Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Созутов, Два признака простоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 443–453

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:45:25

УДК 512.544

ДВА ПРИЗНАКА НЕПРОСТОТЫ ГРУППЫ С СИЛЬНО ВЛОЖЕННОЙ ПОДГРУППОЙ И КОНЕЧНОЙ ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. И. Созутов

Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной*, если $2 \in \pi(H)$ и $2 \notin \pi(H \cap H^g)$ ($\forall g \in G \setminus H$). Инволюция i группы G называется *конечной*, если $|ii^g| < \infty$ ($\forall g \in G$). Как известно, строение (локально) конечной группы с сильно вложенной подгруппой в случае, когда силовская 2-подгруппа содержит единственную инволюцию, определяется теоремами Бернсайда и Брауэра–Судзуки. В работе установлены достаточные условия справедливости равенства $m_2(G) = 1$ и даны два аналога теорем Бернсайда и Брауэра–Судзуки для бесконечной группы G с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией.

Библиография: 18 названий.

В работе обобщаются основные результаты из [1]. Напомним определения. Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной*, если H содержит элемент порядка 2 (*инволюцию*) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Инволюция i группы G называется *конечной*, если подгруппы вида $\langle i, i^g \rangle$ конечны для всех элементов $g \in G$, что равносильно условию $|ii^g| < \infty$ ($g \in G$). Элемент a бесконечной группы G называется *почти регулярным*, если $|C_G(a)| < \infty$. Группа G (конечная или бесконечная) называется *группой четного периода*, если она содержит инволюцию, и *группой нечетного периода* в противном случае. Собственная подгруппа H группы G называется *сильно изолированной*, если она содержит централизатор каждого своего неединичного элемента, т.е. для любого неединичного элемента $g \in G$ из $C_G(g) \cap H \neq 1$ следует $C_G(g) \leq H$, и *2-изолированной*, если это условие выполняется для $C_G(g)$, содержащих инволюции [2]. Подгруппа H группы G называется *бесконечно изолированной*, если для любого неединичного элемента $h \in H$ из бесконечности $C_H(h)$ и четности его периода следует включение $C_G(h) \leq H$ [1]. *FC-радикалом* группы G называется подгруппа $FC(G) = \{g \in G \mid |G : C_G(a)| < \infty\}$.

Строение конечной группы с сильно вложенной подгруппой изучено достаточно детально (см., например, [3]). В случае, когда силовская 2-подгруппа содержит единственную инволюцию, оно определяется теоремами Бернсайда и Брауэра–Судзуки [4], а когда ранг силовской 2-подгруппы ≥ 2 – теорией дважды транзитивных групп [3,

с. 157–180]. Авторами, Н. М. Сучковым и В. Д. Мазуровым [5]–[9] в последнее время получен ряд интересных результатов по бесконечным кратно транзитивным группам. Теоремы 1, 2 предлагаемой статьи являются некоторыми аналогами теорем Бернсайда и Брауэра–Судзуки [4] для бесконечных групп с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией и дополняют результаты из [5]–[9].

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа G содержит конечную инволюцию, сильно вложенную бесконечно изолированную подгруппу H и выполняются следующие условия.

1. Централизатор $C_G(k)$ некоторой инволюции $k \in G$ не содержит бесконечных подгрупп, в которых каждый неединичный элемент почти регулярен.
2. Хотя бы одно из пересечений $H \cap H^g$, где $g \in G \setminus H$, бесконечно.
3. Для некоторой инволюции $j \in G \setminus H$ и каждого инвертируемого инволюцией j элемента $b \in H$ его централизатор $C_G(b)$ не содержится в H .

Тогда инволюции в G сопряжены, все элементы $b \in H$, инвертируемые инволюцией j , составляют периодическую абелеву нормальную подгруппу B группы G , инвертируемую каждой инволюцией из G , и $G = C_G(B)C_G(j)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа G содержит конечную инволюцию, сильно вложенную бесконечно изолированную подгруппу H и выполняются следующие условия.

1. Централизатор $C_G(k)$ некоторой инволюции $k \in G$ не содержит бесконечных подгрупп, в которых каждый неединичный элемент почти регулярен.
2. Хотя бы одно из пересечений $H \cap H^g$, где $g \in G \setminus H$, бесконечно.
3. Существует элемент $b \in H$, инвертируемый некоторой инволюцией j из G , централизатор $C_G(b)$ которого не содержится в H .

Тогда инволюции в G сопряжены, $B = \langle b^G \rangle$ – периодическая абелева подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из G , и $G = C_G(B)C_G(k)$.

Отметим, что силовские 2-подгруппы группы G из теорем 1, 2 не обязаны быть сопряженными и изоморфными (пример из п. 3). Заметим также, что в формулировке теоремы 2 инволюция j может быть выбрана из $G \setminus H$, поскольку H сильно вложена и $C_G(b) \not\leq H$.

1. Вспомогательные предложения. Нам понадобятся некоторые известные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (лемма Бусаркина). Пусть G – группа с конечной инволюцией i . Если $C_G(i) = \langle i \rangle$, то $G = F \rtimes \langle i \rangle$, где F – периодическая абелева подгруппа из G , а инволюция i инвертирует F [10, предложение 4.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [1, предложение 12]. 2-группа, обладающая только одной инволюцией, является либо локально циклической группой (циклической или квазициклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [11]. Пусть i – почти регулярная конечная инволюция группы G . Тогда

- 1) G – локально конечная группа,
- 2) $[i, G]$ содержится в FC -радикале группы G ,
- 3) коммутант FC -радикала группы G конечен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (теорема Бусаркина) [2]. Пусть конечная группа G содержит 2-изолированную подгруппу H четного порядка, вне которой есть инволюции. Тогда G является либо группой Фробениуса, либо ZT -группой.

Следующие две леммы хорошо известны и часто будут использоваться в тексте без ссылок.

ЛЕММА 1.1. Пусть H – сильно вложенная подгруппа группы G . Тогда

1. если L – подгруппа группы G , $L \not\leq H$ и $2 \in \pi(L \cap H)$, то подгруппа $L \cap H$ сильно вложена в L ;
2. $H = N_G(H) = N_G(a^H)$, где a – любой элемент четного порядка из H .

ЛЕММА 1.2. Пусть $D = \langle i, j \rangle$, где i и j – инволюции. Тогда

1. $D = \langle ij \rangle \rtimes \langle i \rangle = \langle ij \rangle \rtimes \langle j \rangle$, $(ij)^i = (ij)^j = ji = (ij)^{-1}$;
2. множество $D \setminus \langle ij \rangle$ состоит из инволюций;
3. если D содержит конечную группу диэдра, то она конечна;
4. если $z \in \langle ij \rangle$ инволюция, то $z \in Z(D)$ и в D нет сильно вложенных подгрупп;
5. если $|ij|$ конечен и нечетен, то любая собственная подгруппа четного порядка из D сильно вложена в D ;
6. если $|ij|$ конечен и нечетен, то $j = i^c$, где $c \in \langle ij \rangle$, $c^2 = ij$, и для инволюции $k = ic$ выполняются равенства $j = i^k$, $i^k = j$.

Доказательства лемм 1.3, 1.4 можно найти в [10], [12] и [5, леммы 2.1, 2.2].

ЛЕММА 1.3. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой H и конечной инволюцией i . Тогда

1. все инволюции в G сопряжены и любые две инволюции из H сопряжены в H ;
2. между множеством инволюций из H и множеством инволюций любого правого смежного класса Hg , $g \in G$, можно установить взаимно однозначное соответствие, при этом если i – фиксированная инволюция из H , то каждой инволюции $k \in H$ (в том числе и инволюции i) соответствует единственная инволюция $j_k \in Hg$ такая, что $g^{-1}kg = j_k i j_k$;
3. любой элемент $g \in G$ обладает представлением $g = hj$, где $h \in H$, а j – некоторая инволюция;
4. для любой инволюции $j \in G \setminus H$ в подгруппе H существует множество M_j строго вещественных относительно j элементов той же мощности, что и множество инволюций из H .

ЛЕММА 1.4. Пусть G – группа с сильно вложенной подгруппой H и конечной инволюцией, $i \in H$ и $j \in G \setminus H$ – произвольные инволюции, $H_j = H \cap H^j$, T_j – подгруппа в H , порожденная всеми строго вещественными относительно j элементами из H . Тогда

1. $T_j \leq H_j$, H_j – подгруппа без инволюций, $\langle j, T_j \rangle = T_j \rtimes \langle j \rangle$ и $\langle j, H_j \rangle = H_j \rtimes \langle j \rangle$;
2. в каждом смежном классе $C_H(i) \cdot b$, где $b \in H$, существует единственный строго вещественный элемент относительно инволюции j ;
3. $H = T_j \cdot C_H(i) = H_j \cdot C_H(i)$;

4. если b – неединичный инвертируемый инволюцией $j \in G \setminus H$ элемент из H , то $C_H(b)$ не содержит инволюций.

2. Общие леммы и доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполняются условия 1 и 2 теорем 1, 2 и j – произвольная инволюция из $G \setminus H$. Тогда

1. $H_j = T_j \rtimes C_j$, где $C_j = C_H(j)$;
2. T_j – бесконечная абелева периодическая подгруппа, состоящая из всех инвертируемых инволюцией j элементов из H ;
3. C_j – конечная группа нечетного порядка с циклическими силовскими подгруппами и любой неединичный элемент $c \in C_j$ почти регулярен в H ;
4. для любого $p \in \pi(C_j)$ силовские p -подгруппы в H_j конечны или черниковские;
5. множество инволюций в H бесконечно;
6. если $a \in H_j$ и подгруппа $C_G(a) \cap H_j$ бесконечна, то $a \in T_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию 2 теорем и лемме 1.3 для некоторой инволюции $k \in G \setminus H$ подгруппа $H_k = H \cap H^k$ бесконечна. Ввиду бесконечной изолированности подгруппы H в G (условия теорем), сопряженности всех инволюций в G (лемма 1.3) и условия 1 теорем подгруппа $C_H(k)$ не может быть бесконечной. Следовательно, H_k содержит бесконечно много строго вещественных относительно k элементов. По лемме 1.3 H содержит бесконечно много инволюций и подгруппы H_j и T_j бесконечны для произвольной инволюции $j \in G \setminus H$. Из бесконечной изолированности H и отсутствия в $C_G(j)$ бесконечных подгрупп, состоящих из почти регулярных элементов (условие 1 теорем), вытекает почти регулярность инволюции j в группе $B = H_j \rtimes \langle j \rangle$. По предложению 1.3 B – локально конечная группа и FC -радикал F группы B имеет конечный индекс в B . Отсюда и из бесконечной изолированности H в G вытекает равенство $C_F(j) = 1$. Ввиду леммы Бусаркина и конечности инволюции j это означает, что все элементы из F имеют конечные порядки, строго вещественны относительно инволюции j , подгруппа F абелева и содержится в T_j . Отсюда выводим, что подгруппа F совпадает с T_j и не содержит инволюций, при этом $B = F \rtimes C_B(j) = T_j \rtimes C_B(j)$ (утверждение 2 доказано). Так как $C_B(j)$ конечна и ее подгруппа индекса 2 $C_j = C_{H_j}(j)$ не содержит инволюций, то $C_B(j) = C_j \times \langle j \rangle$ и $H_j = T_j \rtimes C_j$ (утверждение 1 доказано).

Далее, если R – элементарная абелева подгруппа ранга 2 из C_j , то из бесконечности абелевой подгруппы T_j вытекает бесконечность $C_{T_j}(r)$ для некоторого элемента $r \in R^\#$, что противоречит бесконечной изолированности H в G . Следовательно, силовские подгруппы в C_j циклические (теорема 12.5.2 из [13]) и каждый элемент из C_j почти регулярен в B (утверждение 3 доказано). В частности, из известной теоремы Блэкберна [14] теперь следует, что силовские p -подгруппы в T_j конечны или черниковские для любого $p \in \pi(C_j) \cap \pi(T_j)$ (утверждение 4 леммы).

Как доказано выше, множество J инволюций подгруппы H бесконечно. Пусть a – произвольный элемент из H_j с бесконечным централизатором $C_{H_j}(a)$. Тогда ввиду конечности индекса $|H_j : T_j|$ (утверждения 1, 3) централизатор $D = C_{T_j}(a)$ бесконечен. По утверждению 1 $a = rb$, где $r \in C_j$ и $b \in T_j$. Ввиду абелевости T_j (утверждение 2 леммы) заключаем, что $D \leq C_H(r)$ и $r = 1$ по утверждению 3 леммы. Следовательно, $a \in T_j$ и лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Если некоторая инволюция почти регулярна в G , то теоремы 1 и 2 верны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1.3 инволюция j почти регулярна и конечна в G . По предложению 1.3 G – локально конечная группа с FC -радикалом F конечного индекса. Поскольку все инволюции в G сопряжены (лемма 1.3), все они почти регулярны и, значит, F – группа без инволюций. По предложению 1.3 $F \leq [j, G]$, поэтому $G = F \cdot C_G(j)$ и $G = F \cdot C_G(i)$, где i – инволюция из H . Если $C_F(j) = 1$, то по лемме Бусаркина F – абелева группа, инвертируемая каждой инволюцией из G , и $G = F \rtimes C_G(j)$. По предложению 1.2 силовские 2-подгруппы из G содержат по одной инволюции и являются либо циклическими, либо (обобщенными) группами кватернионов. Ввиду леммы 1.4 $T_j \leq F$ и теорема 2 верна. Далее, $G = F \rtimes C_H(i)$, поскольку $C_G(i) = C_H(i)$, и $H = (F \cap H) \rtimes C_H(i)$. Поэтому подгруппа $F \cap H$ нормальна в G , совпадает с T_j и инвертируется каждой инволюцией из G . Следовательно, теорема 1 также верна, и лемма для случая $C_F(j) = 1$ доказана.

Пусть $1 \neq r \in F \cap C_G(i)$. Тогда в силу бесконечной изолированности подгруппы H имеем $C_G(r) \leq H$. Следовательно, $|G : H| < \infty$ и по теореме Пуанкаре [15] H содержит нормальную в G подгруппу $D = \cap H^x$ конечного индекса. Если $1 \neq r \in C_D(j)$, то $|C_D(r)| = \infty$, и ввиду бесконечной изолированности H в G $j \in C_H(r) \leq H$, противоречие. Следовательно, $C_D(j) = 1$ и по лемме Бусаркина инволюция j инвертирует D . Отсюда выводим, что D – абелева группа, инвертируемая каждой инволюцией из G . Как и выше, заключаем, что силовские 2-подгруппы либо локально циклические, либо (обобщенные) группы кватернионов. Если $b \in D$, то теорема 2, очевидно, верна. Если $b \in D$ для всех таких $b \in T_j$, что $C_G(b) \not\leq H$, то верна также и теорема 1.

Пусть теперь $b \in T_j \setminus D$ и $r \in C_G(b) \setminus H$. По лемме 1.3 $r = hk$, где $h \in H$, $k \in j^G$. Поскольку $b \in H \cap H^r = H \cap H^k$ и $|C_G(b)| = \infty$, по лемме 1.4 $b^k = b^{-1}$. Но тогда и $b^h = b^{-1}$, причем ввиду последнего утверждения леммы 1.4 элемент b инвертируется инволюцией $i \in \langle h \rangle$. Так как по лемме 2.1 $i^H = i^{T_j}$ и $T_j \leq C_G(b)$, то каждая инволюция из H инвертирует элемент b . Нетрудно убедиться, что подгруппа $B = \langle b^H \rangle$ инвертируется каждой инволюцией из H . Действительно, если x, y – произвольные элементы из H , инвертируемые каждой инволюцией из H , то для любой инволюции $k \in H$ существуют инволюции $v, t \in H$ такие, что $x = kv, y = vt$, и потому $xy = kt$ и $(xy)^k = (xy)^{-1}$. Поэтому BD – нормальная в H абелева подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из H . Аналогично, любая подгруппа из G , инвертируемая каждой инволюцией из G , содержится в единственной максимальной нормальной в G подгруппе T с данным свойством.

Рассмотрим подгруппу L , порожденную всеми инволюциями из G . Понятно, что $L = C_L(T) \rtimes \langle j \rangle = C_L(T) \rtimes \langle i \rangle$ и $C_L(T) \neq T$. Очевидно, что все инволюции в L сопряжены и по аргументу Фраттини $G = L \cdot C_L(i) = L \cdot H$, $i \in H^\#$, $i^2 = 1$. Так как все строго вещественные относительно инволюций элементы группы G содержатся в L , то лемму достаточно доказать для группы L . Поэтому можно считать, что уже $L = G = C_G(T) \rtimes \langle j \rangle = C_G(T) \rtimes \langle i \rangle$. Ввиду бесконечной изолированности H в G заключаем, что $T \leq \cap H^x = D$. Далее, централизатор любого элемента нечетного порядка из H содержит D и потому бесконечен. Учитывая бесконечную изолированность H в G и лемму 2.1, заключаем, что $C_H(k) = 1$ и $H \cap H^k = T_k$ для любой инволюции $k \in G \setminus H$. Отсюда выводим, что в факторгруппе $\overline{G} = G/D$ подгруппа $\overline{H} = H/D$ сильно вложена и 2-изолирована. Учитывая строение силовских 2-подгрупп в G и теорему

Бусаркина (предложение 1.4), приходим к выводу, что $\overline{G}$ – группа Фробениуса с инвариантным множителем четного порядка и ядром $\overline{R}$. Очевидно, что каждая инволюция из G инвертирует полный прообраз R подгруппы $\overline{R}$ в G . Но тогда $R = D$, противоречие. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен. Лемма доказана.

На основании леммы 2.2 в дальнейшем предполагается, что централизаторы инволюций в G бесконечны.

ЛЕММА 2.3. *Элемент b из условия 3 теорем 1, 2 инвертирует каждая инволюция из H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условиям теорем можно выбрать элемент $r \in C_G(b) \setminus H$. По лемме 1.3 $r = hk$, где $h \in H$, k – инволюция из $G \setminus H$. Имеем $b \in H \cap H^r = H \cap H^k = H_k$. Поскольку $T_j \leq C_H(b)$, то подгруппа $C_H(b)$ бесконечна и по лемме 2.1 $b \in T_k$, $b^k = b^{-1}$. Но тогда и $b^h = b^{-1}$. По лемме 1.4 $C_H(b)$ не содержит инволюций. Поэтому подгруппа $\langle h \rangle$ либо бесконечная циклическая, либо содержит инволюцию i , инвертирующую элемент b . Пусть верна вторая часть альтернативы. Так как по лемме 2.1 $T_j \leq C_G(b)$ и i^{T_j} – множество всех инволюций из H , каждая инволюция из H инвертирует b .

Пусть $|h| = \infty$. Как отмечено выше, централизаторы инволюций в группе G бесконечны. По лемме 2.1 $b \in T_j \leq C_G(b)$, поэтому подгруппа $C_G(b)$ бесконечна. Далее, по лемме 1.3 инволюция j содержится в некоторой сопряженной с H подгруппе M группы G , которая ввиду условий теоремы сильно вложена и бесконечно изолирована, как и подгруппа H .

Рассмотрим подгруппу $L = C_G(b) \rtimes \langle j \rangle$. Очевидно, что элемент h содержится в группе L и L – смешанная группа. Ввиду предложения 1.3 $C_L(j)$ бесконечен и по условиям теорем существует $1 \neq c \in C_G(j) \cap C_G(b)$ с бесконечным централизатором $C_M(c)$. Следовательно, $b \in C_G(c) \leq M$.

Если $T_j \leq M$, то ввиду леммы 2.1 и очевидного включения $C_j \leq C_G(j) \leq M$ выполняется $H_j \leq M$. По лемме 1.3 найдется инволюция $v \in G \setminus H$ такая, что $M = H^v$ и в силу выше доказанного $H_j \leq H_v$. Из леммы 2.1 легко следует, что $T_j \leq T_v$. Поэтому условие 3 теорем справедливо для элемента b , инволюции v и подгруппы $M = H^v$, при этом инволюция $j \in M$ инвертирует элемент b . Как и выше, с помощью леммы 2.1 заключаем, что каждая инволюция из M инвертирует b , и в этом случае лемма справедлива. Она верна также при условии $jT_j \subseteq M$, поскольку $T_j \leq \langle jT_j \rangle$. Поэтому можно предполагать, что множество $jT_j \setminus M$ непусто и содержит инволюцию k , причем $b^k = b^{-1}$ (лемма 2.1). В этом случае условие 3 теорем выполняется для инволюции k , элемента b и подгруппы M . Используя лемму 2.1, убеждаемся в том, что каждая инволюция из M инвертирует b . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.4. *Силовские 2-подгруппы из G либо локально циклические (циклические или квазичиклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 любая инволюция из H инвертирует элемент b . Отсюда выводим, что в H нет четверных подгрупп, и по предложению 1.2 силовские 2-подгруппы в H либо локально циклические (циклические или квазичиклические), либо обобщенные группы кватернионов (конечные или бесконечные). Таковы они и в G , так как из леммы 1.3 следует, что любая силовская 2-подгруппа из G сопряжена с некоторой силовской 2-подгруппой из H . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть B – множество всех элементов из H , инвертируемых каждой инволюцией из H . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. B – периодическая абелева нормальная в H подгруппа.
2. Если элемент $d \in H$ инвертируется некоторой инволюцией $k \in G \setminus H$ и $C_G(d) \not\leq H$, то d инвертирует каждая инволюция из H и $d \in B$.
3. Если элемент $d \in H$ инвертируется некоторой инволюцией $i \in H$ и $C_G(d) \not\leq H$, то d инвертирует каждая инволюция из H и $d \in B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $x, y \in B$ и i – инволюция из H , то $(ix)^2 = 1$, $(i(xy))^2 = ((ix)y)^2 = 1$; следовательно, $(xy)^i = (xy)^{-1}$ и B – подгруппа. Поскольку все инволюции в H конечны (лемма 1.3), то по лемме Бусаркина подгруппа B периодическая и абелева. Наконец, очевидно, что B нормальна в H . Утверждение доказано.

2. По лемме 2.3 каждая инволюция из H инвертирует d , значит, $d \in B$.

3. Поскольку для $r \in C_G(d) \setminus H$ инволюция $k = i^r \notin H$ и $d^k = d^{-1}$, то $d \in B$ по утверждению 2 леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть k – инволюция из $G \setminus H$, A – абелева нормальная подгруппа из H , содержащая подгруппу B , $T_k \leq N_H(A)$, $X = T_k \cap B \neq T_k$ и $X \neq B$. Тогда X нормальна в подгруппе AT_k и AT_k/X – локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром A/X и локально циклическим инвариантным множителем T_k/X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Виду леммы 2.1 $V = AT_k$ – локально конечная группа, $A \triangleleft V$, $X \triangleleft V$, A/X и T_k/X – абелевы группы. Поэтому достаточно показать, что любые неединичные элементы $\bar{z} \in A/X$, $\bar{r} \in T_k/X$ не перестановочны [16], [17]. Предположим противное. Пусть $\bar{z}, \bar{r}$ таковы, что $\bar{z}\bar{r} = \bar{r}\bar{z}$, т.е. для прообразов z и r данных элементов выполняется равенство $z^{-1}rz = rx$, где $x \in X$. Обозначим $M = \langle X, r \rangle$ и $W = \langle M, z, k \rangle$. Ввиду доказанного выше $M \triangleleft W$, $X \triangleleft W$ и в силу перестановочности элементов $\bar{z}, \bar{r}$ и равенства $\bar{r}^k = \bar{r}^{-1}$ имеем $W = L \rtimes \langle k \rangle$, $\bar{r} \in Z(L/X)$.

Если $kzk = z^k \in H$, то $z \in H \cap H^k$. Поскольку $C_H(z)$ – бесконечная группа, то по лемме 2.1 $z \in T_k$, что противоречит выбору элемента $\bar{z}$. Следовательно, $kzk \notin H$ и по лемме 1.3 $kzk = hv$, где $h \in H$, v – инволюция из $G \setminus H$. Поскольку $M^{kzk} = M$ и $|C_H(M)| = \infty$ ($M \leq T_k$), то $M \leq H \cap H^v$ и $M \leq T_v$ (лемма 2.1).

Так как $zx \in T_k$, то $(rx)^k = (rx)^{-1} = r^{-1}x^{-1}$ (лемма 2.1), откуда $rz^k = r^{-1}x^{-1}$ или $(r^{-1})^{kzk} = r^{-1}x^{-1}$. Аналогично, $(rx)^v = r^{-1}x^{-1}$ и поскольку $h = kzkv$, то $(r^{-1})^h = rx$. Очевидно, $h \in N_H(M)$, а из $B \triangleleft H$ (лемма 2.5) и $X = M \cap B$ следует $h \in N_H(X)$. Таким образом, h индуцирует на M/X инволютивный автоморфизм и, значит, либо $\langle h \rangle$ содержит инволюцию i , либо $|h| = \infty$. В первом случае ввиду лемм 1.3, 1.4 заключаем, что i инвертирует M , каждая инволюция из H инвертирует M и $M \leq B$. Однако последнее противоречит выбору элемента r . Следовательно, $|h| = \infty$.

Рассмотрим подгруппу $V = \langle h, M, k, v \rangle$. Ввиду предложения 1.3 и конечности инволюции k в G заключаем, что $|C_V(k)| = \infty$. Так как $h, k, v \in N_V(M)$ и $|M| < \infty$, то в $C_V(k) \cap C_V(M)$ найдется неединичный элемент c с бесконечным централизатором $C_K(c)$ (условие 1 теорем 1, 2), где $k \in K = H^t$, $t^2 = 1$ (лемма 1.3). Поэтому $M \leq C_G(c) \leq K$ (т.е. $M \leq H \cap H^t$) и поскольку $C_H(M)$ бесконечен, то $M \leq T_t$ и по лемме 2.1 t инвертирует M . Теперь рассмотрим подгруппу $Y = \langle V, t \rangle$. Очевидно, что $M \triangleleft Y$, подгруппа

$Y \cap K \neq Y$ и сильно вложена в Y . Применяя леммы 1.1, 1.3, заключаем, что M инвертируется каждой инволюцией из Y . Следовательно, $r^i = r^{-1}$ для некоторой инволюции $i \in H = K^t$. Так как $r \in T_k$, то ввиду лемм 1.4, 2.1 r инвертируется каждой инволюцией из H . Но тогда $r \in B$, противоречие.

Таким образом, любые неединичные элементы $\bar{z} \in A/X$, $\bar{r} \in T_k/X$ не перестановочны и AT_k/X – локально конечная группа Фробениуса [16]. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. *Если выполняются условия теоремы 1, то $B = T_j$, подгруппы B и $B \rtimes \langle i \rangle$ нормальны в H (здесь i – инволюция из H) и $H = B \rtimes C_H(i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду условий теоремы 1 и лемм 2.1–2.5 подгруппа T_j инвертируется каждой инволюцией из H . Поскольку i^{T_j} – множество всех инволюций из H (лемма 2.1), то $B = T_j$. Очевидно, что $T_j = B$ и $B \rtimes \langle i \rangle$ – характеристические подгруппы группы H и по лемме Фраттини $H = T_j \rtimes C_H(i)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1 завершает

ЛЕММА 2.8. *Каждая инволюция группы G инвертирует подгруппу B и $G = C_G(B)C_G(j)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду лемм 2.1, 2.5, 2.7 достаточно показать, что для каждой инволюции k из $G \setminus H$ выполняется равенство $T_k = T_j$. Если $T_k \leq B$, то равенство $T_k = T_j$ следует из леммы 2.1. Пусть $X = T_k \cap T_j \neq T_k$. Положим в лемме 2.6 $A = B$ и $V = BT_k/X$. Тогда по лемме 2.6 V – локально конечная группа Фробениуса.

По лемме 2.7 iB – множество всех инволюций из H (здесь $i \in H$ – инволюция) и каждая инволюция из H инвертирует B и X . По той же лемме $B/X \triangleleft V$ и ввиду равенства $iB = i^H$ выполняется включение $T_k \leq N_H(iB)$. Но тогда $[T_k, i] \leq B$ и факторгруппа W/X группы $W = \langle B, i, T_k \rangle$ также локально конечная группа Фробениуса. При этом понятно, что B/X – ядро группы W . В силу свойств локально конечных групп Фробениуса [16] можно считать, что $[i, T_k] \leq X$. Отсюда выводим $i \in N_G(T_k)$ и в силу леммы 1.4 инволюция i и каждая инволюция из H инвертирует T_k . Но это означает $T_k \leq B$. Следовательно, $T_k = B$ и каждая инволюция группы G инвертирует B . Учитывая леммы 1.3 и 2.1, заключаем, что $B \leq \bigcap_{g \in G} H^g$ и $B \triangleleft G$.

Далее, если v – произвольная инволюция G , то $jv \in C_G(B)$. Поэтому все инволюции из G содержатся в подгруппе $L = C_G(B) \rtimes \langle j \rangle$. Очевидно, что подгруппа $H \cap L$ сильно вложена в L . По лемме 1.3 все инволюции в L сопряжены. По лемме Фраттини $G = C_G(B)C_G(j)$. Лемма доказана.

3. Строение подгруппы $C_G(b) \rtimes \langle j \rangle$ и доказательство теоремы 2. На протяжении всего пункта группа G удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть L – подгруппа в G , порожденная всеми инволюциями из G , инвертирующими элемент b . Изучим строение этой подгруппы.

ЛЕММА 3.1. *Подгруппа $K = H \cap L$ сильно вложена в L и содержит все инволюции из H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.3 все инволюции из H инвертируют элемент b . Следовательно, K содержит все инволюции из H . Поскольку $j \in L \setminus K$, то $L \neq K$ и K сильно вложена в L . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. $L = C_L(b) \rtimes \langle j \rangle$, все инволюции в L сопряжены и каждая из них инвертирует подгруппу $Z = Z(C_G(b))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $L = C_L(b) \rtimes \langle j \rangle$ вытекает непосредственно из определения L , а сопряженность инволюций в L – из лемм 3.1 и 1.3. Понятно также, что любой элемент из Z , перестановочный с некоторой инволюцией из L , перестановочен с любой инволюцией из L и принадлежит $Z(L)$. Однако из бесконечной изолированности подгруппы K в L , вытекающей из условий теоремы, следует равенство $Z(L) = 1$. Значит, любой элемент из Z инвертируется каждой инволюцией из L . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть $Z \not\leq H$. Тогда

1. $C_L(j)$ – конечная группа;
2. $L = F \rtimes C_L(j)$, где F – периодическая абелева группа, инвертируемая каждой инволюцией из L ;
3. $F \cap H = T_j$ и в G выполняются условия теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $i \in K \cap j^L$. Ввиду леммы 3.3 $C_L(i) \leq K$ и если $|C_L(i)| = \infty$, то по условию 2 теоремы 1 пересечение $C_G(i) \cap C_K(b)$ содержит неединичный элемент r с бесконечным централизатором $C_K(r)$. Тогда ввиду бесконечной изолированности K в L имеем $Z \leq C_L(r) \leq K$, что противоречит условию леммы. Следовательно, $|C_L(i)| < \infty$, что равносильно условию $|C_L(j)| < \infty$. Утверждение доказано.

2. По предложению 1.3 L – локально конечная группа с FC -радикалом F конечного индекса. Подгруппа $F \cap K$ имеет конечный индекс в K и так же, как и выше, из $1 \neq r \in C_G(i) \cap F$ следует $Z \leq C_L(r) \leq K$ вопреки условию леммы. Таким образом, $C_G(i) \cap F = 1$. По лемме Бусаркина F – периодическая абелева группа, состоящая из инвертируемых инволюций i элементов. Поэтому каждая инволюция из L инвертирует F и $L = F \rtimes C_L(i)$. Поскольку все инволюции в L сопряжены (леммы 3.1, 1.3), то $L = F \rtimes C_L(j)$. Утверждение доказано.

3. Учитывая лемму 2.1, приходим к выводу, что $T_j = F \cap H$. Но тогда все инволюции из H порождают подгруппу $T_j \rtimes \langle i \rangle$ (лемма 2.1) и $F \cap H = T_j$. Поскольку $Z \leq C_G(T_j)$ и $Z \not\leq H$, то выполняются условия теоремы 1. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Если $|C_L(j)| < \infty$, то $C_G(T_j) \not\leq H$ и выполняются условия теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду леммы 3.3 можно считать, что $Z \leq K$. По предложению 1.3 L – локально конечная группа с FC -радикалом F конечного индекса. Пусть $1 \neq r \in C_L(j) \cap F$ и $j \in K^x = M$. Тогда из бесконечной изолированности подгруппы M следует $C_G(r) \leq M$. Ввиду конечности индекса $|L : C_L(r)|$ заключаем, что подгруппа M имеет конечный индекс в L . Но тогда $|L : K| < \infty$ и по теореме Пуанкаре [15] пересечение всех сопряженных с K подгрупп в L есть нормальная в L подгруппа D конечного индекса. Из лемм 1.4 и 3.3 следует, что $Z \leq D$. Поскольку $C_K(f)$ бесконечен для всех $f \in F$, то $C_F(j) = 1$. По лемме Бусаркина F – периодическая абелева подгруппа, причем ввиду предложения 1.3 $L = F \rtimes C_L(j) = F \rtimes C_K(i)$. Следовательно, $K = (F \cap K) \rtimes C_K(i)$. Отсюда выводим $T_j \leq F \cap K$ и $F \cap H = T_j$. Поскольку $L \not\leq H$, то $F \not\leq H$ и $C_G(T_j) \not\leq H$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 завершает

ЛЕММА 3.5. Каждая инволюция группы G инвертирует подгруппу B и $G = C_G(B_0)C_G(k)$, где $B_0 = \langle b^G \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду лемм 2.1, 2.3, 2.5 достаточно показать, что для каждой инволюции k из $G \setminus H$ выполняется включение $B \leq T_k$. Предположим, что $X = B \cap T_k \neq B$ и пусть $A = Z(C_H(B))$ и $V = AT_k$. Пусть i – инволюция из H . Поскольку $V = BT_k \neq T_k$, то ввиду леммы 1.4 $V = T_k C_V(i)$, где $C_V(i) \neq 1$. Пусть $1 \neq d \in C_V(i)$. Ввиду лемм 1.3, 1.4, 2.1 $d \notin B$, $d \notin T_k$ и $d = zr$, где $1 \neq z \in B$, $1 \neq r \in T_k \setminus X$. По лемме 2.6 V/X – локально конечная группа Фробениуса. Так как $i \in N_H(X)$, $z^i = z^{-1}$, $d^i = d$, то $r^i = zd$, $i \in N_H(\langle X, r, d, z \rangle)$ и $W = \langle i, X, r, d, z \rangle$ – локально конечная группа. Поскольку $|W : (V \cap W)| = 2$ и $(V \cap W)/X$ – группа Фробениуса, а $\langle dX \rangle$, $\langle rX \rangle$ – ее инвариантные множители, то некоторая инволюция $v \in W$ нормализует подгруппу $T = \langle r, X \rangle$. Из включения $T \leq T_k$ и лемм 1.4, 2.1 следует, что v инвертирует r . По лемме 2.3 каждая инволюция из H инвертирует элемент r . Но тогда $r \in B$, противоречие. Следовательно, $B \leq T_k$ и каждая инволюция из G инвертирует B .

По лемме 2.3 $b \in B$ и мы заключаем, что $\langle b^G \rangle = B_0$ – периодическая абелева подгруппа, инвертируемая каждой инволюцией из G . Если v – произвольная инволюция G , то $jv \in C_G(B_0)$. Поэтому все инволюции из G содержатся в подгруппе $L = C_G(B_0) \rtimes \langle k \rangle$; здесь k – инволюция из условий теоремы 2. Очевидно, что подгруппа $H \cap L$ сильно вложена в L . По лемме 1.3 все инволюции в L сопряжены. По лемме Фраттини $G = C_G(B_0)C_G(k)$. Лемма и вместе с ней теорема 2 доказаны.

Примеры групп, иллюстрирующие необходимость условий теорем 1, 2 в периодическом случае, приведены в [1]. Дополним их примером смешанной группы.

ПРИМЕР. Ввиду предложения 1.2 произвольная 2-группа ранга 1 содержит единственную инволюцию и является либо локально циклической группой (циклической или квазичиклической), либо обобщенной группой кватернионов (конечной или бесконечной).

Пусть $S_1, S_2, \dots$ – 2-группы ранга 1 порядка ≥ 4 и V – их свободное произведение с объединенной подгруппой $\langle i \rangle$ порядка 2. Как вытекает из строения групп $S_1, S_2, \dots$ и свободных произведений групп с объединенной подгруппой (см., например, [18]), $\langle i \rangle = Z(V)$ и i – единственная инволюция группы V .

Рассмотрим сплетение $X = A \wr V = \Phi \rtimes V$ абелевой периодической 2'-группы A с помощью подгруппы V , где Φ – база сплетения [15], и пусть $G = X/C_\Phi(i)$. Тогда образ C подгруппы V в G изоморфен V , инволюция $j = iC_\Phi(i)$ единственна в V и инвертирует $F = \Phi/C_\Phi(i)$. Поэтому каждая подгруппа $H < G$, содержащая подгруппу C , сильно вложена в G , а инволюция j конечна в G .

Поскольку C – свободное произведение неединичных 2-групп порядка ≥ 4 с объединенной подгруппой $\langle j \rangle$ порядка 2, то произвольный элемент h из C либо сопряжен с элементом некоторого сомножителя и $j \in \langle h \rangle$, либо $|h| = \infty$. Пусть справедливо второе. Заметим, что подгруппа $C_\Phi(i)$ порождается всевозможными элементами вида $a^v a^{vi}$, где $1 \neq a \in A$, $v \in V$. Пусть $1 \neq a \in A$ и $b = a_1^{h_1} \dots a_k^{h_k}$, где $h_1, \dots, h_k \in \langle h \rangle$, $a_1, \dots, a_k \in \langle a \rangle$ – различные неединичные элементы. Понятно, что $a \notin C_\Phi(i)$ и поскольку $h_n \neq h_m i$ для любых элементов $h_n, h_m \in \langle h \rangle$, то $b \notin C_\Phi(i)$. Отсюда выводим, что в факторгруппе $X/C_\Phi(i)$ подгруппа $\langle hC_\Phi(i), aC_\Phi(i) \rangle$ изоморфна сплетению $\langle a \rangle \wr \langle h \rangle$. Ввиду произвольности $a \in A^\#$ заключаем, что $\langle F, hC_\Phi(i) \rangle \simeq A \wr \langle h \rangle$ и $C_F(h) = 1$. Посколь-

ку для любого 2-элемента $h \in C$ $C_F(h) = 1$, то $C_F(h) = 1$ для каждого неединичного элемента $h \in C$.

Из доказанного выше заключаем, что если $C < H < G$, то H содержит бесконечно много инволюций. Также легко убедиться, что подгруппа C не максимальна в G и потому промежуточная подгруппа H в G существует. Покажем, что подгруппа H бесконечно изолирована в G . Действительно, если $h \in H$ и $C_G(h)$ четен, то $h \in H \setminus F$ и с точностью до сопряженности в H можно считать, что $h \in C$. В случае, когда h – элемент конечного порядка, сразу получаем $j \in \langle h \rangle$ и $C_G(h) \leq C \leq H$. Пусть $|h| = \infty$ и $r \in C_G(h) \setminus C$. Тогда $r = cf$, где $c \in C$, $1 \neq f \in F$. Поскольку $j \in C_G(h)$, то $r^j = cf^{-1} \in C_G(h)$ и $1 \neq f^2 = (r^j)^{-1}r \in C_G(h)$. Однако последнее противоречит доказанному выше равенству $C_F(h) = 1$. Следовательно, $C_G(h) \leq C \leq H$ и H бесконечно изолирована в G .

Легко убедиться, что группа G вместе с подгруппой H и произвольным элементом $b \in B^\#$ удовлетворяют условиям теорем 1, 2. При этом любая силовская 2-подгруппа из G сопряжена с образом только одной из подгрупп $S_1, S_2, \dots$, которые, очевидно, не сопряжены в G и не обязаны быть изоморфными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Измайллов А. Н., Шунков В. П. Два признака простоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. 1982. Т. 21. № 6.
- [2] Бусаркин В. М. О 2-изолированных подгруппах // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 5. С. 497–501.
- [3] Горенштейн Д. Конечные простые группы. М.: Мир, 1985.
- [4] Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. № 12.
- [5] Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика (в печати)
- [6] Созутов А. И., Сучков Н. М. О некоторых дважды транзитивных группах. Препринт № 17: ИВМ СО РАН, 1998.
- [7] Созутов А. И., Сучков Н. М. О некоторых бесконечных кратно транзитивных группах // Междунаро. алгебраич. семинар, посвященный 70-летию кафедры высшей алгебры МГУ (10–12 февраля 1999 г.). Тез. докл. М., 1999. С. 52.
- [8] Созутов А. И., Сучков Н. М. О бесконечных Z -группах с заданными стабилизаторами точек // Краснояр. гос. архит.-строит. акад. (Красноярск). Деп. ВИНТИ № 700–В99 от 09.03.99. М.: ВИНТИ, 1999.
- [9] Мазуров В. Д. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика (сдана в печать)
- [10] Шунков В. П. Mr -группы. М.: Наука, 1990.
- [11] Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 531–535.
- [12] Шунков В. П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: ВО “Наука”, 1992.
- [13] Холл М. Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
- [14] Blackburn N. Some remarks on Černikov p -groups. III // J. Math. 1962. V. 6. P. 421–433.
- [15] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
- [16] Старостин А. И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. 1971. Т. 23. № 5. С. 629–639.
- [17] Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
- [18] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.