Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Е. А. Полькина, Критерий конциркулярной подвижности квази-сасакиевых многообразий, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 380–388

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 12:48:34

Критерий конциркулярной подвижности квази-сасакиевых многообразий

В. Ф. Кириченко, Е. А. Полькина

Рассмотрен вопрос, какие из квази-сасакиевых структур (косимплектические, сасакиевы или собственные квази-сасакиевы) допускают нетривиальные конциркулярные преобразования метрики, т.е. определяют пространства Фиалкова, и если допускают, то при каких условиях. Доказано, что косимплектическое многообразие всегда является пространством Фиалкова. Для сасакиевых и квази-сасакиевых многообразий получены необходимые и достаточные условия, при которых они таковыми являются. Выделен достаточно обширный класс многообразий Сасаки, которые не являются пространствами Фиалкова.

Библиография: 11 названий.

Введение. Объектом исследования данной работы являются конциркулярные преобразования. Изучение конциркулярно-инвариантных свойств структур является отдельной актуальной задачей современной дифференциальной (см., например, работы Фиалкова [1], Синюкова [2], Лейко [3]) и, в частности, контактной [4] геометрии. Активное изучение последней и новые факты геометрии квази-сасакиевых структур [5] позволило сформулировать задачу: допускают ли квази-сасакиевы структуры нетривиальные конциркулярные преобразования метрики и если допускают, то при каких условиях.

Предварительные сведения. Пусть M^{2n+1} – гладкое нечетномерное многообразие размерности свыше трех; $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1} ; $X(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M^{2n+1} ; $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика; ∇ – риманова связность метрики g на M ;

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

– ее тензор Римана–Кристоффеля; d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [6], что *почти контактной метрической* (далее $\mathcal{AC}$ -) *структурой* на многообразии M называется четверка (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η – контактная форма структуры; ξ – векторное поле, называемое *характеристическим*; Φ – поле тензора типа $(1; 1)$, называемое *структурным эндоморфизмом* модуля $X(M)$. При этом

$$1) \quad \eta(\xi) = 1;$$

$$2) \quad \eta \circ \Phi = 0;$$

- 3) $\Phi(\xi) = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$;
- 5) $\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y)$, $X, Y \in X(M)$.

Тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ кососимметричен и называется *фундаментальной формой $\mathcal{AC}$ -структуры*. Многообразие с фиксированной на нем $\mathcal{AC}$ -структурой называют *$\mathcal{AC}$ -многообразием*.

В $C^\infty(M)$ -модуле $X(M)$ гладких векторных полей на $\mathcal{AC}$ -многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{l} = \text{id} - \eta \otimes \xi = -\Phi^2$ и $\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi = \text{id} + \Phi^2$ на распределения $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi = \ker \eta$ и $\mathcal{M} = \ker \Phi = L(\xi)$ размерностей $2n$ и 1 соответственно, причем $X(M^{2n+1}) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Поскольку модуль $X(M)$ можно рассматривать как R -линейное пространство, его комплексификация $X^C(M) = \mathbb{C} \otimes X(M)$ распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ :

$$X^C(M) = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0,$$

где $D_\Phi^0 = \mathcal{M}^C$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут соответственно эндоморфизмы

$$\pi = \sigma \circ \mathfrak{l} = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\pi} = \bar{\sigma} \circ \mathfrak{l} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \mathfrak{m} = \text{id} + \Phi^2.$$

Доказано [6], что к $(2n+1)$ -мерному $\mathcal{AC}$ -многообразию, внутренним образом присоединяется G -структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$. Топальное пространство этой G -структуры состоит из модифицированных А-реперов, т.е. комплексных реперов вида $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_a)$, $(e_1, \dots, e_n)$ – базис пространства $\mathcal{L}_p$, как $\mathbb{C}$ -модуля, $p \in M$. Матрицы тензоров Φ и g в этих реперах принимают соответственно вид

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix},$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Здесь и далее индексы i, j, k пробегает значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$.

$\mathcal{AC}$ -Структура называется *нормальной*, если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]).$$

Квази-сасакиевой (далее QS-) *структурой*, называется нормальная $\mathcal{AC}$ -структура с замкнутой фундаментальной формой.

Теория квази-сасакиевых многообразий берет свое начало в работах Блэра [7] и в дальнейшем развивается в трудах Танно, Канемаки и других авторов. С помощью аппарата теории присоединенных G -структур эти многообразия исследованы в работе [5].

Квази-сасакиевы структуры включают в себя как подклассы сасакиевы и косимплектические структуры. QS-структуры, отличные от сасакиевых и косимплектических, называют *собственными*. Так [6], QS-многообразие с фиксированной на нем

QS-структурой (η, ξ, Φ, g) , где $d\eta = 0$, является *косимплектическим* многообразием. Если $d\eta = 2\Omega$, то QS-многообразие является *сасакиевым*.

Напомним также, что в классе конформных преобразований метрики псевдориманова многообразия выделяют нетривиальные конформные преобразования, которые сохраняют геодезические окружности – кривые, у которых первая кривизна постоянна, а остальные кривизны равны нулю. Такие преобразования называются *конциркулярными*. Японским геометром Кентаро Яно был получен критерий, позволяющий выделить конциркулярные преобразования из класса конформных.

Конциркулярным преобразованием $\mathcal{AC}$ -структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M называется переход от S к $\mathcal{AC}$ -структуре $\hat{S} = (\hat{\eta}, \hat{\xi}, \Phi, \hat{g})$, где $\hat{\eta} = e^{-\sigma}$, $\hat{\xi} = e^{\sigma}\xi$, $\hat{g} = e^{-2\sigma}g$, σ – определяющая функция преобразования, являющаяся решением системы дифференциальных уравнений Яно [8]:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j + \beta g_{ij},$$

где $\{\sigma_i\}$ – компоненты 1-формы $d\sigma$, $\{\sigma_{i,j}\}$ – компоненты ее ковариантного дифференциала, $\beta = \beta(\sigma) \in C^\infty(M)$. Определяющая функция σ является инвариантом данного преобразования. Если $\sigma = \text{const}$, конциркулярное преобразование называется *тривиальным* или *гомотетией*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $\mathcal{AC}$ -Многообразие M с $\mathcal{AC}$ -структурой $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ называется *локально конциркулярно квази-сасакиевым* (далее lzQS-) многообразием, если в некоторой окрестности U каждой точки из M существует конциркулярное преобразование метрики g , переводящее структуру S в квази-сасакиеву структуру $\hat{S} = (\hat{\eta}, \hat{\xi}, \Phi, \hat{g})$, где

$$\begin{aligned} 1) \quad & \hat{\eta} = e^{-\sigma}\eta|_U; \\ 2) \quad & \hat{\xi} = e^{\sigma}\xi|_U; \\ 3) \quad & \hat{g} = e^{-2\sigma}g|_U; \end{aligned} \tag{1}$$

$\sigma \in C^\infty(U)$ – определяющая функция конциркулярного преобразования, которая является решением системы дифференциальных уравнений Яно:

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i \sigma_j + \beta g_{ij}, \tag{2}$$

где $\{\sigma_i\}$ – компоненты 1-формы $d\sigma$, $\{\sigma_{i,j}\}$ – компоненты ее ковариантного дифференциала, $\beta = \beta(\sigma) \in C^\infty(M)$.

Доказано [9], что если существует конциркулярное преобразование, переводящее lzQS-структуру в QS-структуру, то оно определено однозначно с точностью до гомотетии. Назовем такое преобразование *каноническим*.

Критерий существования нетривиальных конциркулярных преобразований на данном псевдоримановом многообразии доказан Кириченко и Власовой [10]:

ТЕОРЕМА 1. Псевдориманово многообразие $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ допускает нетривиальное локальное конциркулярное преобразование метрики тогда и только тогда, когда оно является пространством Фиалкова [1] (в иной терминологии эквидистантным пространством [2]), т.е. допускает ненулевую дифференциальную 1-форму τ такую, что $\nabla\tau = \gamma g$, где γ – подходящая гладкая функция на M . Это преобразование определено глобально тогда и только тогда, когда форма τ точна.

Критерий конциркулярной подвижности QS-многообразий. Итак, с учетом всего сказанного выше IzQS -структуры – это $\mathcal{AC}$ -структуры, которые посредством нетривиального локально конциркулярного преобразования (в случае, когда оно существует) переходят в QS-структуры. В свою очередь, QS-структуры включают в себя:

- косимплектические структуры;
- структуры Сасаки;
- собственные QS-структуры.

С учетом теоремы 1 исходная IzQS -структура, так как для нее по определению существует нетривиальное локально конциркулярное преобразование в QS-структуру, будет определять многообразие, являющееся пространством Фиалкова.

В данном пункте будет рассмотрен вопрос, какие из QS-структур, в свою очередь, допускают нетривиальные конциркулярные преобразования метрики (т.е. определяют пространства Фиалкова), и если допускают, то при каких условиях.

1. Критерий конциркулярной подвижности косимплектических многообразий. Пусть M – косимплектическое многообразие. В работе [4] доказана

ТЕОРЕМА 2. *Класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом $\mathcal{AC}$ -многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием косимплектической структуры.*

Косимплектические структуры, таким образом, всегда допускают нетривиальное конциркулярное преобразование, переводящее их в структуру Кенмоцу и, следовательно, согласно теореме 1 косимплектическое многообразие всегда является пространством Фиалкова. Критерий конциркулярной подвижности косимплектических многообразий может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Косимплектическое многообразие всегда является пространством Фиалкова.*

Заметим, что так как преобразование, обратное к конциркулярному, также является конциркулярным [2], то многообразия Кенмоцу дают нам пример собственных IzQS -многообразий.

2. Критерий конциркулярной подвижности многообразий Сасаки. Пусть M – многообразие Сасаки и пусть оно является пространством Фиалкова, т.е. допускает нетривиальные конциркулярные преобразования метрики сасакиевой структуры. Тогда согласно теореме 1 на нем выполняются соотношения $\nabla\tau = \gamma g$, которые на пространстве главного расслоения реперов примут вид

$$\tau_{i,j} = \gamma g_{ij}. \quad (3)$$

Условия интегрируемости такой системы могут быть записаны в виде [10]

$$\tau_\alpha R_{ikj}^\alpha = \gamma_{,k} g_{ij} - \gamma_{,j} g_{ik}. \quad (4)$$

Для многообразий Сасаки на пространстве присоединенной G -структуры отличны от нуля только следующие компоненты тензора кривизны [5]:

- 1) $R_{\widehat{abc}\widehat{d}} = A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$;
- 2) $R_{\widehat{abc}\widehat{d}} = -\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b$;
- 3) $R_{\widehat{a}0c0} = -\delta_c^a$,

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами так называемого структурного тензора второго рода, причем

$$A_{[bc]}^{ad} = 0, \quad A_{bc}^{[ad]} = 0. \quad (5)$$

Следовательно, на пространстве присоединенной G -структуры условия интегрируемости (4) будут равносильны соотношениям

$$\begin{aligned} 1) \quad & \tau_a R_{bcd}^a + \tau_{\hat{a}} R_{bcd}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{bcd}^0 = \gamma_{,c} g_{bd} - \gamma_{,\hat{d}} g_{bc}; \\ 2) \quad & \tau_a R_{bcd}^a + \tau_{\hat{a}} R_{bcd}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{bcd}^0 = \gamma_{,c} g_{bd} - \gamma_{,d} g_{bc}; \\ 3) \quad & \tau_a R_{0c0}^a + \tau_{\hat{a}} R_{0c0}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{0c0}^0 = \gamma_{,c} g_{00} - \gamma_{,0} g_{0c}. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразуем эти выражения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \tau_a R_{bcd}^a + \tau_{\hat{a}} R_{bcd}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{bcd}^0 = \gamma_{,c} g_{bd} - \gamma_{,\hat{d}} g_{bc}, \\ & \tau_a (A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d) = \gamma_{,c} \delta_b^d. \end{aligned}$$

Проальтернируем это соотношение по индексам b и c , принимая во внимание (5):

$$\tau_a (\delta_b^d \delta_c^d - \delta_c^a \delta_b^d) = \gamma_{,c} \delta_b^d - \gamma_{,b} \delta_c^d.$$

Сворачивая по индексам b и d , получаем

$$\begin{aligned} \tau_a (\delta_c^a - n \delta_c^a) &= n \gamma_{,c} - \gamma_{,c}, \\ \tau_c - n \tau_c &= n \gamma_{,c} - \gamma_{,c}, \\ \tau_c &= -\gamma_{,c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} 2) \quad & \tau_a R_{bcd}^a + \tau_{\hat{a}} R_{bcd}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{bcd}^0 = \gamma_{,c} g_{bd} - \gamma_{,d} g_{bc}, \\ & \tau_a (-\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) = \gamma_{,c} \delta_d^b - \gamma_{,d} \delta_c^b, \\ & \tau_a (-n \delta_c^a + \delta_c^a) = n \gamma_{,c} - \gamma_{,c}, \\ & \tau_c = -\gamma_{,c}; \\ 3) \quad & \tau_a R_{0c0}^a + \tau_{\hat{a}} R_{0c0}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{0c0}^0 = \gamma_{,c} g_{00} - \gamma_{,0} g_{0c}, \\ & -\tau_a \delta_c^a = \gamma_{,c}, \\ & \tau_c = -\gamma_{,c}. \end{aligned}$$

Таким образом, из условий интегрируемости (6) следует равенство (7). Аналогично,

$$\tau_{\hat{c}} = -\gamma_{,\hat{c}}. \quad (8)$$

Используя свойство симметрии тензора кривизны $R_{\hat{a}0c0} = -R_{0\hat{a}c0} = \delta_c^a$, получим условие для τ_0 :

$$\begin{aligned} \tau_a R_{bc0}^a + \tau_{\hat{a}} R_{bc0}^{\hat{a}} + \tau_0 R_{bc0}^0 &= \gamma_{,c} g_{b0} - \gamma_{,0} g_{bc}, \\ \tau_0 \delta_c^b &= -\gamma_{,0} \delta_c^b, \\ \tau_0 &= -\gamma_{,0}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу замкнутости 1-формы τ , а следовательно, и ее локальной точности, условия (7), (8) и (9) будут выполняться всегда. То есть в окрестности любой точки всегда найдется гладкая функция γ такая, что

$$\tau = -d\gamma. \quad (10)$$

Итак, если многообразие Сасаки является пространством Фиалкова, то на нем выполняется условие (10).

Обратно, если на многообразии Сасаки выполняется условие (10), то условия интегрируемости (6), 2) и (6), 3) выполняются с очевидностью. Условие (6), 1) с учетом (10) примет вид

$$\begin{aligned} \tau_a(A_{bc}^{ad} + 2\delta_b^a\delta_c^d + \delta_c^a\delta_b^d) &= -\tau_c\delta_b^d, \\ \tau_a A_{bc}^{ad} + 2\tau_b\delta_c^d + \tau_c\delta_b^d &= -\tau_c\delta_b^d, \\ \tau_a A_{bc}^{ad} &= -2(\tau_b\delta_c^d + \tau_c\delta_b^d), \\ \tau_a A_{bc}^{ad} &= -4\tau_{(b}\delta_{c)}^d. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4 (критерий конциркулярной подвижности многообразий Сасаки). *Многообразие Сасаки M является пространством Фиалкова, т.е. допускает нетривиальное локально конциркулярное преобразование метрики тогда и только тогда, когда на M выполняются условия (10) и (11):*

$$\begin{aligned} \tau &= -d\gamma, \\ \tau_a A_{bc}^{ad} &= -4\tau_{(b}\delta_{c)}^d, \end{aligned}$$

где γ – подходящая гладкая функция на M ; τ_i – компоненты 1-формы τ ; $\{A_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами структурного тензора второго рода.

ПРИМЕР. Пусть M – многообразие Сасаки точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны c . Напомним [6], что $\mathcal{AC}$ -многообразие M называется многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, если

$$\text{для всех } X \in \mathcal{L} \quad \langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c\|X\|^4, \quad c \in C^\infty(M).$$

Многообразия Сасаки точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны называют *сасакиевыми пространственными формами*.

Известно [5], что многообразие Сасаки является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из следующих многообразий:

- нечетномерной сфере единичного радиуса Φ -голоморфной секционной кривизны $c = 1$, снабженной канонической сасакиевой структурой;
- нечетномерной сфере, снабженной сасакиевой структурой, полученной из канонической с помощью преобразования D -гомотетии или D -инверсии (переход от структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ к структуре $\hat{S} = (\alpha\eta, (1/\alpha)\xi, \Phi, G)$, где α – ненулевая константа,

$$G(X, Y) = \alpha g(X, Y) + \alpha(\alpha - 1)\eta(X)\eta(Y),$$

известен как *обобщенное преобразование D-гомотетии* (преобразование *D-гомотетии* при $\alpha > 0$ и преобразование *D-инверсии* при $\alpha < 0$) [11];

- нечетномерному аффинному пространству, снабженному канонической сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, равной -3 .

С другой стороны, необходимое и достаточное условие, при котором многообразие Сасаки является многообразием точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны, на пространстве присоединенной G -структуры запишется в виде [5]

$$A_{bc}^{ad} = -\frac{c+3}{2}(\delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d).$$

Подставив это равенство в условие (11) теоремы 4, получим

$$\begin{aligned} -\frac{c+3}{2} \tau_a (\delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d) &= -2(\tau_b \delta_c^d + \tau_c \delta_b^d), \\ -\frac{c+3}{2} (\tau_b \delta_c^d + \tau_c \delta_b^d) + 2(\tau_b \delta_c^d + \tau_c \delta_b^d) &= 0, \\ \left(2 - \frac{c+3}{2}\right) (\tau_b \delta_c^d + \tau_c \delta_b^d) &= 0, \\ \left(\frac{1-c}{2}\right) (\tau_b \delta_c^d + \tau_c \delta_b^d) &= 0, \\ c = 1 \quad \text{или} \quad \tau_c + n\tau_c &= 0, \\ c = 1 \quad \text{или} \quad \tau_c &= 0. \end{aligned}$$

Покажем, что условие (11) теоремы 4 тождественно выполняется только при $c = 1$. Действительно, пусть $\tau_a = 0$ ($a = 1, \dots, n$). Тогда $d\tau = \tau_0 \omega$. Поскольку 1-форма τ замкнута, $d\tau = 0$. Имеем $0 = d\tau = d\tau_0 \wedge \omega + \tau_0 d\omega$. А значит, $d\omega = d(\ln 1/\tau_0) \wedge \omega$. Так как $d(\ln 1/\tau_0) - 1$ -форма, ее можно разложить по базису:

$$d\left(\ln \frac{1}{\tau_0}\right) = \alpha_0 \omega + \alpha_a \omega^a + \alpha^a \omega_a.$$

Тогда

$$d\omega = d\left(\ln \frac{1}{\tau_0}\right) \wedge \omega = \alpha_a \omega^a \wedge \omega + \alpha^a \omega_a \wedge \omega.$$

Очевидно, компонента $(d\omega)_{a\hat{b}} = 0$.

С другой стороны, для многообразий Сасаки верно тождество $d\omega = 2\Omega$, в силу которого $(d\omega)_{a\hat{b}} = -i\delta_a^b$. Приходим к противоречию. Следовательно, условие (11) теоремы 4 тождественно выполняется только при $c = 1$, т.е. для случая нечетномерной сферы единичного радиуса. Условие (10), очевидно, локально всегда имеет место на сасакиевых пространственных формах в силу замкнутости формы τ .

Таким образом, верна

ТЕОРЕМА 5. *Многообразия Сасаки точечно постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны $c \neq 1$ не являются пространствами Фиалкова, т.е. не допускают нетривиальных локально конциркулярных преобразований метрики.*

Заметим, что нечетномерная единичная сфера, снабженная канонической сасакиевой структурой, т.е. нечетномерная сфера Φ -голоморфной секционной кривизны $c = 1$, является пространством Фиалкова. Это следует также из известного факта о том, что такая сфера, будучи пространством постоянной кривизны, допускает нетривиальное конциркулярное преобразование [2].

Заметим также, что теорема 4 позволила выделить достаточно обширный класс многообразий Сасаки, которые не являются пространствами Фиалкова.

3. Критерий конциркулярной подвижности квази-сасакиевых многообразий. Проводя аналогичные рассуждения для квази-сасакиевых многообразий, получаем, что верна

ТЕОРЕМА 6 (критерий конциркулярной подвижности QS-многообразий). *Квази-сасакиево многообразие M является пространством Фиалкова, т.е. допускает нетривиальное локально конциркулярное преобразование метрики тогда и только тогда, когда на M выполняются условия*

$$d\gamma = \frac{1}{n}(\text{tr } B)(\tau \circ B) + \frac{1}{n} \text{tr}(B^2)\tau \circ m,$$

$$\tau_a A_{cb}^{ad} = 2\tau_a B_c^a B_b^d + \tau_a B_b^a B_c^d + \frac{1}{n} B_c^c \tau_a B_b^a \delta_d^c,$$

где γ – подходящая гладкая функция на M ; τ_i – компоненты 1-формы τ ; $B_b^a = \sqrt{-1}\Phi_{0,b}^a$; $\{A_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами структурного тензора второго рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, условия интегрируемости системы (3) от системы дифференциальных уравнений (4) свелись к линейной однородной системе алгебраических уравнений теоремы 6 относительно 1-формы τ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Fialkow, "Conformal geodesics", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45**:3 (1939), 443–473.
- [2] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, М., 1979.
- [3] С. Г. Лейко, " P -геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия", *Изв. вузов. Матем.*, 1998, № 6, 35–45.
- [4] В. Ф. Кириченко, "О геометрии многообразий Кенмоцу", *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 585–587.
- [5] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, "Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий", *Матем. сб.*, **193**:8 (2002), 71–100.
- [6] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [7] D. E. Blair, "The theory of quasi-Sasakian structures", *J. Differential Geometry*, **1** (1967), 331–345.
- [8] K. Yano, "Concircular geometry. I. Concircular transformations", *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**:6 (1940), 195–200; "Concircular geometry. II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$ ", *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**:8 (1940), 354–360; "Concircular geometry. III. Theory of curves", *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**:9 (1940), 442–448; "Concircular geometry. IV. Theory of subspaces", *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16**:10 (1940), 505–511.

- [9] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, “Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 347–360.
- [10] В. Ф. Кириченко, Л. И. Власова, “Конциркулярная геометрия приближенно келеровых многообразий”, *Матем. сб.*, **193**:5 (2002), 53–76.
- [11] В. Ф. Кириченко, “Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:4 (1984), 711–734.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

E-mail: highgeom@yandex.ru

Поступило

16.09.2008

Е. А. Полькина

Московский педагогический государственный университет

E-mail: polkina.ea@mail.ru