперболического уравнения для ядра оператора S [1]. Другой мощный метод связан с изучением дзета-функции оператора S (см. [3], [10]). Он был развит не только для подсчета следов операторов, но и для вычисления регуляризованных сумм корней некоторых целых функций. Третий метод, предложенный в [7], использует параболическое уравнение для аналитической полугруппы, генерируемой оператором $-S$. Существенное развитие в применении к операторам в частных производных он получил в работе [15]. Идеи этого метода будут во многом использоваться и в настоящей работе. Четвертый метод [6] использует резольвентные тождества. Наконец пятый метод [4], [17] основан на теории возмущений операторов. Конечно, эти сведения дают лишь схематичное представление о рассматриваемой проблеме, но мы не ставили здесь цели развернутого изложения ее истории.

Мы обратили внимание на задачу о следе в связи с изучением операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами. В нашей работе [21] был предложен метод определения оператора, порожденного дифференциальным выражением (1) в случае, когда $q(x) \in H_2^{-1}(0, \pi)$, т.е. является производной функции $u(x) \in L_2(0, \pi)$ в смысле теории распределений. В этой же работе были исследованы основные свойства операторов с потенциалами такого типа. В частности, было доказано, что эти операторы имеют только дискретный спектр, причем главные члены асимптотики собственных значений и собственных функций остаются такими же, как и в случае гладких потенциалов. В недавней работе [22] асимптотические формулы [21] были уточнены. Приведем формулировку одного результата о собственных значениях, который будет затем использоваться.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $q(x) \in H_2^{-1}(0, \pi)$, т.е. найдется функция $u(x) \in L_2(0, \pi)$ такая, что $q(x) = u'(x)$ в смысле теории распределений на $(0, \pi)$. Тогда собственные значения оператора S , порожденного (1), (2), подчинены асимптотике

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \alpha_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{\alpha_n\}_1^\infty$ – последовательность из l_2 . Если же $u(x)$ – функция ограниченной вариации, то

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{b_0}{2n} - \frac{b_{2n}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi}(u(\pi) - u(0))$$

– среднее потенциала $q(x)$, а

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos kx \, du(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Отметим, что для потенциалов $q(x) = u'(x) \in L_2$ известна [13, гл. 1, § 5] более точная формула

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{b_0}{2n} - \frac{b_{2n}}{2n} + \frac{\alpha_n}{n^2}, \quad \{\alpha_n\}_1^\infty \in l_2. \quad (6)$$

Не ограничивая общности, всюду далее предполагаем, что среднее потенциала $b_0 = 0$ (этого можно добиться прибавлением к $q(x)$ постоянной). Из формул (5), (6) видно, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2) \quad (7)$$

абсолютно сходится, если $q(x)$ – гладкая функция (например, если $u''(x) = q'(x) \in L_2$, то $b_n = (1/n)\alpha_n$, $\{\alpha_n\}_1^\infty \in l_2$). Но уже в случае $q(x) \in AC$ (т.е. в случае $q'(x) \in L_1$) для коэффициентов Фурье справедливы лишь оценки $b_n = o(n^{-1})$, которые не гарантируют абсолютной сходимости ряда (7). Тем не менее, классическая формула следа остается справедливой для произвольного потенциала $q(x) \in L_2$, если ряд Фурье для $q(x)$ сходится в точках $x = 0$ и $x = \pi$ (тогда значения $q(0)$ и $q(\pi)$ получаются равными соответствующим суммам). Доказательство этого результат получил В. А. Марченко [13, гл. 1], но метод Л. А. Дикого [2] позволяет получить такой же результат, хотя в [2] этот метод реализован при более сильных предположениях на функцию $q(x)$. Конечно, абсолютная сходимость ряда (7) при таких условиях не гарантируется. Поэтому полезно отметить (см. [14]), что абсолютная сходимость ряда $\sum b_{2n}$ влечет абсолютную сходимость ряда (7). Такое условие выполняется, например, для функции $q(x)$ из класса Липшица Λ_α при $\alpha > 1/2$ (см. [23, гл. 6, § 3]).

Следующий шаг в направлении обобщения формулы (3) сделали В. А. Винокуров и В. А. Садовничий [20]. Они показали, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 + b_{2n}) = 0, \quad (8)$$

причем ряд сходится для произвольной функции $q(x) \in L_1$. Таким образом, для потенциалов класса L_1 задача о вычислении регуляризованного следа оказывается решенной: ряд (3) сходится в том и только том случае, когда сходится ряд $\sum (-b_{2n})$, причем их суммы совпадают. В этой связи полезно отметить следующий факт. *Формула (3) сохраняется для произвольного потенциала $q(x) \in L_1$, если косинус-ряд Фурье для $q(x)$ сходится в точках $x = 0$ и $x = \pi$, а значения $q(x)$ в этих точках полагаются равными соответствующим суммам.* Действительно, если $b_0 = 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} 2b_k \cos kx$ есть косинус-ряд Фурье функции $q(x)$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{2k} = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2b_k \cos kx \Big|_{x=0} + \sum_{k=1}^{\infty} 2b_k \cos kx \Big|_{x=\pi} \right) = \frac{q(0) + q(\pi)}{4}.$$

В частности, формула (3) справедлива для потенциалов $q(x)$ класса L_1 , если функция $\tilde{q}(x)$, являющаяся четным продолжением $q(x)$ относительно точек 0 и π , удовлетворяет условию Дини в этих точках. В нашем случае это эквивалентно сходимости интегралов

$$\int_0^\pi \frac{|q(t) - q(0)|}{t} dt, \quad \int_0^\pi \frac{|q(\pi - t) - q(\pi)|}{\pi - t} dt.$$

Оказывается, для неклассических потенциалов $q(x) \notin L_1$ равенство (8) уже не сохраняется, даже если $q(x)$ – гладкая функция в окрестности точек 0 и π . В недавней работе [24] было показано, что для функции $q(x) = h\delta(x - \pi/2) - h/\pi$ ряд $\sum(\lambda_n - n^2 + b_{2n})$ сходится к значению $-h^2/8$.

Целью этой работы является доказательство общей формулы регуляризованного следа для сингулярных потенциалов класса C_0^* , состоящего из распределений $q(x)$, для которых обобщенные первообразные $u(x) = \int q(x) dx$ являются функциями ограниченной вариации ($\in BV$), непрерывными в точках 0 и π . Обозначение C_0^* используется по следующей причине (см. ниже п. 2): указанный класс функций совпадает с пространством, сопряженным к $C_0 = C_0[0, \pi]$ относительно скалярного произведения в пространстве L_2 (здесь C_0 – подпространство в C , состоящее из функций, аннулирующихся на концах отрезка).

1. Формулировка основных результатов и лемма о суммировании. Пусть $q(x) \in C_0^*[0, \pi]$, т.е. ее обобщенная первообразная $u(x) = \int q(x) dx \in BV$ и непрерывна в точках 0 и π . Как и ранее, не ограничивая общности, считаем, что $\pi b_0 = u(\pi) - u(0) = 0$. Так как первообразная определена с точностью до постоянной, можно считать, что

$$u(0) = u(0+) = u(\pi) = u(\pi-) = 0.$$

Воспользуемся представлением $u(x) = v(x) + h(x)$, где $h(x)$ – функция скачков, а $v(x) \in C[0, \pi]$ (отделение сингулярной непрерывной компоненты далее не потребуется). Функция $h(x)$ имеет не более счетного числа скачков в точках $\{x_j\}$. Для определенности нормируем функцию $h(x)$ в точках разрыва условием $h(x_j + 0) = h(x_j)$. Если $h_j = h(x_j) - h(x_j - 0)$ – скачки функции, то ряд $\sum_j |h_j|$ сходится, а потому сходится ряд $\sum_j h_j^2$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\lambda_n\}_1^\infty$ – собственные значения оператора S , порожденного (1), (2) с потенциалом $q(x)$ класса C_0^* , а числа b_k определены (5). Тогда ряд в левой части (8) сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 + b_{2n}) = -\frac{1}{8} \sum_j h_j^2,$$

где h_j – величины скачков функции $u(x) = \int q(x) dx$.

Отметим, что в случае $q(x) \in L_1$ имеем $u(x) \in AC$, поэтому теорема 1 содержит результат работы [20]. Более того, равенство (8) сохраняется, если $u(x)$ содержит сингулярную непрерывную компоненту. Возникает вопрос: если $q(x)$ регулярна в окрестности точек 0 и π , то можно ли получить аналог формулы (3)? Ответ, вообще говоря, отрицателен. Например, для $q(x) = \delta(x - \pi/2) - 1/\pi$ имеем $b_{2n} = (-1)^n$, поэтому ряд $\sum b_{2n}$ расходится. Известно также, что коэффициенты b_n могут не стремиться к нулю и для сингулярной непрерывной функции $u(x)$. Например, это так для “лестницы Кантора” [23, гл. 5, § 3]. Но полезно отметить, что ряд $\sum b_n$ суммируется методом средних (равно как и методом Абеля), если $q(x)$ непрерывна в точках 0 и π . Поэтому возможна формулировка аналога формулы (3) для потенциалов $q \in C_0^*$ в терминах суммирования рядов. Перед формулировкой соответствующего результата докажем одно вспомогательное предложение.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x) \in BV$ и имеет левую и правую производные в точках 0 и π соответственно, т.е.

$$u(x) = xu'(0) + o(x), \quad u(\pi - x) = -xu'(\pi) + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow +0.$$

Тогда ряд $\sum b_{2n}$ суммируется методом средних, причем

$$(C, 1) \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{u'(0) + u'(\pi)}{4}.$$

В частности, если функция $u(x)$ абсолютно непрерывна в окрестности точек 0 и π , а функция $q(x) = u'(x)$ непрерывна в этих точках, то ряд $\sum b_{2n}$ суммируется методом средних и его сумма равна $(q(0) + q(\pi))/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы не смогли получить это утверждение как следствие известных классических результатов [23, гл. 3], поэтому приведем независимое доказательство.

Обозначим через $D_n(x)$ и $K_n(x)$ ядра Дирихле и Фейера

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right\}^2.$$

Поскольку $b_0 = u(\pi) - u(0) = 0$, то

$$S_n = \sum_{k=1}^n b_{2k} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n \cos 2kx \right) du(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x) du\left(\frac{x}{2}\right).$$

Обозначим

$$f(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}u'(0), \quad g(x) = u\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi - x}{2}u'(\pi);$$

$$F_n = \int_0^{2\pi} D_n(x) df(x), \quad G_n = \int_\pi^{2\pi} D_n(x) dg(x).$$

С учетом известных равенств

$$\int_0^\pi K_n(x) dx = \int_\pi^{2\pi} K_n(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

получим

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) du\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_n(x) df(x) + \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} K_n(x) dg(x) \\
&\quad + \frac{u'(0)}{2\pi} \int_0^\pi K_n(x) dx + \frac{u'(\pi)}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} K_n(x) dx \\
&=: \frac{1}{\pi} F_n + \frac{1}{\pi} G_n + \frac{u'(0) + u'(\pi)}{4}.
\end{aligned}$$

Покажем, что $F_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Доказательство соотношения $G_n \rightarrow 0$ проводится аналогично. Вычислив $K'(x)$, легко убедиться, что

$$K'(x) < 0 \quad \text{при } x \in \left(0, \frac{\delta}{n}\right),$$

где $\delta > 0$ – постоянная. Следовательно, полная вариация функции $K_n(x)$ на отрезке $[0, \delta/n]$ равна $K(0+) - K_n(\delta/n) = O(n)$. Далее, очевидна оценка

$$|K'_n(x)| \leq Cx^{-2} \quad \text{при } x \in \left(\frac{\delta}{n}, \pi\right), \quad C = C(\delta) = \text{const}.$$

Интегрируя по частям и учитывая соотношение $f(x) = o(x)$, получим

$$\begin{aligned}
|F_n| &= \left| \int_0^\pi K_n(x) df(x) \right| = \left| K_n(\pi)f(\pi) - \int_0^{\delta/n} f(x) dK_n(x) - \int_{\delta/n}^\pi f(x) K'_n(x) dx \right| \\
&= O\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) O(n) + \int_{\delta/n}^\pi o(x) O(x^{-2}) dx = o(1).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из этой леммы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Если в условиях теоремы 1 функция $u(x) = \int q(x) dx$ дифференцируема в точках 0 и π , то ряд (3) суммируем методом средних, причем

$$(C, 1) \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2) = -\frac{u'(0) + u'(\pi)}{4} - \frac{1}{8} \sum_j h_j^2. \quad (9)$$

В частности, если $q(x)$ регулярная (т.е. суммируемая) функция в окрестностях концов 0 и π и непрерывна в этих точках, то сумму $u'(0) + u'(\pi)$ в (9) можно заменить на $q(0) + q(\pi)$.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть S – оператор в $L_2 = L_2[0, \pi]$, порожденный (1), (2), а S_0 такой же оператор, но с нулевым потенциалом $q(x) \equiv 0$. Оба оператора являются самосопряженными и полуограниченными, поэтому корректно определены (см., например, [25, гл. 9]) аналитические полугруппы

$$V_0(t) = e^{-S_0 t}, \quad V(t) = e^{-S t}.$$

Далее через $\{\psi_n\}_1^\infty$ и $\{\varphi_n\}_1^\infty$ обозначаем ортонормированные базисы собственных функций операторов S_0 и S соответственно. По определению имеем

$$\psi_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad V_0(t)\psi_k = e^{-k^2 t}\psi_k, \quad V(t)\varphi_k = e^{-\lambda_k t}\varphi_k.$$

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов. Вначале мы напомним определение оператора S , введем необходимые для дальнейшей работы пространства, выясним, каким образом оператор S (или оператор Q умножения на функцию q) действует в этих пространствах. В частности, мы покажем, что Q – ограниченный оператор из пространства C_0 в пространство C_0^* .

На втором шаге мы получим оценки нормы сглаживающей полугруппы $V_0(t)$ как оператор-функции, действующей из пространства C_0^* в C_0 , а также оценки норм рекуррентно определяемой последовательности оператор-функций

$$V_n(t) = - \int_0^t V_0(t-s)QV_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

действующих из пространства L_2 в C_0 . Более того, мы покажем, что полугруппа $V(t)$ допускает представление

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t), \quad (11)$$

где ряд сходится в смысле нормы пространства операторов, действующих из L_2 в C_0 .

На третьем шаге мы покажем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - k^2 + b_{2k}) e^{-k^2 t} = -\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (V_2(t)\psi_k, \psi_k) + o(1), \quad (12)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$.

На четвертом шаге мы вычислим

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (V_2(t)\psi_k, \psi_k) = \frac{1}{8} \sum_j h_j^2 + o(1) \quad \text{при } t \rightarrow +0.$$

Наконец, на последнем шаге, используя тауберову теорему и асимптотику (4), мы покажем, что ряд в левой части (12) сходится при $t = 0$, из чего получим утверждение теоремы 1.

Шаг 1. Определение операторов Штурма–Лиувилля с локально не суммируемыми потенциалами $q(x)$, для которых $\int q(x) dx \in BV$, было предложено М.Г. Крейном и М.А. Кацем и независимо Ф. Аткинсоном (см. подробнее [26]). Мы приведем здесь другое, более общее определение из недавней статьи [21]. Согласно [21]

$$Sy = -(y^{[1]})' - u(x)y^{[1]} - u^2(x)y, \quad y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x), \quad u(x) = \int q(x) dx,$$

а область определения S состоит из функций

$$\mathfrak{D}(S) = \{y \mid y, y^{[1]} \in W_1^1[0, \pi], Sy \in L_2[0, \pi], y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Для дальнейшей работы с оператором S нам потребуются два предложения.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{D}'$ – пространство распределений на интервале $(0, \pi)$. Пространство

$$C_0^* = \left\{ q \in \mathcal{D}' \mid u(x) = \int q(x) dx \in BV, u(\pi) = u(\pi - 0), u(x) = u(x + 0) \forall x \in [0, \pi) \right\} \quad (13)$$

с нормой

$$\|q\|_{C_0^*} = \text{Var } u(x) \mid \pi$$

является сопряженным к C_0 относительно скалярного произведения в L_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению первообразной $u(x) = \int q(x) dx$ в смысле теории распределений для функции $\varphi \in \mathcal{D} = C_0^\infty(0, \pi)$ имеем

$$(q, \varphi) = -(u, \varphi') = - \int_0^\pi \overline{\varphi'(x)} u(x) dx = \int_0^\pi \overline{\varphi(x)} du(x).$$

Это равенство по непрерывности продолжается на все пространство C_0 . Согласно теореме Рисса отображение $C^* \ni q(x) \rightarrow u(x) \in BV$ есть изоморфизм (если функции из BV нормировать, например, условием $u(x + 0) = u(x)$ во внутренних точках отрезка $[0, \pi]$, так как интеграл Стильтьеса не “чувствует” разницу в определении функции $u(x)$ в ее внутренних точках разрыва). Поскольку C_0 имеет коразмерность 2 в C , то C_0^* имеет коразмерность 2 в C^* . Заряды, сосредоточенные в точках 0 и π , аннулируются на функциях $\varphi \in C_0$, поэтому для C_0^* получаем представление (13). Норма в C_0^* , естественно, наследуется нормой C^* . Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Оператор Q умножения на функцию $q(x)$ является ограниченным из пространства C_0 в C_0^* и определяется на функциях $\varphi \in C_0$ равенством

$$Q\varphi = (q\varphi)(x) = u'_\varphi, \quad u_\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) du(t), \quad u(x) = \int q(x) dx. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве распределений умножение определено лишь на функции из C^∞ . Если $\varphi \in C^\infty$, то согласно определению

$$(q\varphi, \psi) = (u'_\varphi, \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{D} = C_0^\infty(0, \pi).$$

Если u_φ определена (14), то

$$(q\varphi, \psi) = -(u, (\bar{\varphi}\psi)') = \int_0^\pi \varphi(x) \overline{\psi(x)} du(x) = \int_0^\pi \overline{\psi(x)} du_\varphi(x) = -(u_\varphi, \psi') = (u'_\varphi, \psi).$$

Следовательно, $Q\varphi = u'_\varphi(x)$ в смысле распределений, причем $Q\varphi \in C_0^*$, если $q(x) \in C_0^*$. Это равенство продолжается по непрерывности на все пространство C_0 , причем

$$\|Q\varphi\|_{C^*} = \text{Var } u_\varphi(x) \leq \|\varphi\|_C \text{Var } u(x) = \|\varphi\|_C \|q\|_{C^*}.$$

Лемма доказана.

Обозначим через H^1 пространство, совпадающее с областью определения квадратичной формы оператора S_0 , а через H^{-1} – дуальное к нему пространство по отношению к $H^0 = L_2$. Очевидно, H^1 состоит из функций соболевского пространства $H_2^1[0, 1]$, аннулирующихся на концах отрезка, а H^{-1} состоит из распределений, обобщенная первообразная которых принадлежит L_2 . Конечно, операторы S_0 и S имеют разные области определения, но области определения их квадратичных форм совпадают, поскольку в силу леммы 3 квадратичная форма $(Q\varphi, \varphi)$ определена на $C_0 \supset H^1$. Более того, поскольку H^1 компактно вложено в C_0 , оператор S является компактным возмущением оператора S_0 в смысле квадратичных форм (в частности, оператор S полуограничен, см. [25, гл. 6]). При этом операторы S_0 и S действуют ограничено из H^1 в H^{-1} , а их резольвенты $(S_0 - \lambda)^{-1}$ и $(S - \lambda)^{-1}$ осуществляют биекцию H^{-1} на H^1 . Важно отметить следующий факт: так как вложение $H^1 \subset C_0$ плотно, в силу леммы 2 имеем

$$C_0^* \subset H^{-1}. \quad (15)$$

Шаг 2. В силу аналитичности полугруппа $V_0(t)$ является сглаживающей при $t > 0$ во всей шкале пространств, ассоциированных с оператором S_0 ; в частности, $V_0(t)$ действует ограничено из H^{-1} в H^1 . В силу вложения (15) операторы $V_0(t): C_0^* \rightarrow C_0$ также ограничены при $t > 0$. Нам потребуются оценки норм этих операторов.

ЛЕММА 4. *Справедливы оценки*

$$\|V_0(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq c_0 t^{-1/4}, \quad (16)$$

$$\|V_0(t)\|_{C_0^* \rightarrow C_0} \leq \sqrt{2} c_0^2 t^{-1/2}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $f \in L_2$ имеем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(x), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \|f\|_{L_2}^2, \quad |\psi_k(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|V_0(t)f\|_C &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} |f_k| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k^2 t} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq c_0 t^{-1/4} \|f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Мы доказали (16). Заметим, что оператор $V_0(t): C_0^* \rightarrow L_2$ является сопряженным к оператору $V_0(t): L_2 \rightarrow C_0$, а потому их нормы совпадают. Согласно свойству полугруппы $V_0(t) = V_0(t/2)V_0(t/2)$. Первый оператор будем рассматривать из C_0^* в L_2 , а второй из L_2 в C_0 . Тогда доказанная оценка влечет (17). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть оператор-функции $V_n(t)$ определены рекуррентными соотношениями (10). Тогда*

$$\|V_n(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq c_1^n \frac{1}{(n/2)!} t^{n/2-1/4}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|Q\|$ – норма оператора $Q: C_0 \rightarrow C_0^*$. Положим $c_2 = \sqrt{2}c_0^2\|Q\|$. В силу леммы 4 оператор-функция $V_1(t): L_2 \rightarrow C_0$ корректно определена, причем

$$\|V_1(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq c_2 c_0 \int_0^t (t-s)^{-1/2} s^{-1/4} ds \leq c_2 c_0 B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) t^{1/4},$$

где $B(x, y)$ – бета-функция Эйлера. Имея оценки для нормы $V_1(t)$, аналогично получаем оценку

$$\|V_2(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) c_2 (c_2 c_0) \int_0^t s^{1/4} (t-s)^{-1/2} ds \leq c_2^2 c_0 B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right) t^{3/4}.$$

Учитывая известную формулу $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$, по индукции получаем оценку

$$\|V_n(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq c_0 \Gamma(3/4) c_2^n \frac{\Gamma^n(1/2)}{\Gamma(n/2 + 3/4)} t^{n/2 - 1/4},$$

которая влечет (18). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Полугруппа $V(t)$ допускает представление (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость ряда в правой части (11) следует из леммы 5. Заметим, что сумма ряда удовлетворяет уравнению

$$V(t) = V_0(t) - \int_0^t V_0(t-s) Q V(s) ds. \quad (19)$$

В силу той же леммы 5 имеем оценку

$$\|V(t)\|_{L_2 \rightarrow C_0} \leq c t^{-1/4} e^{\beta t} \quad \text{с } \beta = \text{const}. \quad (20)$$

Умножим уравнение (19) на $e^{-\zeta t}$ и проинтегрируем по $0 < t < \infty$, предполагая, что $\text{Re } \zeta > \beta$. Получим (ср. [25, гл. 9, § 2.1])

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= \int_0^\infty e^{-\zeta t} V(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\zeta t} V_0(t) dt - \left(\int_0^\infty e^{-\zeta t} V_0(t) dt \right) Q \left(\int_0^\infty e^{-\zeta t} V(t) dt \right) \\ &= (\zeta + S_0)^{-1} - (\zeta + S_0)^{-1} Q R_1(\zeta). \end{aligned}$$

Согласно (20) оператор $R_1(t): L_2 \rightarrow C_0$ ограничен, поэтому приведенные выкладки корректны. Так как оператор $(\zeta + S_0)^{-1}: H^{-1} \rightarrow H^1$ ограничен, из последнего равенства следует, что $R_1(\zeta): L_2 \rightarrow H^1$ ограничен. Но тогда

$$(S_0 + Q + \zeta) R_1(\zeta) = (S + \zeta) R_1(\zeta) = 1,$$

если это равенство понимать в пространстве H^{-1} . Оператор $S + \zeta$ обратим в H^{-1} при $\zeta \notin \sigma(S)$, поэтому $R_1(-\zeta)$ есть резольвента S в пространстве H^{-1} , а потому и в пространстве $H^0 = L_2$. Тогда $V(t)$ – полугруппа с генератором $-S$ (см. [25, гл. 9]). Лемма доказана.

Шаг 3. Заметим, что

$$\begin{aligned} |(QV_{n-1}(s)\psi_k, \psi_k)| &= |(V_{n-1}(s)\psi_k, Q\psi_k)| \leq \|Q\| \|\psi_k\|_{C_0} \|V_{n-1}(s)\psi_k\|_{L_2 \rightarrow C_0} \\ &\leq \|Q\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1^n \frac{1}{(n/2)!} s^{n/2-3/4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |(V_n(t)\psi_k, \psi_k)| &= \left| \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} (V_0(t-s)QV_{n-1}(s)\psi_k, \psi_k) ds \right| \\ &= \left| \int_0^t (QV_{n-1}(s)\psi_k, V_0(t-s)\psi_k) ds \right| \\ &\leq \|Q\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_1^n \frac{1}{(n/2)!} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2(t-s)} s^{n/2-3/4} ds \\ &\leq c_3^n \frac{1}{(n/2)!} t^{n/2-1/4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \frac{1}{t} \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (V_n(t)\psi_k, \psi_k) \right| = O(t^{1/4}) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Оператор $V(t)$ при $t > 0$ ядерный, и его матричный след не зависит от выбора базиса (см. [27, гл. 2]). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (V(t)\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (V(t)\psi_k, \psi_k) \\ &= \frac{1}{t} \sum_{l=1}^{\infty} ((V_0(t) + V_1(t) + V_2(t))\psi_k, \psi_k) + o(t^{1/4}). \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, $(V_0(t)\psi_k, \psi_k) = e^{-k^2 t}$, а с учетом асимптотики (4) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-\lambda_k t} - e^{-k^2 t}) &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} ((k^2 - \lambda_k)t + O(t^2)) \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} (\lambda_k - k^2) + O(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Слагаемое с функцией $V_1(t)$ легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (V_1(t)\psi_k, \psi_k) &= -\frac{1}{t} \int_0^t (V_0(t-s)QV_0(s)\psi_k, \psi_k) ds \\ &= -\frac{1}{t} \int_0^t (QV_0(s)\psi_k, V_0(t-s)\psi_k) ds \\ &= -e^{-k^2 t} (Q\psi_k, \psi_k) = -\frac{2}{\pi} e^{-k^2 t} \int_0^{\pi} \sin^2 kx du(x) \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-k^2 t} \int_0^{\pi} \cos 2kx du(x) = e^{-k^2 t} b_{2k}. \end{aligned}$$

Теперь из (21) получаем соотношение (12).

Шаг 4. Вычислим теперь слагаемое с функцией $V_2(t)$. Сначала заметим, что

$$\begin{aligned}
 (V_0(t-s)QV_1(s)\psi_k, \psi_k) &= (QV_1(s)\psi_k, V_0(t-s)\psi_k) = e^{-k^2(t-s)}(V_1(s)\psi_k, Q\psi_k) \\
 &= - \int_0^s e^{-k^2(t-s)} (V_0(s-\tau)QV_0(\tau)\psi_k, Q\psi_k) d\tau \\
 &= - \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)} (V_0(s-\tau)Q\psi_k, Q\psi_k) d\tau \\
 &= - \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} (V_0(s-\tau)Q\psi_k, \psi_n)(\psi_n, Q\psi_k) d\tau \\
 &= - \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} (Q\psi_k, V_0(s-\tau)\psi_n)(\psi_n, Q\psi_k) d\tau \\
 &= - \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)} e^{-n^2(s-\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} |(Q\psi_k, \psi_n)|^2 d\tau.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 (V_2(t)\psi_k, \psi_k) &= - \int_0^t (V_0(t-s)QV_1(s)\psi_k, \psi_k) ds \\
 &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^t \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)} e^{-n^2(s-\tau)} \\
 &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin nx \sin ny \sin kx \sin ky du(x) du(y) d\tau ds.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sin nx \sin ny \sin kx \sin ky = \frac{1}{16} \sum_1^{16} (\pm 1) e^{i(\alpha k + \beta n)}, \quad (22)$$

где α и β принимают одно из четырех значений $\pm(x+y)$, $\pm(x-y)$. Далее,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{t} \sum_{k,n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^s e^{-k^2(t-s+\tau)-n^2(s-\tau)} e^{i(\alpha k + \beta n)} d\tau ds \\
 &= \frac{1}{t} \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\int_0^t \int_0^s e^{-u^2(t-s+\tau)-v^2(s-\tau)} d\tau ds \right) e^{i(\alpha u + \beta v)} d[u] d[v] \\
 &= t \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-u^2 t} - e^{-v^2 t} - t(v^2 - u^2)e^{-v^2 t}}{t^2(u^2 - v^2)^2} e^{i(\alpha u + \beta v)} d[u] d[v] \\
 &= \varepsilon^2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(\varepsilon u, \varepsilon v) e^{i(\alpha u + \beta v)} d[u] d[v] =: J(\varepsilon, \alpha, \beta), \quad (23)
 \end{aligned}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть,

$$\varepsilon = \sqrt{t}, \quad f(r, s) = \frac{e^{-r^2} - e^{-s^2} - (s^2 - r^2)e^{-s^2}}{(s^2 - r^2)^2}. \quad (24)$$

Проведенные выкладки законны, так как $f(r, s)$ непрерывна, включая диагональ $r = s$.

ЛЕММА 7. Пусть функции $f(r, s)$, $f'_r(r, s)$, $f'_s(r, s)$ непрерывны и принадлежат пространству $L_1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, а интеграл $J(\varepsilon) = J(\varepsilon, \alpha, \beta)$ определен (23). Если $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ или $\beta \neq 0 \pmod{2\pi}$, то $J(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В случае $\alpha = 0 \pmod{2\pi} = \beta$ имеем

$$J(\varepsilon) \rightarrow \int_0^\infty \int_0^\infty f(r, s) dr ds \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\alpha = 0 \pmod{2\pi} = \beta$ имеем

$$J(\varepsilon) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(r, s) d\varepsilon \left[\frac{r}{\varepsilon} \right] d\varepsilon \left[\frac{s}{\varepsilon} \right] \rightarrow \int_0^\infty \int_0^\infty f(r, s) dr ds$$

согласно определению интеграла.

Пусть, например, $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$. Тогда

$$\begin{aligned} J(\varepsilon) &= \varepsilon^2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(\varepsilon u, \varepsilon v) e^{i\beta v} \left(d \int_0^u e^{i\alpha \tau} d[\tau] \right) d[v] \\ &= -\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\infty f'_r(r, s) e^{i\beta s/\varepsilon} \left(\int_0^{r/\varepsilon} e^{i\alpha \tau} d[\tau] \right) dr d\varepsilon \left[\frac{s}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Функция, заключенная в скобки под знаками интегралов, ограничена, поэтому

$$|J(\varepsilon)| \leq C\varepsilon \int_0^\infty \int_0^\infty |f'_r(r, s)| dr d\left(\varepsilon \left[\frac{s}{\varepsilon} \right]\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Отметим, что функция f , определенная в (24), удовлетворяет условиям леммы 7, т.е. $f(r, s)$ и ее частные производные непрерывны и суммируемы на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Например,

$$f'_r(r, s) = \frac{2r(e^{-s^2}(2 + s^2 - r^2) + e^{-r^2}(s^2 - r^2 - 2))}{(r^2 - s^2)^3}.$$

При $|r - s| \leq 1$ имеем

$$f'_r(r, s) = (C + O(r^2 - s^2))re^{-r^2}.$$

Отсюда легко заключаем суммируемость функции $f'_r(r, s)$.

ЛЕММА 8. Имеем

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} - e^{-y^2} - (y^2 - x^2)e^{-y^2}}{(x^2 - y^2)^2} dx dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}(e^{(y^2-x^2)\alpha} - 1 - \alpha(y^2 - x^2))}{(x^2 - y^2)^2} dx dy,$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда искомый интеграл есть $\frac{1}{4}I(1)$. Легко видеть, что $I(0) = 0$ и $I'(0) = 0$,

$$I'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2}(e^{(y^2-x^2)\alpha} - 1)}{y^2 - x^2} dx dy.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$I''(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2(1-\alpha)-x^2\alpha} dx dy = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha - \alpha^2}}.$$

Интегрируя эту функцию два раза и учитывая $I(0) = I'(0) = 0$, получим требуемый результат. Лемма доказана.

Теперь мы можем найти предел правой части (12). Используя (23) и (22), получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} (V_2(t)\psi_k, \psi_k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\varepsilon, x, y) du(x) du(y),$$

где

$$\Phi(\varepsilon, x, y) = \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{16} \right) \sum_1^{16} (\pm 1) J(\varepsilon, \alpha, \beta). \quad (25)$$

Перестановка интегрирования и суммирования законны в силу абсолютной сходимости рядов. Теперь замечаем, что если $x \neq y$, то все слагаемые в (25) таковы, что $\alpha, \beta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Если же $x = y$, но $x + y \neq 0 \pmod{2\pi}$, то 4 из 16 слагаемых в (25) равны 1. Воспользовавшись леммами 7 и 8, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(\varepsilon, x, y) = \frac{1}{8} \chi(x, y),$$

где функция $\chi(x, y)$ равна 1 на диагонали $x = y$, исключая концы $x = y = 0$ и $x = y = \pi$, а во всех остальных точках равна 0.

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и учитывая непрерывность функции $u(x)$ в концах отрезка, получим, что вычисляемый предел равен

$$\frac{1}{8} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \chi(x, y) du(x) du(y) = \frac{1}{8} \sum_j h_j^2.$$

Шаг 5. Для завершения доказательства воспользуемся известной тауберовой теоремой [28].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\{\gamma_k\}_1^\infty$ – монотонно возрастающая последовательность,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t} = s \quad \text{и} \quad a_k = O\left(\frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k}\right),$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна s .

В нашем случае $\gamma_k = k^2$ и, применяя асимптотику (4), получаем

$$a_k = \lambda_k - k^2 + b_{2k} = O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В мае–июне 2000 года авторы сообщили специалистам в МГУ о возможности получения формулы регуляризованного следа для потенциалов, являющихся производными от зарядов. В процессе технической доработки этой статьи Савчук [24] независимо нашел простое доказательство полученной здесь формулы регуляризованного следа для случая модельного потенциала $q(x) = \text{const} \cdot \delta(x)$.

Пользуясь возможностью, авторы благодарят А. Г. Костюченко, В. Е. Подольского и А. С. Печенцова за консультацию по литературе о регуляризованных следах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [2] Дикий Л. А. Об одной формуле Гельфанда–Левитана // УМН. 1953. Т. 8. № 2. С. 119–123.
- [3] Дикий Л. А. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. № 4. С. 187–200.
- [4] Крейн М. Г. Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. № 2. С. 268–271.
- [5] Левитан Б. М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма–Лиувилля // УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 161–165.
- [6] Шевченко Р. Ф. Регуляризация следа обыкновенного дифференциального оператора // Вестн. МГУ. 1965. № 6. С. 28–36.
- [7] Садовнический В. А. О следе разности двух обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2. № 12. С. 1611–1624.
- [8] Садовнический В. А. О тождествах для собственных значений системы Дирака и некоторых других систем высшего порядка // Вестн. МГУ. 1967. № 3. С. 37–47.
- [9] Садовнический В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Матем. сб. 1967. Т. 72. № 2. С. 293–317.
- [10] Лидский В. Б., Садовнический В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 2. С. 259–262.
- [11] Гусейнов Г. С., Левитан Б. М. О формулах следов для операторов Штурма–Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1978. № 1. С. 40–49.
- [12] Садовнический В. А., Дубровский В. В. О некоторых соотношениях для собственных чисел дискретных операторов. Формулы следов для дифференциальных операторов в частных производных // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 11. С. 2034–2042.
- [13] Марченко М. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [14] Дубровский В. В. Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 6. С. 1127–1129.

- [15] Любишкин В. А., Подольский В. Е. О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 2. С. 33–38.
- [16] Papanicolaou V. G. Trace formulas and the behaviour of large eigenvalues // SIAM J. Math. Anal. 1995. V. 26. № 1. P. 218–237.
- [17] Садовничий В. А., Любишкин В. А. Формулы следов и теория возмущений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 5. С. 1064–1066.
- [18] Lax P. D. Trace formulas for the Schroedinger operator // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. № 4. P. 503–512.
- [19] Gesztesy F., Holden H., Simon B., Zhao Z. Trace formulae and inverse spectral theory for Schroedinger operators // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29. № 2. P. 250–255.
- [20] Винокуров В. А., Садовничий В. А. Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 3. С. 295–297.
- [21] Савчук А. М., Шкаликков А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
- [22] Савчук А. М. О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 2. С. 277–285.
- [23] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
- [24] Савчук А. М. Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ -потенциалом // УМН. 2001 (в печати).
- [25] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [26] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
- [27] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
- [28] Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.

(А. М. Савчук, А. А. Шкаликков) Московский государственный университет
(А. А. Шкаликков) Postech University of Pohang, Korea
E-mail: savchuk_am@public.mtu.ru, shkal@mech.math.msu.su

Поступило
08.09.2000