Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Гапошкин, О независимых и стационарных подсистемах системы Уолша и периодических мультипликативных систем, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 3, 342–350

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:07:39

О независимых и стационарных подсистемах системы Уолша и периодических мультипликативных систем

В. Ф. Гапошкин

Показано, что для подсистем системы Уолша свойства независимости и стационарности в узком смысле эквивалентны. Для подсистем периодических мультипликативных систем исследуются как аналоги этого результата, так и некоторые отличия.

Библиография: 7 названий.

Ортонормированная система Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на отрезке $[0, 1]$ будет рассматриваться в обычной нумерации Пэли. А именно, пусть

$$r_k(x) = (\text{sign} \sin 2^k \pi x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

– система Радемахера. Полагают $w_0(x) = 1$; если число $n \geq 1$ имеет двоичное представление

$$n = \sum_{i=1}^s 2^{k_i-1}, \quad 1 \leq k_1 < \dots < k_s,$$

то $w_n = r_{k_1} \cdots r_{k_s}$. В частности, $w_{2^k-1} = r_k$, $k \geq 1$.

Систему $(X_k)_{k=1}^{\infty}$ измеримых функций на $[0, 1]$ будем коротко называть *независимой системой*, если любой конечный набор элементов этой системы образует систему независимых случайных величин на пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ – σ -алгебра измеримых подмножеств, P – мера Лебега. В противном случае будем говорить, что система *зависимая*. Будем также использовать следующие определения. Система интегрируемых функций, заданных на $[0, 1]$, называется *слабо мультипликативной*, если для любых $s \geq 1$ и $1 \leq k_1 < \dots < k_s$

$$E(X_{k_1} X_{k_2} \cdots X_{k_s}) = 0. \quad (1)$$

Система называется *стационарной* (в узком смысле), если для всех $k \geq 1$ и для всех N совместные распределения векторов $(X_1, \dots, X_N)$ и $(X_{k+1}, \dots, X_{k+N})$ совпадают. В работе [1] построены примеры стационарных последовательностей случайных величин, принимающих значения $+1$ и -1 с вероятностью $1/2$, являющихся независимыми попарно, но зависимыми в совокупности. Теорема 1 данной заметки, в частности, показывает, что для подсистем системы Уолша подобное свойство невозможно.

Хорошо известно, что $(r_k) = (w_{2^k-1})_{k=1}^\infty$ – независимая система. Различные свойства лакунарных подсистем системы Уолша, близкие к свойствам независимых систем, рассматривались во многих работах, см., например, [2]–[4]. Обзор соответствующих результатов содержится в работе [5]. Здесь нас будут интересовать независимые подсистемы системы Уолша. Удобно далее считать, что $1 \leq n_1 < \dots < n_k < \dots$, $E(w_{n_k}) = 0$ (присоединение функции $w_0 = 1$ не изменяет свойства независимости). Будем обозначать $N = (n_k)$ и $W(N) = \{w_{n_k}\}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для систем $W(N)$ независимость, слабая мультипликативность и стационарность эквивалентны.*

Отметим обобщение этого результата. Введем следующие определения. Пусть $(X_k)_{k=1}^\infty$ – система случайных величин, $E X_k = 0$. Пусть $m \geq 2$ – фиксированное число.

1) Систему (X_k) назовем *независимой по m -подсистемам*, если любая ее подсистема из m элементов является независимой.

2) Система (X_k) называется *m -мультипликативной*, если соотношение (1) выполнено при $s \leq m$, $1 \leq k_1 < \dots < k_s$.

3) Система (X_k) называется *m -стационарной*, если при $p \geq 1$ и $i_1 < \dots < i_m$ совпадают функции распределения векторов $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ и $(X_{i_1+p}, \dots, X_{i_m+p})$.

ТЕОРЕМА 2. *Для систем $W(N)$ свойства независимости по m -подсистемам, m -мультипликативности и m -стационарности эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Любая система, независимая по m -подсистемам и состоящая из одинаково распределенных функций с нулевыми математическими ожиданиями, является m -мультипликативной и m -стационарной, так как

$$E(X_{k_1} \cdots X_{k_p}) = \prod_{s=1}^p E(X_{k_s}) = 0$$

при $1 \leq k_1 < \dots < k_p$, $p \leq m$, и для совместных функций распределения справедливо равенство

$$F_{X_{i_1}, \dots, X_{i_m}}(t_1, \dots, t_m) = \prod_{i=1}^m F_0(t_i) = F_{X_{i_1+k}, \dots, X_{i_m+k}}(t_1, \dots, t_m),$$

где $F_0(t)$ – функция распределения любого элемента системы.

2) Покажем, что для систем $W(N)$ m -мультипликативность влечет независимость по m -подсистемам. Обозначим $X_1 = w_{n_1}, \dots, X_m = w_{n_m}$. В рассматриваемом случае $X_j = X_j^3 = X_j^5 = \dots$, $1 = X_j^2 = X_j^4 = \dots$. Поэтому

$$\prod_{j=1}^m e^{it_j X_j} = \prod_{j=1}^m \left(1 + it_j X_j + \frac{(it_j X_j)^2}{2} + \dots \right) = \prod_{j=1}^m (\cos t_j + i X_j \sin t_j).$$

В силу m -мультипликативности характеристическая функция вектора $(X_1, \dots, X_m)$ равна произведению характеристических функций компонент:

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) = E \left(\prod_{j=1}^m e^{it_j X_j} \right) = \prod_{j=1}^m \cos t_j, \quad \cos t_j = E(e^{it_j X_j}).$$

Как известно, это свойство эквивалентно независимости величин $X_1, \dots, X_m$ (см. [6; с. 241]).

3) Пусть система $(X_k) = (w_{n_k})$ — m -стационарная. Покажем, что она m -мультипликативная. В противном случае найдутся такие функции $X_{k_1}, \dots, X_{k_s}$, $k_1 < \dots < k_s$, $s \leq m$, что

$$E(X_{k_1} \cdots X_{k_s}) \neq 0. \quad (2)$$

Так как каждая из функций X_k по определению является произведением каких-то функций из системы Радемахера и $r_k^2 \equiv 1$, выбрасывая из произведения пары одинаковых функций Радемахера, получим, что возможны два случая: или

$$X_{k_1} \cdots X_{k_s} = r_{l_1} \cdots r_{l_p}, \quad l_1 < \dots < l_p, \quad p \geq 1,$$

или п.в.

$$X_{k_1} \cdots X_{k_s} = 1, \quad E(X_{k_1} \cdots X_{k_s}) = 1.$$

Итак, из (2) следует, что нашлись такие индексы $1 \leq k_1 < \dots < k_s$, что выполнен второй случай, т.е. $X_{k_s} = X_{k_1} \cdots X_{k_{s-1}}$ п.в. и

$$E(X_{k_1} \cdots X_{k_s}) = 1. \quad (3)$$

Рассмотрим набор функций $R = (X_k, 1 \leq k \leq k_s)$. Покажем, что все функции $X_{k_1+1}, X_{k_1+2}, \dots$ выражаются через произведения функций из набора R . Из (3) и m -стационарности системы (X_k) следует, что при $p \geq 1$

$$E(X_{k_1+p} X_{k_2+p} \cdots X_{k_s+p}) = 1. \quad (4)$$

При $p = 1$ отсюда получаем, что $X_{k_s+1} = X_{k_1+1} \cdots X_{k_{s-1}+1}$. Но $k_i + 1 \leq k_s$, $1 \leq i \leq s-1$, и функции в правой части, а значит, и X_{k_s+1} , выражаются как произведения функций из набора R . Применяя снова (4), получим по индукции аналогичное утверждение и для всех функций $X_{k_s+2}, \dots$. Поскольку набор R конечен, в последовательности $(X_n, n \geq k_s)$ должны быть повторяющиеся функции. Это противоречит ортогональности системы (X_k) . Итак, система $W(N)$ является m -мультипликативной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если система m -мультипликативная для всех $m \geq 2$, то она слабо мультипликативная, а если система для всех $m \geq 2$ m -стационарная, то она стационарна в узком смысле. Поэтому теорема 1 является следствием теоремы 2.

Получим некоторые следствия о структуре множества индексов $N = (n_k)$ для независимых подсистем $W(N)$. Напомним следующее определение. В множестве целых неотрицательных чисел можно ввести сложение $m \oplus n$ по следующему правилу. Для заданной пары m и n можно считать, что при некотором p и некоторых ε_i, δ_i , принимающих значения 0 или 1, $m = \sum_{i=0}^p \varepsilon_i 2^i$, $n = \sum_{i=0}^p \delta_i 2^i$. Полагают

$$m \oplus n = \sum_{i=0}^p \eta_i 2^i, \quad \eta_i = |\varepsilon_i - \delta_i|.$$

Для любых функций Уолша $w_n w_m = w_{m \oplus n}$. В частности, $n \oplus n = 0$ и $w_n^2 = 1 = w_0$. Заметим также, что $m - n \leq m \oplus n \leq m + n$ при $m \geq n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем обозначать $N = (n_k) \in R$, если для любого набора $i_1 < \dots < i_p$, $p \geq 2$, выполнено соотношение $n_{i_1} \oplus \dots \oplus n_{i_p} > 0$. Условие R эквивалентно слабой мультипликативности системы $W(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем обозначать $N \in A_m$, если для любых наборов $i_1 < \dots < i_s$, $2 < s \leq m$, выполнено соотношение $n_{i_1} \oplus \dots \oplus n_{i_s} > 0$. Очевидно, что условие A_m эквивалентно m -мультипликативности соответствующей подсистемы $W(N)$.

Из теорем 1 и 2 вытекают такие утверждения.

ТЕОРЕМА 1'. Для независимости системы $W(N)$ необходимо и достаточно условие R .

ТЕОРЕМА 2'. Система $W(N)$ независима по любым m -подсистемам тогда и только тогда, когда $N \in A_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства видно, что теоремы 1, 2, 1', 2' сохраняют силу в том случае, если в системе $W(N)$ функции расположены в произвольном порядке.

Для приводимых далее утверждений нумерация Пэли существенна.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для независимости системы $W(N)$

а) достаточно условие

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq 2, \quad k \geq 1; \quad (5)$$

б) необходимо условие

$$n_k \geq 2^{k-1} \quad \text{при} \quad k \geq 1. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) При условии (5) для всех $i_1 < \dots < i_s$ имеем

$$n_{i_1} \oplus \dots \oplus n_{i_s} \geq n_{i_1} \left(1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2^{s-1}} \right) > 0.$$

б) Покажем, что условие R влечет соотношение (6). Пусть, напротив, при некотором $k \geq 3$

$$n_k \leq 2^{k-1} - 1. \quad (7)$$

Рассмотрим всевозможные суммы $\Sigma = \varepsilon_1 n_1 \oplus \dots \oplus \varepsilon_k n_k$, где $\varepsilon_i = 0, 1$, $\sum \varepsilon_i > 0$. Число таких сумм $2^k - 1$. Покажем, что каждая из них не превосходит $2^{k-1} - 1$. Действительно, $n_j \leq n_k \leq 2^{k-1} - 1$ при $j \leq k$. Значит, в двоичном представлении чисел n_j участвуют лишь двойки в степенях до $k-2$. По определению операции $\oplus$ в двоичном представлении числа Σ могут участвовать, как максимум, числа $1, 2, \dots, 2^{k-2}$, т.е. для любой такой суммы справедлива оценка $\Sigma \leq 2^{k-1} - 1$. Тогда среди этих сумм имеются совпадающие. Очевидно, это означает, что $n_{i_1} \oplus \dots \oplus n_{i_p} = 0$ при некоторых индексах $n_{i_1} < \dots < n_{i_p}$. Итак, предположение (7) влечет нарушение свойства R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для системы Радемахера все неравенства в следствии 1, б) обращаются в равенства. Из следствия 1, б) вытекает, что добавление еще одной функции Уолша к системе $(w_{2^{k-1}})$, конечно, нарушает независимость. Вообще, к системе Радемахера нельзя добавить ни одной функции, отличной от константы, с сохранением свойства независимости. Действительно, если (f, r_k) – независимая система, то для всех $k_1 < \dots < k_s$ имеем $E(fr_{k_1}, \dots, r_{k_s}) = 0$, т.е. f ортогональна всем функциям $(w_n, n \geq 1)$ и в силу полноты системы Уолша f – постоянная.

Условие (5) не является необходимым, а условие (6) не является достаточным для независимости.

ПРИМЕР. Существует последовательность $N = (n_k)$ такая, что выполнено необходимое условие (6) и

$$\lim \frac{n_{k+1}}{n_k} = 2, \quad (8)$$

но при любом k_0 система $(w_{n_k}, k \geq k_0)$ – зависящая.

Рассмотрим последовательность (n_k) , составленную из блоков Δ_s длины $s + 2$, $s = 1, 2, \dots$:

$$\Delta_1 = [2^4, 2^5, 2^4 + 2^5], \quad \Delta_2 = [2^7, 2^8, 2^9, 2^7 + 2^8 + 2^9], \quad \dots$$

Очевидно, что $n_k \geq 2^{k+2}$. Кроме того, отношения n_{k+1}/n_k около границ блоков равны $b_s = 1 + 1/2 + \dots + 1/2^s$ и $4(b_s)^{-1}$, т.е. условие (8) тоже выполнено. С другой стороны, функции $(w_{n_k}, k \in \Delta_s)$ зависимы, так как для соответствующих индексов $[m_1, m_2, \dots, m_{s+2}]$ по построению $m_1 \oplus \dots \oplus m_{s+2} = 0$.

Приведем несколько утверждений, относящихся к условию A_m , т.е. к m -мультипликативным системам.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если последовательность N состоит из нечетных чисел, то при любом нечетном M имеем $n_{i_1} \oplus \dots \oplus n_{i_M} > 0$, так как двоичное разложение этой суммы начинается с 1. В частности, последовательность $(n_k) = (2k - 1)$ удовлетворяет условию A_3 (и порождает 3-мультипликативную систему (w_{2k-1})). Итак, условие A_3 не налагает существенных ограничений на порядок роста чисел n_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если последовательность $(n_k) \in A_{2m}$ состоит из нечетных чисел, то $(n_k) \in A_{2m+1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. а) Если $(n_k) \in A_4$, то справедлива оценка $n_k \geq Ck^2$, $k \geq 1$. Более точно, при $k \geq 1$

$$n_k \geq \left\lceil \frac{k(k+1)}{4} \right\rceil + 1. \quad (9)$$

б) Если $(n_k) \in A_{2m}$, то при некоторой постоянной $C_m > 0$ справедлива оценка $n_k \geq C_m k^m$, $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем а) (тот же метод проходит и в общем случае). При $k = 1, 2$ оценка (9) очевидна. Пусть при некотором $M \geq 3$ она не выполняется, т.е. $n_M \leq [M(M+1)/4]$. Рассмотрим все числа вида n_k , $k \leq M$, $n_k \oplus n_j$, $1 \leq k < j \leq M$ (их количество $M(M+1)/2$). Каждое из них меньше, чем $2n_M \leq M(M+1)/2$. Значит, среди них есть совпадающие и свойство A_4 нарушено.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пользуясь известным методом (см. [7; с. 359]) и замечанием 4, можно показать, что существует $N \in A_5$, для которой $n_k = O(k^3)$, и существует $N \in A_{2m+1}$, для которой $n_k = O(k^{2m-1})$. Вероятно, эти оценки могут быть улучшены.

Во второй части статьи рассматривается обобщение полученных выше результатов на подсистемы периодических мультипликативных систем Виленкина (их определение и свойства см. в [7; с. 469]). Коротко напомним определения.

Пусть $p_0 = 1$, $m_0 = 1$, $(p_1, p_2, \dots)$ – набор простых чисел, $m_k = p_1 p_2 \dots p_k$, $k \geq 1$. Ортонормированная на $[0, 1]$ комплекснозначная система $(\chi_n(x), n \geq 0)$ определяется следующим образом. Полагают $\chi_0(x) = 1$. Пусть

$$m_{j-1} \leq n < m_j, \quad n = \sum_{j=1}^k \alpha_j m_{j-1}, \quad 0 \leq \alpha_j < p_j,$$

а

$$x \in (0, 1), \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad 0 \leq x_j < p_j.$$

Тогда

$$\chi_n(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right).$$

Очевидно, что

$$\chi_n(x) = \prod_{j=1}^k R_j^{\alpha_j}(x), \quad (10)$$

где система $(R_j(x))_1^\infty$ – аналог системы Радемахера,

$$R_j(x) = \chi_{m_{j-1}}(x) = \exp\left(2\pi i \frac{x_j}{p_j}\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Функции $R_j(x)$ принимают значения, равные корням p_j -й степени из 1 с вероятностями $1/p_j$, $\mathbb{E} R_j = 0$, $\mathbb{E} R_j^{p_j} = 1$ п.в. Как отмечено в [7], они образуют систему независимых функций. Система $(\chi_n(x))$ – полная ортонормированная система в $L^2[0, 1]$, $\mathbb{E} \chi_n = 0$, $n \geq 1$. Из определения системы $(\chi_n(x))$ следуют простые свойства, собранные в следующей лемме.

ЛЕММА. 1) Если $\mathbb{E} \chi_n \neq 0$, то $\mathbb{E} \chi_n = 1$, $\chi_n = 1$ п.в.

2) Представление (10) можно переписать в другом виде, отбрасывая в произведении те множители, для которых $\alpha_j = 0$:

$$\chi_n(x) = \prod_{k=1}^s R_{j_k}^{\alpha_k}(x), \quad 1 \leq \alpha_k < p_{j_k}. \quad (11)$$

3) Наименьший период Q_n функции $\chi_n(x)$ равен наименьшему общему кратному чисел $p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_s}$, $\chi_n^{Q_n} = 1$ п.в. Если все различные числа в наборе $(p_{j_1}, \dots, p_{j_s})$ обозначить через $q_1, q_2, \dots, q_l$, то $Q_n = q_1 q_2 \dots q_l$.

4) Функция $\chi_n(x)$ принимает значения, равные корням Q_n -й степени из 1 на множествах $E_k^n \subset (0, 1)$, $k = 0, 1, \dots, Q_n$, $P(E_k^n) = Q_n^{-1}$.

Пусть $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ и $X(N) = (\chi_{n_k})$ – подсистема этой системы. Нас будут интересовать, как и выше, условия независимости и стационарности системы $X(N)$. Далее удобно обозначать $Z_k = \chi_{n_k}$, $k \geq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Система $X(N)$ является независимой тогда и только тогда, когда для ее элементов Z_k выполнено условие

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n Z_j^{r_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(Z_j^{r_j}) \quad (12)$$

для всех $n \geq 2$ и всех целочисленных r_j .

ТЕОРЕМА 4. Пусть система $X(N)$ – независимая. Она является стационарной тогда и только тогда, когда все элементы Z_k имеют одинаковый наименьший период $Q \geq 2$. В этом случае будем говорить, что система $X(N)$ имеет период Q .

ТЕОРЕМА 5. Пусть стационарная система $X(N)$ имеет простой период Q . Тогда она – независимая.

ТЕОРЕМА 6. Среди стационарных систем $X(N)$, имеющих составной период Q , могут быть как зависимые, так и независимые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 проводится, в основном, так же, как доказательство теорем 1, 2. Однако нужно отметить некоторые особенности, связанные с комплекснозначностью Z_k . Система $Z_k = X_k + iY_k$, $k \geq 1$, называется *независимой*, если независима система векторов (X_k, Y_k) , $k \geq 1$. Это эквивалентно равенству характеристических функций: для всех $n \geq 2$ и для любых (t_k, s_k)

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(i \sum_{k=1}^n (t_k X_k + s_k Y_k) \right) \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E} (\exp i(t_k X_k + s_k Y_k))$$

(см. [6; с. 241]). Если $|Z_k| \leq C_k$ п.в., то разложение экспонент в ряды показывает, что это свойство эквивалентно равенству: для любых целых $k_j \geq 0$, $l_j \geq 0$

$$\mathbb{E}(X_1^{k_1} Y_1^{l_1} \dots X_n^{k_n} Y_n^{l_n}) = \prod_{s=1}^n \mathbb{E}(X_s^{k_s} Y_s^{l_s}). \quad (13)$$

Далее, свойство (13) эквивалентно свойству

$$\mathbb{E}(Z_1^{r_1} \bar{Z}_1^{s_1} \dots Z_n^{r_n} \bar{Z}_n^{s_n}) = \prod_{m=1}^n \mathbb{E}(Z_m^{r_m} \bar{Z}_m^{s_m}) \quad (14)$$

для любых целых $r_j \geq 0$, $s_j \geq 0$. Это легко проверить, обозначая $Z_j = R_j e^{i\Phi_j}$, $X_j = R_j \cos \Phi_j$, $Y_j = R_j \sin \Phi_j$. Наконец, для системы $X(N)$ имеем $|Z_k| = 1$, $\bar{Z}_k = Z_k^{-1}$ п.в., и поэтому (14) переписывается в виде (12). Так как все элементы Z_k имеют конечные периоды, числа r_j в этом условии можно считать неотрицательными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Для стационарности независимой системы (Z_k) необходима и достаточна одинаковая распределенность ее элементов. По утверждению 4) леммы это условие эквивалентно тому, что все элементы Z_k имеют один наименьший период Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть (Z_k) – стационарная подсистема, имеющая простой период Q . Покажем, что она независимая. В противном случае по теореме 3 найдутся такие числа $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s$, $l_1 > 0, \dots, l_s > 0$, $1 \leq l_j < Q$, что

$$\mathbb{E}(Z_{k_1}^{l_1} \dots Z_{k_s}^{l_s}) \neq \mathbb{E}(Z_{k_1}^{l_1}) \dots \mathbb{E}(Z_{k_s}^{l_s}) = 0. \quad (15)$$

Значит, по свойству 1) леммы почти всюду

$$Z_{k_1}^{l_1} \dots Z_{k_s}^{l_s} = 1. \quad (16)$$

Так как число Q – простое, найдется такое целое a , $1 \leq a < Q$, что $al_s \equiv -1 \pmod{Q}$. Возводя равенство (16) в степень a , получим, что почти всюду

$$Z_{k_s} = Z_{k_1}^{r_1} \dots Z_{k_{s-1}}^{r_{s-1}}, \quad \mathbb{E}(Z_{k_1}^{r_1} \dots Z_{k_{s-1}}^{r_{s-1}} Z_{k_s}^{-1}) = 1$$

при некоторых $k_1, \dots < k_s$, $1 \leq r_j < Q$. Из стационарности следует, что

$$E(Z_{k_1+p}^{r_1} \cdots Z_{k_{s-1}+p}^{r_{s-1}} Z_{k_s+p}^{-1}) = 1 \quad \text{для всех } p \geq 1,$$

а это влечет за собой, что почти всюду

$$Z_{k_s+p} = Z_{k_1+p}^{r_1} \cdots Z_{k_{s-1}+p}^{r_{s-1}} \quad \text{для всех } p \geq 1.$$

Из последнего свойства, как и в доказательстве теоремы 2, вытекает, что в системе $(Z_n, n \geq k_s)$ имеются повторяющиеся функции, что противоречит ее ортогональности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Проведем его сначала для $Q = 6$. 1) Пусть за основу конструкции системы $(\chi_n(x))$ взята последовательность

$$P_1 = (3, 2, 2, \dots), \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 6, \quad \dots, \quad m_k = 32^{k-1} \quad \dots$$

Тогда почти всюду $\chi_{m_1}^3 = 1$, $\chi_{m_k}^2 = 1$, $k \geq 2$. Положим $n_k = m_k m_{k+1}$, $k \geq 1$. Тогда $Z_1 = \chi_{m_1} \chi_{m_2}$, $Z_2 = \chi_{m_1} \chi_{m_3}$, $\dots$. Имеем $Z_1^2 Z_k^4 = 1$, но $E(Z_1^2) = 0$, $E(Z_k^4) = 0$. По теореме 3 система (Z_k) – зависящая. Докажем, что она – стационарная. Значения функции χ_{m_1} – это кубические корни из 1, т.е. η_1, η_2, η_3 , принимаемые с вероятностями $1/3$. По формуле полной вероятности, пользуясь независимостью и равномерностью системы $(\chi_{m_k}, k \geq 2)$, имеем: если γ_j – любые корни 6-й степени из 1, то для всех $p \geq 1$

$$\begin{aligned} P(Z_1 = \gamma_1, \dots, Z_k = \gamma_k) &= \sum_{l=1}^3 P(\chi_{m_1} = \eta_l) P\left(\chi_{m_2} = \frac{\gamma_1}{\eta_l}, \dots, \chi_{m_{k+1}} = \frac{\gamma_k}{\eta_l}\right) \\ &= \sum_{l=1}^3 P(\chi_{m_1} = \eta_l) \prod_{s=2}^{k+1} P\left(\chi_{m_s} = \frac{\gamma_{s-1}}{\eta_l}\right) \\ &= \sum_{l=1}^3 P(\chi_{m_1} = \eta_l) \prod_{s=2}^{k+1} P\left(\chi_{m_{s+p}} = \frac{\gamma_{s-1}}{\eta_l}\right) \\ &= P(Z_{p+1} = \gamma_1, \dots, Z_{p+k} = \gamma_k). \end{aligned}$$

2) Пусть теперь

$$P_2 = (3, 2, 3, 2, \dots), \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 6, \quad m_3 = 18, \quad \dots$$

Построим по этой последовательности мультипликативную систему (χ_n) . Подсистема с периодом $Q = 6$ вида $Z_1 = \chi_{m_1} \chi_{m_2}$, $Z_2 = \chi_{m_3} \chi_{m_4}$, $\dots$ является стационарной и независимой.

3) Если $Q = q_1 q_2 \cdots q_l$, где q_j – различные простые числа, то соответствующие примеры строятся аналогично. В качестве P_1 надо взять последовательность $(q_1, \dots, q_l, q_l, q_l, \dots)$, при этом $\chi_{n_k} = \chi_{m_1} \cdots \chi_{m_{l-1}} \chi_{m_{l-1}+k}$, $k = 1, 2, \dots$, – стационарная и зависящая подпоследовательность с периодом Q . Если же в конструкции за основу взять $P_2 = (q_1, \dots, q_l, q_1, \dots, q_l, \dots)$, то подпоследовательность $\chi_{n_1} = \chi_{m_1} \cdots \chi_{m_l}$, $\chi_{n_2} = \chi_{m_{l+1}} \cdots \chi_{m_{2l}}$, $\dots$ – стационарная и независимая с периодом Q .

В заключение рассмотрим периодические мультипликативные системы, для которых все простые числа $p_1, p_2, \dots$ одинаковы,

$$p_n = p, \quad n \geq 1 \quad (17)$$

(при $p = 2$ получается система Уолша).

ТЕОРЕМА 7. Если выполнено условие (17), то для подсистем $X(N) = (\chi_{n_k})$ независимость и стационарность эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 3 и 5.

Отметим такой аналог следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнено условие (17). Для независимости системы $X(N)$ достаточно, чтобы $n_{k+1}/n_k \geq p$, $k \geq 1$, и необходимо, чтобы $n_k \geq p^{k-1}$, $k \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для подсистем непериодической мультипликативной тригонометрической системы $(e^{2\pi i n x})$ в $L^2(0, 1)$ дело обстоит иначе. Любая пара функций $Z_n = e^{2\pi i n x}$ и $Z_m = e^{2\pi i m x}$ при $n \neq m$ является зависимой, так как $E(Z_n^m \bar{Z}_m^n) = 1$ (хотя существуют бесконечные лакунарные подсистемы “почти независимые” в различных смыслах). С другой стороны, подсистемы вида $(e^{2\pi i a^k x}, k \in \mathbb{Z})$ при натуральном a , $a \geq 2$, являются стационарными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. B. Robertson, J. M. Womack, “A pairwise independent stationary stochastic process”, *Statist. Probab. Lett.*, **3**:4 (1985), 195–199.
- [2] R. E. A. C. Paley, “A remarkable series of orthogonal functions. I”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **34**:1 (1932), 241–264; “A remarkable series of orthogonal functions. II”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **34**:1 (1932), 265–279.
- [3] Н. Я. Виленкин, “К теории лакунарных ортогональных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:3 (1949), 245–252.
- [4] G. W. Morgenthaler, “On Walsh–Fourier series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84**:2 (1957), 472–507.
- [5] В. Ф. Гапошкин, “Лакунарные ряды и независимые функции”, *УМН*, **21**:6 (1966), 3–82.
- [6] М. Лозев, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962.
- [7] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.

В. Ф. Гапошкин

Московский государственный университет путей сообщения
(МИИТ)

E-mail: gaposhkin@hotmail.com

Поступило

26.06.2008