Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, Множества со свойством Помпейю на плоскости и сфере, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 69–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:28:37

Множества со свойством Помпейю на плоскости и сфере

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Получены новые достаточные условия, при которых множество на плоскости имеет свойство Помпейю. Этот результат позволяет построить первые примеры областей со свойством Помпейю с нелипшицевой (и даже фрактальной) границей. Кроме того, изучается задача о нахождении наименьшего радиуса шара на сфере, в котором данное множество является множеством Помпейю. Получено решение этой задачи в случае двуугольника и сферического полукруга. Рассмотрены некоторые приложения к вопросам комплексного анализа.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, A – ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с положительной лебеговой мерой. Далее, как обычно, $\bar{A}$ – замыкание A в $\mathbb{R}^n$, и ∂A – граница A в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $\lambda \in A$ положим

$$\lambda A = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^{-1}x \in A\}.$$

Говорят, что множество A имеет *свойство Помпейю* (сокращенно $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$), если всякая локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \tag{1}$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду в $\mathbb{R}^n$. Такое множество A называют также *множеством Помпейю*.

Проблема Помпейю в ее первоначальной форме состоит в следующем: при каких условиях множество A принадлежит $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$?

Эта проблема названа именем румынского математика Д. Помпейю, который первым рассмотрел уравнение (1). Ей посвящены многочисленные исследования (см. обзорные статьи [1]–[4] и книгу [5] с обширной библиографией), но она до сих пор остается открытой.

Нетрудно показать, что любой шар в $\mathbb{R}^n$ не имеет свойства Помпейю (см., например, [1]). Ряд примеров многосвязных областей без свойства Помпейю содержится в [1].

Наиболее общие достаточные условия, при которых множество имеет свойство Помпейю, были получены Вильямсом [6], [7]. Он показал, что если ограниченная

область $A \subset \mathbb{R}^n$ с границей Липшица не имеет свойства Помпейю и дополнение к $\bar{A}$ связно, то ∂A является вещественно-аналитическим подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что если граница области A липшицева, но не вещественно-аналитична, то $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Области с вещественно-аналитической границей и свойством Помпейю существуют; например, любой эллипсоид, отличный от шара (см. [1], [5; часть 4]). Другие примеры множеств Помпейю с вещественно-аналитической границей можно найти в [8]–[10]. Вместе с тем до настоящего времени не было известно ни одного из примеров области со свойством Помпейю с нелипшицевой границей.

Проблема Помпейю допускает важные обобщения, связанные с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ тройкой $(X, G, d\mu)$, где X – многообразие, G – группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ – мера на X , инвариантная относительно G . Наиболее полные результаты установлены в следующем случае: X – двухточечно-однородное пространство [11; гл. 1], G – группа изометрий X , $d\mu$ – риманова мера на X . В частности, для гиперболических пространств была доказана эквивалентность между отсутствием свойства Помпейю и существованием решения переопределенной граничной задачи Неймана, а также получен аналог теоремы Вильямса [12]. Для компактных двухточечно-однородных пространств возникли принципиально новые эффекты. Например, многоугольник на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ уже не всегда является множеством Помпейю [13], [14], а шар на $\mathbb{S}^2$, в зависимости от его радиуса, может иметь это свойство [13], [15].

Другим важным направлением в рассматриваемой проблеме является изучение ее локальных аспектов. Пусть $\mathcal{O}$ – такое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, что множество

$$\text{Mot}(A, \mathcal{O}) = \{\lambda \in M(n) : \lambda \bar{A} \subset \mathcal{O}\}$$

непусто, $\mathfrak{P}(A, \mathcal{O})$ – класс, состоящий из локально суммируемых в $\mathcal{O}$ функций f , удовлетворяющих (1) при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathcal{O})$. Если $\mathfrak{P}(A, \mathcal{O})$ содержит только нулевую функцию, то A называется множеством Помпейю в $\mathcal{O}$. Совсем недавно первым автором данной работы было доказано [16; следствие 3], что всякое множество A из $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ является множеством Помпейю в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ при $R > 2r^*(A)$, где $r^*(A)$ – радиус наименьшего замкнутого шара в $\mathbb{R}^n$, содержащего A . Подобный результат при некоторых ограничениях на A ранее был получен в [17]. В связи с этим для заданного $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ возникает проблема о наименьшем радиусе шара, в котором A является множеством Помпейю (см. [5; часть 4, проблема 1.1]). В общем случае эта проблема (и тем более ее естественные аналоги на двухточечно-однородных пространствах) является весьма трудной. Полное ее решение было известно лишь в евклидовом случае для некоторых конкретных A (см. [5; часть 4]).

Основные результаты данной работы заключаются в следующем.

1. Получены новые достаточные условия, при которых множество в $\mathbb{R}^2$ имеет свойство Помпейю, без каких-либо требований регулярности для граничных точек (см. теорему 1 ниже). Этот результат значительно расширяет совокупность имеющихся примеров множеств со свойством Помпейю. Например, теорема 1 позволяет построить большое число областей $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ с нелипшицевой (и даже фрактальной) границей. В частности, следствие 1 из теоремы 1 показывает, что знаменитая снежинка Коха [18] является множеством Помпейю.

2. Для двуугольника произвольного раствора на $\mathbb{S}^2$ найден наименьший радиус шара, в котором он является множеством Помпейю (см. теорему 2). Этот результат усиливает теорему Х. Т. Лаквера о том, что двуугольник является множеством Помпейю на всей сфере (см. [19]).

3. Найден наименьший радиус шара на $\mathbb{S}^2$, в котором сферический полукруг является множеством Помпейю (см. теорему 3). Одним из следствий теорем 2, 3 являются новые теоремы типа Мореры.

В заключение отметим, что теорема 1 данной работы принадлежит В. В. Волчкову, а теоремы 2, 3 – Вит. В. Волчкову.

2. Формулировки основных результатов. Далее каждая точка $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ отождествляется с комплексным числом $z = x_1 + ix_2$. Как обычно, мы полагаем $\rho = |z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Для $z \neq 0$ обозначим через $\varphi = \arg z$ главное значение аргумента, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Для $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^1$ и $\delta > 0$ положим

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}, \quad V_\delta = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \delta\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – ограниченное измеримое подмножество в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что существуют $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^1$ такие, что $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi/2$, $\beta < \gamma < 2\beta - \alpha$, $\delta > 0$ и

$$U(\alpha, \beta) \cap V_\delta \subset A \subset \overline{U(0, \gamma)}.$$

Тогда $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^2)$.

Отметим, что сформулированный выше результат не требует каких-либо условий регулярности для граничных точек рассматриваемых множеств. Таким образом, теорема 1 дает большое число примеров множеств Помпейю с нелипшицевой границей. В качестве примера рассмотрим хорошо известную снежинку Кох [18]. Напомним процесс построения этого множества, который начинается с замкнутого правильного треугольника в $\mathbb{R}^2$. Каждая из сторон этого треугольника делится на три равные части и на средних из них снаружи достраиваются новые замкнутые правильные треугольники. С каждой стороной полученной шестиугольной звезды сделаем то же самое и т.д. В результате предельного перехода получается множество с фрактальной границей, называемое снежинкой Кох.

Применяя теорему 1 при $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/2$, $\gamma = 2\pi/3$ и достаточно малом $\delta > 0$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Снежинка Кох является множеством Помпейю.

Перейдем теперь к случаю сферы $\mathbb{S}^2$. Обозначим θ_1, θ_2 – сферические координаты точки $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2$,

$$0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi, \quad \xi_1 = \sin \theta_2 \sin \theta_1, \quad \xi_2 = \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad \xi_3 = \cos \theta_2.$$

Пусть $d(\cdot, \cdot)$ – внутренняя метрика на $\mathbb{S}^2$, $B_r = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(o, \xi) < r\}$ – открытый геодезический шар (сферическая шапочка) радиуса r с центром в точке $o = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, $L^{1, \text{loc}}(B_r)$ – множество локально интегрируемых функций на B_r относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^2$. Отметим, что $B_r = \mathbb{S}^2$ для любого $r > \pi$.

Пусть A – компактное множество в $\mathbb{S}^2$. Обозначим через $r^*(A)$ радиус наименьшего замкнутого шара на $\mathbb{S}^2$, содержащего множество A . Предположим, что

$0 < r^*(A) < \pi$ и пусть $r > r^*(A)$. Определим класс $\mathfrak{P}(A, B_r)$, как множество функций $f \in L^{1, \text{loc}}(B_r)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\tau A} f(\xi) d\omega(\xi) = 0$$

для произвольного вращения τ сферы $\mathbb{S}^2$ такого, что $\tau A \subset B_r$. По аналогии с евклидовым случаем мы пишем $A \in \text{Rompr}(B_r)$, если всякая функция f из $\mathfrak{P}(A, B_r)$ равна нулю почти всюду в B_r . Если $A \in \text{Rompr}(B_r)$ при некотором $r > r^*(A)$, положим

$$\mathcal{R}(A) = \inf\{r > r^*(A) : A \in \text{Rompr}(B_r)\}.$$

Для $\alpha \in (0, 2\pi)$ рассмотрим двугульник

$$A_\alpha = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2 : 0 \leq \theta_1 \leq \alpha, 0 \leq \theta_2 \leq \pi\}.$$

Нетрудно видеть, что $A_\pi \notin \text{Rompr}(\mathbb{S}^2)$. В [19] было доказано, что $A_\alpha \in \text{Rompr}(\mathbb{S}^2)$ при любом $\alpha \in (0, \pi)$. Следующий результат дает значение величины $\mathcal{R}(A_\alpha)$.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(A_\alpha) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \alpha, & \text{если } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \\ \pi, & \text{если } \pi < \alpha < 2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

Для $\alpha \in (0, \pi)$ положим

$$A(\alpha) = \left\{ \xi \in \mathbb{S}^2 : |\theta_1| \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta_2 \leq \alpha \right\}.$$

Множество $A(\alpha)$ называется *сферическим полукругом* на $\mathbb{S}^2$. Аналог теоремы 2 для сферического полукруга выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(A(\alpha)) = \begin{cases} \arccos\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha\right), & \text{если } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \alpha, & \text{если } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \quad (3)$$

Теоремы 2 и 3 позволяют получить новые теоремы типа Мореры. Их особенностью является то, что контуры, по которым интегрируется функция, являются границами множеств, “конгруэнтных” данному. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам потребуется еще несколько обозначений.

Пусть

$$\Lambda_\beta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} i \right| \leq \frac{1 + \beta^2}{2\beta}, \left| z + \frac{\beta^2 - 1}{2\beta} i \right| \leq \frac{1 + \beta^2}{2\beta} \right\},$$

$\beta > 0$, $\beta \neq 1$, – луночка, ограниченная дугами окружностей, проходящих через точки $(\pm 1, 0)$, $(0, \beta)$ и $(\pm 1, 0)$, $(0, -\beta)$ соответственно,

$$P_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \beta, \text{Re } z \geq 0\},$$

$\mathfrak{G} = \text{PSU}(2)$ – группа дробно-линейных преобразований вида

$$g(z) = \frac{az - \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad \text{где } a, c \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |c|^2 = 1.$$

Определим

$$r(\Lambda_\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \beta \leq \sqrt{2} - 1, \\ \frac{2\beta}{1 - \beta^2}, & \text{если } \sqrt{2} - 1 < \beta < 1, \\ \infty, & \text{если } \beta > 1, \end{cases}$$

а также

$$r(P_\beta) = \begin{cases} \left(\frac{(1 + \beta^2)^{3/2} - 1 + \beta^2}{(1 + \beta^2)^{3/2} + 1 - \beta^2} \right)^{1/2}, & \text{если } 0 < \beta < 1, \\ \beta, & \text{если } \beta \geq 1. \end{cases}$$

Для компактного множества A в $\mathbb{R}^2$ положим $\mathcal{M}(A, B_r) = \{g \in \mathfrak{G} : gA \subset B_r\}$,

$$r^*(A, \mathfrak{G}) = \inf\{r > 0 : \mathcal{M}(A, B_r) \neq \emptyset\},$$

где $B_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$. Одним из приложений теорем 2 и 3 является следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in C(B_r)$ и

$$\int_{\partial(gP_\beta)} f(z) dz = 0 \quad \text{для всех } g \in \mathcal{M}(P_\beta, B_r). \quad (4)$$

Тогда если $r > r(P_\beta)$, то f голоморфна в B_r . При $r^*(P_\beta, \mathfrak{G}) < r < r(P_\beta)$ существует неголоморфная в B_r функция f с условием (4). Утверждения остаются справедливыми, если P_β заменить на Λ_β .

Кроме того, из теорем 2 и 3 стандартными рассуждениями (см. [5; часть 5]) можно получить аналоги известной теоремы В. К. Дзядька о геометрическом описании аналитических функций, а также теоремы об аппроксимации линейными комбинациями индикаторов множеств P_β и Λ_β . Другие результаты такого вида, в которых вместо $\mathfrak{G}$ рассматривается группа движений $\mathbb{R}^2$, содержатся в [17], [5; часть 5]. По поводу примыкающей к этому кругу вопросов проблемы Зальцмана (см. [20]).

3. Вспомогательные утверждения. Сразу отметим, что леммы 1, 2 ниже и используемые в них обозначения касаются евклидовой плоскости, а леммы 3–6 – случая сферы.

Для $f \in L^{1,\text{loc}}(B_R)$ положим

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad \rho \in (0, R), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $R > r^*(A)$ и $f \in C^\infty(B_R)$. Тогда $f \in \mathfrak{P}(A, B_R)$ в том и только том случае, когда $f_k(\rho) e^{ik\varphi} \in \mathfrak{P}(A, B_R)$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из легко проверяемого равенства

$$f_k(\rho)e^{ik\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t) dt.$$

Для доказательства достаточности положим

$$h(t) = \int_{\lambda A} f(\rho \cos(\varphi + t), \rho \sin(\varphi + t)) dx_1 dx_2, \quad \lambda \in \text{Mot}(A, B_R), \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-ikt} dt = 2\pi \int_{\lambda A} f_k(\rho)e^{ik\varphi} dx_1 dx_2 = 0$$

при всех $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $h \equiv 0$ и $f \in \mathfrak{P}(A, B_R)$.

ЛЕММА 2. Пусть $A \notin \text{Rompr}(\mathbb{R}^2)$. Тогда существует функция $f \in \mathfrak{P}(A, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, нечетная по переменной x_1 и представимая в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-2}$, а функция $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ и ограничена в окрестности нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия следует, что существует $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что функция

$$u(x_1, x_2) = e^{i(\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)}$$

принадлежит классу $\mathfrak{P}(A, \mathbb{R}^2)$ при любых $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих равенству $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \tau^2$ (см. [21]). В частности, $\mathfrak{P}(A, \mathbb{R}^2)$ содержит функцию $v(x_1, x_2) = e^{i\lambda\rho \sin \varphi}$. Используя разложение Якоби для плоских волн через бесселевы функции J_k (см. [22; формула (10.3)]), из леммы 1 заключаем, что функции $J_k(\tau\rho)e^{ik\varphi}$ принадлежат $\mathfrak{P}(A, \mathbb{R}^2)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $R > r^*(A)$, $g \in C^\infty(B_R)$ и $\Delta g + \tau^2 g = 0$, где Δ – оператор Лапласа. Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}$ функция $g_k(\rho)e^{ik\varphi}$ также удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, $g_k(\rho) = c_k J_k(\tau\rho)$ для некоторых констант $c_k \in \mathbb{C}$ (см. [11; Введение, доказательство теоремы 2.1]). Поэтому функция Неймана $g(x_1, x_2) = N_0(\tau\rho)$ принадлежит $\mathfrak{P}(A, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ в силу леммы 1 и дифференциального уравнения Бесселя (см. [22; гл. 1, § 2]). Полагая теперь

$$f(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{4} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} N_0(\tau\rho)$$

и используя [22; формула (2.3)], получаем утверждение леммы 2.

Для доказательства теорем 2, 3 потребуются четыре вспомогательных утверждения. Обозначим $\mathfrak{P}^k(A(\alpha), B_r) = \mathfrak{P}(A(\alpha), B_r) \cap C^k(B_r)$,

$$A_1(\alpha) = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : 0 \leq \theta_1 \leq \pi, 0 \leq \theta_2 \leq \alpha\}.$$

Ниже используются следующие дифференциальные операторы: Id – тождественный оператор,

$$D_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad D_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $f \in C^3(A_1(\alpha))$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{A_1(\alpha)} D_1(D_2^2 + \text{Id})f(\xi) d\omega(\xi) \\ &= \cos \alpha (f(0, \sin \alpha, \cos \alpha) - f(0, -\sin \alpha, \cos \alpha)) \\ & \quad - \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, \sin \alpha, \cos \alpha) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, -\sin \alpha, \cos \alpha) \right) \\ & \quad + \sin^2 \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}(0, \sin \alpha, \cos \alpha) - \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, -\sin \alpha, \cos \alpha) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к сферическим координатам, имеем

$$\int_{A_1(\alpha)} D_1(D_2^2 + \text{Id})f(\xi) d\omega(\xi) = \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\alpha \sin \theta_2 \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2^2 + \text{Id})\overset{\circ}{f}(\theta_1, \theta_2) d\theta_2, \quad (6)$$

где $\overset{\circ}{f}(\theta_1, \theta_2) = f(\sin \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_2 \cos \theta_1, \cos \theta_2)$,

$$\mathcal{D}_2 = -\text{ctg} \theta_2 \sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \cos \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_2}, \quad \mathcal{D}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_1}.$$

В результате несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi d\theta_1 \int_0^\alpha \sin \theta_2 \mathcal{D}_1(\mathcal{D}_2^2 + \text{Id})\overset{\circ}{f}(\theta_1, \theta_2) d\theta_2 \\ &= \cos \alpha (\overset{\circ}{f}(0, \alpha) - \overset{\circ}{f}(\pi, \alpha)) - (\overset{\circ}{f}(0, 0) - \overset{\circ}{f}(\pi, 0)) - \sin \alpha \left(\frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \theta_2}(0, \alpha) - \frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \theta_2}(\pi, \alpha) \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6) следует (5).

ЛЕММА 4. Пусть $r > \alpha$, $f \in \mathfrak{P}^3(A(\alpha), B_r)$ и $|t| < r - \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} & \cos \alpha (f(0, \sin(\alpha + t), \cos(\alpha + t)) - f(0, \sin(t - \alpha), \cos(t - \alpha))) \\ & \quad - \sin \alpha \left(\cos(\alpha + t) \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, \sin(\alpha + t), \cos(\alpha + t)) \right. \\ & \quad \quad + \cos(t - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, \sin(t - \alpha), \cos(t - \alpha)) \\ & \quad \quad - \sin(\alpha + t) \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, \sin(\alpha + t), \cos(\alpha + t)) \\ & \quad \quad \left. - \sin(t - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, \sin(t - \alpha), \cos(t - \alpha)) \right) = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F = f \circ a_t$, где

$$a_t(\xi) = (\xi_1, \xi_3 \sin t + \xi_2 \cos t, \xi_3 \cos t - \xi_2 \sin t).$$

Из условия видим, что $F \in \mathfrak{P}^3(A(\alpha), B_{\alpha+\varepsilon})$ при $0 < \varepsilon < r - \alpha - |t|$. Тогда $D_1 F, D_2 F \in \mathfrak{P}^2(A(\alpha), B_{\alpha+\varepsilon})$ (см. [23; доказательство леммы 6.2]). Применяя к F лемму 3, приходим к требуемому утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v(\arccos \xi_3) = v(\theta_2) \in \mathfrak{P}^3(A(\alpha), B_r)$, $r < 2\alpha$. Тогда при $|t| < r - \alpha$ имеет место равенство

$$\cos \alpha(v(t + \alpha) - v(\alpha - t)) + \sin \alpha(-v'(t + \alpha) + v'(\alpha - t)) = 0. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получается из леммы 4 прямым подсчетом.

ЛЕММА 5. Пусть $f(\xi) = v(\theta_2) \in \mathfrak{P}^5(A(\alpha), B_r)$, $r < 2\alpha$. Тогда v является тождественной константой на $(2\alpha - r, r)$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1: $\alpha \neq \pi/2$. Обозначим через L лапласиан на $\mathbb{S}^2$. Положим

$$v_1(\theta_2) = (Lf)(\xi) = v''(\theta_2) + (\operatorname{ctg} \theta_2)v'(\theta_2).$$

Тогда $v_1 \in \mathfrak{P}^3(A(\alpha), B_r)$ (см. [23; доказательство леммы 6.3]). Пусть $|t| < r - \alpha$. Применяя к v_1 следствие 3, имеем

$$\begin{aligned} & \cos \alpha(v''(t + \alpha) + \operatorname{ctg}(t + \alpha)v'(t + \alpha)) + \sin \alpha(-v'''(t + \alpha) - \operatorname{ctg}(t + \alpha)v''(t + \alpha)) \\ & + \frac{(\sin \alpha)v'(t + \alpha)}{\sin^2(t + \alpha)} + ((\sin \alpha)v'''(\alpha - t) - (\cos \alpha)v''(\alpha - t)) \\ & + \operatorname{ctg}(\alpha - t)((\sin \alpha)v''(\alpha - t) - (\cos \alpha)v'(\alpha - t)) \\ & = \frac{\sin \alpha}{\sin^2(\alpha - t)} v'(\alpha - t). \end{aligned} \quad (8)$$

Дифференцируя (7) по t , получаем

$$(\sin \alpha)v''(\alpha - t) - (\cos \alpha)v'(\alpha - t) = -(\sin \alpha)v''(\alpha + t) + (\cos \alpha)v'(\alpha + t), \quad (9)$$

$$(\sin \alpha)v'''(\alpha - t) - (\cos \alpha)v''(\alpha - t) = (\sin \alpha)v'''(\alpha + t) - (\cos \alpha)v''(\alpha + t). \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (8), находим

$$-v'(\alpha - t) = \varphi_2(t)v''(\alpha + t) + \varphi_1(t)v'(\alpha + t), \quad (11)$$

где

$$\varphi_1(t) = 2 \cos^2 \alpha \frac{\sin(t - \alpha)}{\sin(t + \alpha)} - \left(\frac{\sin(t - \alpha)}{\sin(t + \alpha)} \right)^2, \quad \varphi_2(t) = -\sin(2\alpha) \frac{\sin(t - \alpha)}{\sin(t + \alpha)}.$$

Отсюда

$$v''(\alpha - t) = \varphi_2'(t)v''(\alpha + t) + \varphi_2(t)v'''(\alpha + t) + \varphi_1'(t)v'(\alpha + t) + \varphi_1(t)v''(\alpha + t). \quad (12)$$

Комбинируя (11), (12) и (9), извлекаем соотношение

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha)\varphi_2(t)v'''(\alpha + t) + v''(\alpha + t)((\sin \alpha)\varphi_2'(t) + (\cos \alpha)\varphi_2(t) + (\sin \alpha)\varphi_1(t) + \sin \alpha) \\ & + v'(\alpha + t)((\sin \alpha)\varphi_1'(t) + (\cos \alpha)\varphi_1(t) - \cos \alpha) = 0. \end{aligned}$$

После преобразований это соотношение переписывается в виде

$$-(\sin(t + \alpha))^2 w''(t) + \sin(2(\alpha + t))w'(t) + ((\sin(t + \alpha))^2 - 2)w(t) = 0, \quad (13)$$

где $w(t) = v'(t + \alpha)$. Далее $v'(\theta_2)e^{i\theta_1} \in \mathfrak{P}^4(A(\alpha), B_r)$ (см. [23; доказательство леммы 6.3]). Поэтому $v'(\theta_2)e^{i\theta_1}$ имеет нулевые интегралы по всем шарам радиуса α из B_r . Из [23; следствие 6.1] заключаем, что $v'(\alpha) = w(0) = 0$. Аналогично, $v'_1(\alpha) = 0$. Последние два равенства влекут

$$v'''(\alpha) + (\operatorname{ctg} \alpha)v''(\alpha) = 0. \quad (14)$$

Кроме того, уравнение (13) при $t = 0$ дает

$$-(\sin \alpha)^2 v'''(\alpha) + \sin(2\alpha)v''(\alpha) = 0, \quad (15)$$

так как $v'(\alpha) = 0$. Из (14) и (15) делаем вывод, что $w'(0) = 0$. В силу единственности решения задачи Коши, $v \equiv \operatorname{const}$ на $(2\alpha - r, r)$, что и требовалось.

Случай 2: $\alpha = \pi/2$. Пусть $|t| < r - \pi/2$. Тогда $v(t + \pi/2) + v(\pi/2 - t) = \operatorname{const}$ по следствию 3. Так как $v(\theta_2)$ имеет нулевые интегралы по всем полусферам из B_r , имеем

$$v(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m P_{2m}(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < r, \quad (16)$$

где $c_m \in \mathbb{C}$, P_{2m} – многочлены Лежандра (см. [23; лемма 9.1]). Из (16) получаем равенство $v(t + \pi/2) = v(\pi/2 - t)$. Поэтому снова $v \equiv \operatorname{const}$ на $(2\alpha - r, r)$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $\pi/2 < \alpha < \pi$, $r > \alpha$ и $v(\theta_2)e^{i\theta_1} \in \mathfrak{P}^6(A(\alpha), B_r)$. Тогда $v(\theta) = 0$ при $\arccos(\cos \alpha \cos r) < \theta < r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-r < s < 0$. Положим $F = f \circ b_s$, где

$$b_s(\xi) = (\xi_3 \sin s + \xi_1 \cos s, \xi_2, \xi_3 \cos s - \xi_1 \sin s).$$

Применим к F лемму 4 при $t = 0$. После преобразований находим $u'(\cos s \cos \alpha) = 0$, где $u(x) = v(\arccos x)/\sqrt{1 - x^2}$. Отсюда $u \equiv \operatorname{const}$ на $[\cos \alpha, \cos \alpha \cos r]$. Поскольку $v(\theta_2)e^{i\theta_1}$ имеет нулевые интегралы по всем шарам радиуса α из B_r ,

$$u(\cos \alpha) = \frac{v(\alpha)}{\sin \alpha} = 0$$

(см. [23; следствие 6.1]). Итак, $u \equiv 0$ на $[\cos \alpha, \cos \alpha \cos r]$. Далее,

$$(\sin \theta_2)^{-1}((\sin \theta_2)v(\theta_2))' \in \mathfrak{P}^5(A(\alpha), B_r)$$

(см. [23; доказательство леммы 6.3]). Поэтому по лемме 5 имеем $v(\theta) = (c_1 + c_2 \cos \theta)/\sin \theta$ при $2\alpha - r < \theta < r$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Учитывая, что $v(\theta) = 0$ при $\arccos(\cos \alpha \cos r) < \theta < r$, получаем требуемое утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $0 < \alpha < \pi/2$, $r > \alpha$ и $v(\theta_2)e^{i\theta_1} \in \mathfrak{P}^6(A(\alpha), B_r)$. Тогда из доказательства леммы 6 видно, что $v(\theta) = 0$ при $\alpha < \theta < r$.

4. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что $A \notin \text{Rompr}(\mathbb{R}^2)$. Обозначим через E_1 множество, полученное из A поворотом вокруг начала координат на угол $\theta = \pi/2 - \beta$ против часовой стрелки. Пусть также $E_2 = E_1 \setminus B_\delta$ и

$$T = U(\alpha + \theta, \pi - \gamma - \theta) \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < \delta \cos(\pi - \gamma - \theta)\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$u(\varepsilon) = \int_{E_1} f(x_1, x_2 + \varepsilon) dx_1 dx_2,$$

где f – функция из леммы 2. Тогда $u \equiv 0$. С другой стороны, $u(\varepsilon) = u_1(\varepsilon) + u_2(\varepsilon)$, где

$$\begin{aligned} u_1(\varepsilon) &= \int_{E_2} f(x_1, x_2 + \varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{E_1 \cap B_\delta} f_2(x_1, x_2 + \varepsilon) dx_1 dx_2, \\ u_2(\varepsilon) &= \int_{E_1 \cap B_\delta} f_1(x_1, x_2 + \varepsilon) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

(мы использовали разложение $f = f_1 + f_2$ из леммы 2). Из свойств A и леммы 2 следует, что $u_1(\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и что

$$u_2(\varepsilon) > \int_T f_1(x_1, x_2 + \varepsilon) dx_1 dx_2. \quad (17)$$

Однако непосредственное вычисление интеграла в (17) показывает, что $u_2(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, что противоречит полученному ранее равенству $u_1 + u_2 \equiv 0$. Таким образом, $A \in \text{Rompr}(\mathbb{R}^2)$ и теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Случай 1: $0 < \alpha \leq \pi/2$. Зафиксируем $r > \pi/2$. Пусть $f \in \mathfrak{P}(A_\alpha, B_r)$. Докажем, что f – нулевая функция. Можно считать, что f является бесконечно дифференцируемой функцией вида $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u(\xi_3)\xi_2$ (см. [23; доказательство лемм 6.1, 6.3]). Положим

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 = -\cos t, \xi_2 = \sin t, \xi_3 = 0, |t| \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \lambda_t(\xi) &= (\xi_1 \sin t - \xi_2 \cos t, -\xi_3, \xi_1 \cos t + \xi_2 \sin t), \\ \mu_t(\xi) &= (\xi_1 \cos t + \xi_3 \sin t, \xi_2, -\xi_1 \sin t + \xi_3 \cos t). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить непосредственно, что

$$\int_{\lambda_t A_\alpha} (\cos(\alpha + t)(D_1 f)(\xi) + \sin(\alpha + t)(D_2 f)(\xi)) d\omega(\xi) = \sin \alpha \int_\gamma \xi_2 f(\mu_t \xi) dl(\xi),$$

где $dl(\xi)$ – элемент длины. Как и выше, $D_1 f, D_2 f \in \mathfrak{P}(A_\alpha, B_r)$, а значит,

$$\int_\gamma \xi_2 f(\mu_t \xi) dl(\xi) = 0$$

при $t \in ((\pi - 2r)/2, \pi/2)$. Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2} u(\sin t \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = 0, \quad t \in \left(\frac{(\pi - 2r)}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Это уравнение сводится к интегральному уравнению Абеля. Отсюда $f = 0$. Итак, $\mathcal{R}(A_\alpha) = \pi/2$.

Случай 2: $\pi/2 < \alpha < \pi$. Если $r > \alpha$ и $f \in \mathfrak{P}(A_\alpha, B_r)$, то аналогично первому случаю получаем $f = 0$. Далее, если $\tau A_\alpha \subset B_{\alpha-\varepsilon}$, где τ – вращение $\mathbb{S}^2$, $\varepsilon \in (0, \alpha - \pi/2)$, то, как нетрудно проверить, τA_α содержит B_ε . Отсюда $\mathfrak{P}(A_\alpha, B_{\alpha-\varepsilon}) \neq \{0\}$. Таким образом, $\mathcal{R}(A_\alpha) = \alpha$.

Случай 3: $\pi < \alpha < 2\pi$. Как и во втором случае заключаем, что $\mathcal{R}(A_\alpha) = \pi$. Тем самым, теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Случай 1: $0 < \alpha < \pi/2$. Пусть $f \in \mathfrak{P}(A(\alpha), B_r)$, где $r > \arccos(\cos(\alpha/2) \cos \alpha)$. Докажем, что f – нулевая функция. Как и в теореме 2, можно считать, что f является бесконечно дифференцируемой функцией вида $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u(\xi_3)\xi_1$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 = \sin \alpha \sin t, \xi_2 = \sin \alpha \cos t, \xi_3 = \cos \alpha, |t| \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \\ \gamma_2 &= \{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_1 = \sin t, \xi_2 = 0, \xi_3 = \cos t, |t| \leq \alpha \}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{a_t A(\alpha)} (\cos t(D_3 f)(\xi) + \sin t(D_1 f)(\xi)) d\omega(\xi) = (\sin \alpha)^{-1} \int_{\gamma_1} \xi_1 f(a_t \xi) dl(\xi), \quad (18)$$

$$\int_{a_t A(\alpha)} (\cos t(D_1 f)(\xi) - \sin t(D_3 f)(\xi)) d\omega(\xi) = \int_{\gamma_2} \xi_1 f(a_t \xi) dl(\xi). \quad (19)$$

Так как $D_1 f, D_3 f \in \mathfrak{P}(A(\alpha), B_r)$, из (18) имеем

$$\int_{\gamma_1} \xi_1 f(a_t \xi) dl(\xi) = 0 \quad (20)$$

при $t \in (-\alpha/2, 0)$. Поэтому

$$\int_0^{\pi/2} u(\cos t \cos \alpha - \sin t \sin \alpha \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = 0, \quad t \in \left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right).$$

Замена переменной в интеграле дает

$$\int_{\cos t \cos \alpha}^{\cos(t+\alpha)} u(x) \sqrt{(\cos(t+\alpha) - x)(x - \cos(t-\alpha))} dx = 0, \quad t \in \left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right).$$

Поскольку $u = 0$ на $(\cos r, \cos \alpha)$ (см. замечание 1),

$$\int_{\cos \alpha}^{\cos(t+\alpha)} u(x) \sqrt{(\cos(t+\alpha) - x)(x - \cos(t-\alpha))} dx = 0, \quad t \in \left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right).$$

Это уравнение сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ограниченным ядром (см. [23; доказательство леммы 8.1]). Отсюда $u = 0$ на $(\cos r, \cos(\alpha/2))$.

Из (19) находим

$$\int_{\gamma_2} \xi_1 f(a_t \xi) dl(\xi) = 0$$

при $t \in (-\alpha/2, 0)$. Тем самым,

$$\int_0^\alpha u(\cos t \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = 0, \quad t \in \left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right).$$

Учитывая, что $u = 0$ на $(\cos r, \cos(\alpha/2))$, получаем

$$\int_{\cos(\alpha/2)}^{\cos t} u(x) \sqrt{\cos^2 t - x^2} dx = 0, \quad t \in \left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right).$$

Снова имеем интегральное уравнение Абеля. Таким образом, $f = 0$.

Допустим теперь, что $r < \arccos(\cos(\alpha/2) \cos \alpha)$. Рассмотрим ненулевую гладкую функцию h со следующими свойствами:

- 1) $h = 0$ на $[0, \alpha/2 - \varepsilon] \cup [\alpha/2 + \varepsilon]$, где $\varepsilon = \alpha/2 - \arccos(\cos r / \cos \alpha)$;
- 2) $\int_{\alpha/2 - \varepsilon}^{\alpha/2 + \varepsilon} h(t) dt = 0$.

Определим гладкую функцию u на $[0, 1]$ из условия (см. [11; гл. 1, доказательство теоремы 2.6])

$$\int_0^s xu(x) \frac{dx}{\sqrt{s^2 - x^2}} = h(\arccos s)s, \quad s \in [0, 1].$$

Тогда u ненулевая и $u = 0$ на $[0, \cos(\alpha/2 + \varepsilon)]$. Положим $f(\xi) = u(\xi_3)$. При $0 \leq t \leq \alpha/2 - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{a-tA(\alpha)} f(\xi) d\omega(\xi) &= 2 \int_0^t d\psi \int_0^{\pi/2} u(\sin \theta \cos \psi) \sin \theta d\theta \\ &\quad + 2 \int_0^{\alpha/2 + \varepsilon} d\psi \int_0^{\pi/2} u(\sin \theta \cos \psi) \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^t h(\psi) d\psi + 2 \int_0^{\alpha/2 + \varepsilon} h(\psi) d\psi = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично

$$\int_{a_t A(\alpha)} f(\xi) d\omega(\xi) = 2 \int_0^{\alpha/2 + \varepsilon} h(\psi) d\psi - 2 \int_0^t h(\psi) d\psi = 0 \quad (22)$$

при $0 \leq t < r - \alpha$. Далее, пусть τ – вращение сферы и $\tau(A(\alpha)) \subset B_r$. Представим τ в виде $\tau = \tau_1 a_t \tau_2$, где $t \in [0, \pi]$, а τ_1, τ_2 – вращения в плоскости (x_1, x_2) . Тогда $\cos t \cos \alpha > \cos r$, поскольку $a_t \tau_2 A(\alpha) \subset B_r$ и хотя бы одна из точек $(-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ или $(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ принадлежит $\tau_2 A(\alpha)$. Отсюда следует, что $\tau_1 a_t \tau_2 \gamma_1 \subset B_r \setminus B_{\alpha/2 + \varepsilon}$ и

$$\max\{\xi_3 : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \tau_1 a_t \tau_2 \gamma_2\} > \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\right).$$

Теперь из радиальности f и (21), (22) делаем вывод, что $f \in \mathfrak{P}(A(\alpha), B_r)$, так как $\tau_1 a_t \tau_2 \gamma_2$ является геодезической. Значит, $\mathfrak{P}(A(\alpha), B_r) \neq \{0\}$ и $\mathcal{R}(A(\alpha)) = \arccos(\cos(\alpha/2) \cos \alpha)$.

Случай 2: $\pi/2 < \alpha < \pi$. Используя (20) при $t \in (-r, 0)$, лемму 6 и рассуждения выше, получаем $\mathfrak{P}(A(\alpha), B_r) = \{0\}$ при $r > \alpha$. Кроме того, нетрудно видеть, что все полукруги радиуса α из $B_{\alpha - \varepsilon}$ содержат B_ε . На основании этого $\mathcal{R}(A(\alpha)) = \alpha$.

Осталось заметить, что при $\alpha = \pi/2$ теорема 3 следует из теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Пусть π – стереографическая проекция двумерной сферы на плоскость:

$$\pi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_3}, \frac{\xi_2}{1 - \xi_3} \right).$$

Нетрудно видеть, что $\pi^{-1}(P_\beta)$ является сферическим полукругом радиуса $2 \arctg \beta$, а $\pi^{-1}(\Lambda_\beta)$ является двуугольником раствора $4 \arctg \beta$ на $\mathbb{S}^2$. Группа $\mathfrak{G}$ изоморфна группе вращений $SO(3)$. Поэтому теоремы 2, 3 можно переформулировать в терминах множеств Помпейю на плоскости относительно группы $\mathfrak{G}$. Теперь наше утверждение следует из эквивалентности свойств Помпейю и Мореры, которая легко вытекает из формулы Грина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Zalcman, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations* (Hanstholm, 1991), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **365**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 185–194.
- [2] L. Zalcman, “Supplementary bibliography to: “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Radon Transforms and Tomography* (South Hadley, MA, 2000), Contemp. Math., **278**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 69–74.
- [3] К. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Комплексный анализ – многие переменные* – 5, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 5–111.
- [4] В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, “Экстремальные задачи интегральной геометрии”, *Математика сегодня*, **12**, Научно-методический центр высшего образования, Киев, 2001, 51–79.
- [5] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [6] S. A. Williams, “A partial solution of the Pompeiu problem”, *Math. Ann.*, **223**:2 (1976), 183–190.
- [7] S. A. Williams, “Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:3 (1981), 357–369.
- [8] R. Dalmasso, “A new result on the Pompeiu problem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:6 (2000), 2723–2736.
- [9] N. Garofalo, F. Segàla, “Univalent functions and the Pompeiu problem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **346**:1 (1994), 137–146.
- [10] P. Ebenfelt, “Propagation of singularities from singular and infinite points in certain complex-analytic Cauchy problems and an application to the Pompeiu problem”, *Duke Math. J.*, **73**:3 (1994), 561–582.
- [11] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ. Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции*, Мир, М., 1987.
- [12] C. A. Berenstein, M. Shahshahani, “Harmonic analysis and the Pompeiu problem”, *Amer. J. Math.*, **105**:5 (1983), 1217–1229.
- [13] P. Ungar, “Freak theorem about functions on a sphere”, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 100–103.
- [14] D. H. Armitage, “The Pompeiu property for spherical polygons”, *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, **96**:1 (1996), 25–32.
- [15] C. A. Berenstein, L. Zalcman, “Pompeiu’s problem on symmetric spaces”, *Comment. Math. Helv.*, **55**:4 (1980), 593–621.
- [16] В.В. Волчков, Вит.В. Волчков, “Уравнения свертки на многомерных областях и редукциированной группе Гейзенберга”, *Матем. сб.*, **199**:8 (2008), 29–60.

- [17] C. A. Berenstein, R. Gay, “Le probleme de Pompeiu local”, *J. Anal. Math.*, **52** (1989), 133–166.
- [18] А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый, *Фрактальные множества, функции, распределения*, Наукова думка, Киев, 1992.
- [19] H. T. Laquer, “The Pompeiu problem”, *Amer. Math. Monthly*, **100**:5 (1993), 461–467.
- [20] В. В. Волчков, “Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях”, *Матем. заметки*, **53**:2 (1993), 30–36.
- [21] L. Brown, B. M. Schreiber, B. A. Taylor, “Spectral synthesis and the Pompeiu problem”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **23**:3 (1973), 125–154.
- [22] Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Физико-математическая библиотека инженера, Наука, М., 1971.
- [23] Вит. В. Волчков, “Локальная теорема о двух радиусах на сфере”, *Алгебра и анализ*, **16**:3 (2004), 24–55.

В. В. Волчков

Донецкий национальный университет

E-mail: valeriyvolchkov@gmail.com

Поступило

16.06.2008

Вит. В. Волчков

Донецкий национальный университет

E-mail: volchkov@univ.donetsk.ua