Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Тараканов, О максимальных паросочетаниях в n -мерном кубе, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 3, 454–465

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 05:49:05

УДК 517

О МАКСИМАЛЬНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЯХ В n -МЕРНОМ КУБЕ

В. Е. Тараканов

Решается задача эффективного нахождения максимальных паросочетаний в n -мерном кубе, имеющая применение в теории кодирования. Дается способ нахождения такого паросочетания при нечетном n (теорема 2). Этот способ основан на построении в явном виде (теорема 1) таких отображений множества всех вершин, которые индуцируют наибольшие паросочетания во всяком двудольном подграфе n -мерного куба при любом n .

Библиография: 3 названия.

В работе решается одна из известных задач экстремальной комбинаторики. Рассматривается множество

$$V_n = \{(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}\} \quad (1)$$

всех n -мерных $(0, 1)$ -векторов, называемое *n -мерным кубом*. На V_n как на множестве вершин задается графовая структура: векторы x и y из V_n смежны тогда и только тогда, когда все, кроме одной, их координаты совпадают (другими словами, когда $d(x, y) = 1$, где d – расстояние Хэмминга). Таким образом, множество

$$E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V_n, d(x, y) = 1\} \quad (2)$$

представляет собой множество всех ребер n -мерного куба; условием (2) (вместе с (1)) полностью определена графовая структура V_n .

На V_n естественным способом можно задать групповую операцию и умножение на 0 и 1, которые превращают его в векторное пространство над полем $F = GF(2)$ из двух элементов. Соответствие

$$x = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in V_n \iff x(z) = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i z^i \quad (3)$$

есть взаимно однозначное соответствие между V_n и множеством $F^{(n-1)}[z]$ всех многочленов степени не выше $n - 1$ от неизвестной z , сохраняющее сложение элементов. Фиксируя это соответствие, мы постоянно будем представлять $x \in V_n$ соответствующим многочленом из (3).

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ведущих научных школ Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96135.

Далее мы используем графовую терминологию из [1]. *Паросочетанием* в графе G назовем любое независимое множество его ребер. Паросочетание M *максимально*, если его нельзя дополнить никаким ребром. *Наибольшим* называется максимальное паросочетание, содержащее наибольшее возможное число ребер. Число $\beta_1(G)$ ребер в наибольшем паросочетании графа G называется *реберным числом независимости* и является одной из основных теоретико-графовых констант. Экстремальная задача о паросочетаниях для различных классов графов – это

- 1) определение или оценка числа $\beta_1(G)$ для графов G данного класса и
- 2) построение алгоритмов для нахождения максимальных паросочетаний.

Как 1), так и, в особенности, 2) имеют эффективное решение лишь в отдельных частных случаях. Задача о максимальных паросочетаниях в n -мерном кубе представляет интерес в связи с построением корректирующих кодов (см. [2]). Мы представим здесь эффективный алгоритм нахождения максимального паросочетания в графе V_n при любом нечетном $n \geq 3$. Весом $w(x)$ вектора $x \in V_n$ назовем число его ненулевых координат. Через $V_n^{(k)}$ обозначим совокупность всех векторов веса k . Ясно, что $V_n = \bigcup_{k=0}^n V_n^{(k)}$. Очевидно, что в V_n могут быть смежны лишь векторы x, y такие, что $x \in V_n^{(k)}$, $y \in V_n^{(k+1)}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Через $[\alpha]$ обозначаем целую часть вещественного числа α .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть k – целое число в отрезке $[0, n-1]$, G_k – подграф графа V_n с множеством вершин $V_n^{(k)} \cup V_n^{(k+1)}$. Справедливо

$$\beta_1(G_k) = \begin{cases} \binom{n}{k}, & k < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ \binom{n}{k+1}, & k > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

где β_1 – число реберного покрытия графа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, G_k – двудольный граф без изолированных вершин. Для такого графа число α_0 вершинного покрытия равно величине его меньшей доли. Но по теореме Кенига [3] для всякого двудольного графа G числа $\alpha_0(G)$ и $\beta_1(G)$ совпадают, и мы получаем наше утверждение.

Перейдем теперь к построению эффективного алгоритма нахождения наибольшего паросочетания в графах G_k при $k < [n/2]$. Воспользуемся представлением (3) для вершин V_n . Расположим многочлены из $F^{(n-1)}[z]$, имеющие одинаковое число ненулевых коэффициентов (а, следовательно, и векторы с одинаковым весом), в лексикографическом порядке. А именно, для данных двух таких элементов

$$x_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x_1) z^i \quad \text{и} \quad x_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x_2) z^i$$

считаем $x_1 > x_2$, если либо $\varepsilon_0(x_1) > \varepsilon_0(x_2)$, либо для некоторого $l \geq 0$ $\varepsilon_k(x_1) = \varepsilon_k(x_2)$, $k = 0, 1, \dots, l$, $\varepsilon_{l+1}(x_1) > \varepsilon_{l+1}(x_2)$.

АЛГОРИТМ. Строим однозначное соответствие $\varphi: V_n^{(k)} \rightarrow V_n^{(k+1)}$, беря последовательно элементы из $V_n^{(k)}$ во введенном нами лексикографическом порядке (по убыванию) и действуя по правилу: для $x = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x) z^i$ пусть

$$\varphi(x) = z^j + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x) z^i = z^j + x, \quad (4)$$

где j – наименьшее среди чисел k со свойствами:

- а) $\varepsilon_k(x) = 0$;
- б) $z^k + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x) z^i \neq \varphi(x')$ для $x' > x$.

Мы установим в последующем, что:

- 1) действуя по алгоритму, мы действительно придем к наибольшему паросочетанию в G_k ;
- 2) значение $\varphi(x)$ может быть найдено непосредственно по x , без всякой информации о значениях $\varphi(x')$ для $x' > x$.

Свойство 2) обеспечивает эффективность сформулированного выше алгоритма.

Будем рассматривать конечные последовательности натуральных чисел. Множество всех таких последовательностей обозначаем через N .

Последовательность

$$B = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta) \quad (5)$$

из N называется *сбалансированной*, если

$$\sum_{i=\alpha_1}^{\beta} (b_i - 2) \leq 0 \quad (6)$$

для любого α_1 такого, что $\alpha \leq \alpha_1 \leq \beta$. Обозначим через $\Sigma(B)$ для $B \in N$ из (5) сумму (6) при $\alpha_1 = \alpha$.

Примеры сбалансированных последовательностей $B \in N$:

- а) $(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$;
- б) $(2, 4, 1, 2, 1)$;
- в) $(6, 1, 2, 2, 1, 1, 5, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 2)$.

Последовательность $B \in N$ из (5) называется *строго сбалансированной*, если она сбалансирована и $\Sigma(B) = 0$. Таким образом, строго сбалансирована последовательность

$$(2, 2, \dots, 2) \quad (7)$$

а в приведенных выше примерах – последовательность б); для а) и в) имеем $\Sigma(B) < 0$ и они не являются строго сбалансированными. Отметим некоторые простые свойства сбалансированных последовательностей, нужные для дальнейшего.

Свойство 1. Если $B = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta)$ из N сбалансирована, то $b_\beta \leq 2$.

Свойство 2. Пусть $B = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta)$, $B' = (b_{\beta+1}, b_{\beta+2}, \dots, b_{\beta'}) \in N$ и B сбалансирована. Тогда последовательность $BB' = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta, b_{\beta+1}, b_{\beta+2}, \dots, b_{\beta'})$ сбалансирована в том и только том случае, когда сбалансирована B' .

Свойство 3. Если последовательность $B = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta)$ из N сбалансирована, но не строго сбалансирована, то либо

- а) $b_\beta = 2$ и найдется минимальный индекс α_1 такой, что $b_{\alpha_1} = 1$ и $(b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_{\alpha_1})$ сбалансирована, а $(b_{\alpha_1+1}, b_{\alpha_1+2}, \dots, b_\beta)$ строго сбалансирована, либо
- б) $b_\beta = 1$ и $(b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_{\beta-1})$ сбалансирована (или пуста).

Действительно, обозначим

$$\Sigma_\gamma = \sum_{i=\gamma}^{\beta} (b_i - 2)$$

для целого γ из отрезка $[\alpha, \beta]$. Имеем $\Sigma_\alpha < 0$. Предположим, что найдется индекс α_1 такой, что $\Sigma_{\alpha'} < 0$ для всех $\alpha' \leq \alpha_1$ и $\Sigma_{\alpha_1+1} = 0$. Так как

$$\sum_{i=\alpha'}^{\beta} (b_i - 2) = \sum_{i=\alpha'}^{\beta} (b_i - 2) - \Sigma_{\alpha_1+1} \leq 0$$

для всех α' , $\alpha \leq \alpha' \leq \alpha_1$, то последовательность $(b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_{\alpha_1})$ сбалансирована. Далее, $(b_{\alpha_1+1}, \dots, b_\beta)$ сбалансирована и $\Sigma_{\alpha_1+1} = 0$, поэтому она строго сбалансирована. Наконец, из $\Sigma_{\alpha_1} < 0$, $\Sigma_{\alpha_1+1} = 0$ следует, что $b_{\alpha_1} - 2 = -1$, т.е. $b_{\alpha_1} = 1$.

Предположим теперь, что $\Sigma_{\alpha_1} < 0$ для любого α_1 , $\alpha \leq \alpha_1 \leq \beta$. Тогда $b_\beta = 1$. Если $\alpha < \beta$ (т.е. множество $(b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_{\beta-1})$ непусто), то для любого α_1 в отрезке $[\alpha, \beta-1]$ имеем

$$\sum_{i=\alpha_1}^{\beta-1} (b_i - 2) = \Sigma_{\alpha_1} - (b_\beta - 2) = \Sigma_{\alpha_1} + 1 \leq 0.$$

Таким образом, последовательность $(b_\alpha, \dots, b_{\beta-1})$ сбалансирована, и наше утверждение доказано.

Свойство 4. Если $B = (b_\alpha, b_{\alpha+1}, \dots, b_\beta) \in N$ сбалансирована, но не строго сбалансирована и $b_\beta = 1$, то при $\beta > \alpha$ последовательность $(b_\alpha, \dots, b_{\beta-1})$ сбалансирована.

Введем дополнительно несколько определений. Через $Z_n(m, <)$, $m \leq n$, обозначим совокупность всех множеств $(c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$, $c_i \in Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, упорядоченных по возрастанию: $c_0 < c_1 < \dots < c_{m-1}$. Для $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$ обозначим

$$C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_{m-1}), \quad \text{где } c'_k = c_k - c_{k-1}, k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (8)$$

Множество $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$ назовем *специальным*, если $m > 1$ и для него последовательность C' из (8) сбалансирована или если $m = 1$. Например, при $n = 11$, $m = 5$ множества $(0, 3, 6, 7, 8)$, $(2, 5, 6, 9, 10)$ специальные, а множества $(0, 1, 4, 7, 8)$ или $(3, 4, 5, 6, 9)$ специальными не являются.

Специальной частью для $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$ назовем его специальное подмножество $C^* = (c_0, c_1, \dots, c_{m^*})$ такое, что $(c_0, c_1, \dots, c_s)$ при $s > m^*$ не специально. Число $m^* = m^*(C)$ назовем *индексом специальности* для $C \in Z_n(m, <)$. Таким образом, для специального множества C (т.е. когда $m^*(C) = m-1$) и только для него его специальная часть совпадает с ним самим. Нахождение индекса специальности $m^*(C)$ для $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$ и соответствующего числа c_{m^*} сводится, очевидно, к несложным вычислениям по формуле (6) с элементами последовательности (8), построенной для C . Действительно, образуем подпоследовательности

$$(c'_1, c'_2, \dots, c'_s), \quad s = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Множество (c_0) специально по определению. Далее, для последовательностей из (9) с $s = 1, 2, \dots$ проверяем выполнение условий (6). Максимальное s , при котором (6) выполняются, и будет, очевидно, индексом специальности $m^*(C)$ – для него множество $(c_0, c_1, \dots, c_s)$ специально, а $(c_0, c_1, \dots, c_{s'})$ при $s' > s$ специальным быть не может. Итак, мы пришли к следующему результату.

Предложение 2. Пусть n – натуральное число, $m \in Z_n$, $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$. Обозначим $c''_i = c_i - c_{i-1} - 2$, $i = 1, \dots, m-1$. Тогда

$$m^* = \begin{cases} \max \left\{ s \mid \sum_{i=\alpha}^s c''_i \leq 0, \alpha = 0, 1, \dots, s \right\}, & \text{если такое } s \text{ существует,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (10)$$

где $m^* = m^*(C)$ – индекс специальности для C .

Сформулируем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть n – натуральное число, m – целое в отрезке $[2, [n/2]]$. Множество $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$ может быть специальным лишь при $c_{m-1} - c_0 \leq 2(m-1)$.

Доказательство. Действительно, по определению специального множества

$$c_{m-1} - c_0 = \sum_{k=1}^{m-1} c'_k \leq 2(m-1).$$

Пусть

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i(x) z^i$$

– элемент V_n в представлении (3). Если $w(x) = m$, то определим

$$S(x) = C = \{c_0, c_1, \dots, c_{m-1}\}, \quad (11)$$

где $C \in Z_n(m, <)$ – совокупность всех тех индексов i , для которых $\varepsilon_i(x) \neq 0$. Тогда имеем представление для $x \in V_n^{(m)}$:

$$x = \sum_{c_i \in S(x)} z^{c_i}, \quad (12)$$

где $S(x)$ определено в (11).

Перейдем теперь к детальному рассмотрению сформулированного выше алгоритма построения наибольшего паросочетания в подграфе G_k n -мерного куба V_n ($k \leq [n/2]$). Введем еще одно обозначение. Для $C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1}) \in Z_n(m, <)$ обозначим

$$\widehat{C}^{(i)} = (c_0, c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_{m-1}) \quad (13)$$

упорядоченное множество C , из которого удален элемент c_i ($0 \leq i \leq m-1$). Пусть также

$$r = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ нечетно,} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ четно.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – натуральное число, m – целое в отрезке $[1, r]$. Предположим, что задан вектор x веса m из V_n и $x = \sum_{c_i \in S(x)} z^{c_i}$ – его представление (12) ($S(x) = C = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$ определено в (11)). Пусть $m^* = m^*(S(x))$ – индекс специальности множества $S(x)$. Тогда определим

$$\psi(x) = \begin{cases} z^{c_{m^*+1}} + x, & \text{если } m^* < m-1 \text{ или } m^* = m-1 \text{ и } c_{m-1} < n-1, \\ 1 + x, & \text{если } m^* = m-1 \text{ и } c_{m-1} = n-1. \end{cases} \quad (14)$$

Если φ – соответствие, определяемое правилом (4), то значение $\varphi(x)$ определено и $\varphi(x) = \psi(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему (в целях большей прозрачности доказательства) лишь в “критическом” случае – для нечетного n и $m = r = (n-1)/2$. В остальных случаях доказательство проводится совершенно аналогично.

Итак, пусть $m = r$. Заметим прежде всего, что если множество C не специально (т.е. если $m^* < r-1$), то по свойству 1 $c_{m^*+1} - c_{m^*} \geq 3$ и, следовательно, $c_{m^*} + 1 \notin S(x)$. Ясно, что несколько начальных шагов при установлении соответствия φ всегда можно сделать и что при этом получается $\varphi(x) = \psi(x)$ для нескольких “самых больших” элементов из $V_n^{(r)}$. Далее применяем принцип математической индукции, предполагая, что при рассмотрении элемента x мы уже знаем, что $\varphi(y) = \psi(y)$ для всех $y > x$. Мы получим доказательство теоремы в виде следствия нескольких вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Пусть c – любое целое число в интервале (c_0, c_{m^*}) такое, что $c \notin S(x)$. Тогда найдется элемент $y \in V_n^{(r)}$ такой, что $\varphi(y) = \psi(y) = z^c + x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим k как наименьшее число такое, что $c_{k-1} < c < c_k$. Рассмотрим множества $D = (d_0, d_1, \dots, d_r)$ и $D^* = (d_0, d_1, \dots, d_{m^*+1})$, где

$$d_i = \begin{cases} c_i, & 0 \leq i \leq k-1, \\ c, & i = k, \\ c_{i-1}, & k+1 \leq i \leq m-1, \end{cases} \quad (15)$$

а также последовательность $(D^*)' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_{m^*+1})$, $d'_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m^* + 1$, определенную для множества D^* . Ясно, что D^* специально и $(D^*)'$ сбалансирована. Имеем

$$d'_{k+1} = c_k - c \leq c'_k - 1, \quad (16)$$

а также

$$d'_k - 2 + d'_{k+1} - 2 = c'_k - 4. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $(D^*)'$ не является строго сбалансированной.

Рассмотрим сбалансированную подпоследовательность $(d'_{k+1}, \dots, d'_{m^*+1})$ последовательности $(D^*)'$. Ввиду (16) она не является строго сбалансированной. По свойству 3 существуют всего две возможности:

А) найдется минимальный индекс $j \geq k + 1$ такой, что

а) $d'_j = 1$,

б) $(d'_{k+1}, \dots, d'_j)$ сбалансирована,

в) $(d'_{j+1}, \dots, d'_{m^*+1})$ строго сбалансирована;

Б) $d'_{m^*+1} = 1$ и $(d'_{k+1}, \dots, d'_{m^*})$ сбалансирована.

В случае Б) полагаем $j = m^* + 1$.

Разберем случаи А) и Б) по отдельности и покажем, что в каждом случае множество $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$ специально.

Случай А). Ввиду строгой сбалансированности последовательности $(d'_{j+1}, \dots, d'_{m^*+1}) = (c'_j, \dots, c'_{m^*})$ последовательности $(c'_1, \dots, c'_{j-1})$, $(c'_k, \dots, c'_{j-1})$ и соответственно $(d'_1, \dots, d'_j)$, $(d'_{k+1}, \dots, d'_j)$ сбалансированы.

Разберем по отдельности два случая.

А₁) $c'_k \geq 3$. Так как $c'_{j-1} = d'_j = 1$, $j \neq k + 1$, и имеем $j \geq k + 2$. Для сбалансированной подпоследовательности

$$(c'_{k+1}, c'_{k+2}, \dots, c'_{j-1}) \quad (18)$$

последовательности $(c'_k, \dots, c'_{j-1})$ справедливо

$$\sum_{i=k+1}^{j-1} (c'_i - 2) = \sum_{i=k}^{j-1} (c'_i - 2) - (c'_k - 2) \leq -1.$$

Следовательно, (18) не строго сбалансирована. Поэтому последовательность $(c'_{k+1}, \dots, c'_{j-2})$, если она непуста (что имеет место при $j \geq k + 3$), по свойству 4 является сбалансированной, т.е.

$$\sum_{i=\alpha}^{j-2} (c'_i - 2) \leq 0, \quad k + 1 \leq \alpha \leq j - 2.$$

Далее, ввиду сбалансированности $(c'_1, \dots, c'_{j-1})$ имеем при $1 \leq \alpha \leq k$

$$\sum_{i=\alpha}^{j-2} (c'_i - 2) = \sum_{i=\alpha}^{j-1} (c'_i - 2) - (c'_{j-1} - 2) \leq 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=\alpha}^{j-2} (c'_i - 2) \leq \begin{cases} 1, & 1 \leq \alpha \leq k, \\ 0, & k+1 \leq \alpha \leq j-2, \quad j \geq k+3. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая (16) и (17), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=\alpha}^{j-1} (d'_i - 2) &= -2 + \sum_{i=\alpha}^{j-2} (c'_i - 2) \leq -1, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \\ \sum_{i=k+1}^{j-1} (d'_i - 2) &\leq -1 + \sum_{i=k}^{j-2} (c'_i - 2) \leq 0, \\ \sum_{i=\alpha}^{j-1} (d'_i - 2) &= \sum_{i=\alpha-1}^{j-2} (c'_i - 2) \leq 0, \quad k+2 \leq \alpha \leq j-1. \end{aligned}$$

Тем самым, $\sum_{i=\alpha}^{j-1} (d'_i - 2) \leq 0$ для любого α , $1 \leq \alpha \leq j-1$. Таким образом, последовательность $(d'_1, \dots, d'_{j-1})$ сбалансирована и, следовательно, $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$ специально.

А₂) $c'_k = 2$. Если $j \geq k+2$, то (18) не может быть строго сбалансированной – в противном случае по свойству 2 была бы строго сбалансированной последовательность $(c'_{k+1}, \dots, c'_{m^*}) = (d'_{k+2}, \dots, d'_{m^*+1})$ и получилось бы противоречие с минимальностью j . Ввиду этого при $j \geq k+2$ мы можем вывести свойство специальности множества $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$, рассуждая в точности так же, как в А₁).

Пусть $j = k+1$. Последовательность $(d'_{k+2}, \dots, d'_{m^*+1})$ строго сбалансирована. Поэтому $(d'_1, \dots, d'_{k+1})$ сбалансирована, но не строго сбалансирована (иначе строго сбалансированной была бы $(D^*)'$), и при этом $d'_{k+1} = d'_j = 1$. По свойству 4 тогда сбалансирована последовательность $(d'_1, \dots, d'_k)$, и, таким образом, множество $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$ специально.

Случай Б). $d'_{m^*+1} = 1$, $(d'_{k+1}, \dots, d'_{m^*})$ сбалансирована. По условию (см. выше) $j = m^* + 1$. Так как $(D^*)'$ сбалансирована, но не строго сбалансирована и $d'_{m^*+1} = 1$, по свойству 4 $(d'_1, \dots, d'_{m^*})$ сбалансирована. Следовательно, $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$ специально.

Итак, мы показали, что как в случае А), так и в случае Б) $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$ специально. Рассмотрим теперь множество $\widehat{D}^{(j)}$ (см. (13)) и соответствующие последовательности

$$\begin{aligned} &(d'_1, d'_2, \dots, d'_{j-1}, d_{j+1} - d_{j-1}), \\ &(d'_1, d'_2, \dots, d'_{j-1}, d_{j+1} - d_{j-1}, d'_{j+2}, \dots, d'_p), \quad j+2 \leq p \leq r. \end{aligned} \tag{19}$$

Мы покажем, что специальная часть $\widehat{D}^{(j)}$ – это $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$.

Если $m^* = r-1$, т.е. $m^* + 1 = r$ и $d'_{m^*+1} = 1$, то свойство специальности множества $(d_0, d_1, \dots, d_{r-1})$ уже показано выше (см. случай Б)).

Далее пусть $m^* < r-1$. Заметим, что при любом p , $m^* + 1 < p \leq r$, последовательность $(d'_{m^*+2}, \dots, d'_p) = (c'_{m^*+1}, \dots, c'_{p-1})$ не сбалансирована – иначе (по свойству 2)

была бы сбалансирована $(c'_1, \dots, c'_{m^*}, c'_{m^*+1}, \dots, c'_{p-1})$, что противоречит $m^*(C) = m^*$. Нетрудно также заметить, что последовательность $(d_{j+1} - d_{j-1}, d'_{j+2}, \dots, d'_{m^*+1})$ не сбалансирована: при $j < m^* + 1$ это следует из строгой сбалансированности $(d'_{j+1}, d'_{j+2}, \dots, d'_{m^*+1})$; при $j = m^* + 1$ для единственного члена имеем $d_{j+1} - d_{j-1} = d_j - d_{j-1} + d_{j+1} - d_j \geq 4$. Поэтому каждая из последовательностей (19) имеет несбалансированный “хвост” (начиная с члена $d_{j+1} - d_{j-1}$) и, следовательно, сама не сбалансирована. Значит, соответствующие множества $(d_0, d_1, \dots, d_{j+1} - d_{j-1})$, $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1}, d_{j+1}, \dots, d_p)$, $j+2 \leq p \leq r$, не могут быть специальными, и во всех случаях специальная часть множества $\widehat{D}^{(j)}$ есть $(d_0, d_1, \dots, d_{j-1})$, т.е.

$$m^*(\widehat{D}^{(j)}) = j - 1. \quad (20)$$

Возьмем теперь элемент y с $S(y) = \widehat{D}^{(j)}$. Ясно, что $y \in V_n^{(r)}$ и что $y > x$. По предположению индукции и ввиду (20) $\varphi(y) = \psi(y) = z^{d_{j-1}+1} + y = z^{d_j} + 1$, так как $d_j - d_{j-1} = 1$. Так как $j \geq k+1$, имеем $d_j = c_{j-1}$. Тем самым, $\varphi(y) = \psi(y) = z^{c_{j-1}} + y = z^c + x$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $x = z^{c_0} + z^{c_1} + \dots + z^{c_{r-1}}$ — элемент из $V_n^{(r)}$ в представлении (12) с $S(x) = C = (c_0, c_1, \dots, c_{r-1})$, $m^*(S(x)) = m^*$ — индекс специальнос-ти $S(x)$. Если $y > x$, то $\varphi(y) \neq x + z^{c_{m^*+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, от противного, что $\varphi(y) = \psi(y) = z^{c_{m^*+1}} + x$ для некоторого $y > x$. Этот y может отличаться от x лишь двумя членами: в y входит $z^{c_{m^*+1}}$ и не входит z^c для некоторого $c \in S(x)$. При этом $c \neq c_0, c_1, \dots, c_{m^*}$ — иначе было бы $y < x$. Таким образом,

$$S(y) = C_1 = (c_0, c_1, \dots, c_{m^*}, c_{m^*} + 1, \dots, c_{r-1}) - \{c_k\}$$

для некоторого k , $m^* < k \leq r - 1$. Кроме того, согласно формуле (14):

$$\text{а) } c'_k = 1;$$

$$\text{б) множество } C_1^* = (c_0, c_1, \dots, c_{m^*}, c_{m^*} + 1, c_{m^*+1}, \dots, c_{k-1}) - \text{специальная часть } C_1.$$

Однако, если C_1^* специально, то последовательность $(c'_1, \dots, c'_{m^*}, 1, c_{m^*+1} - 1, \dots, c'_{k-1})$ сбалансирована; следовательно, сбалансированной будет также последовательность $(c_{m^*+1} - 1, c'_{m^*+2}, \dots, c'_{k-1})$. Но тогда, как непосредственно проверяется по (6), сбалансирована также последовательность $(c'_{m^*+1}, c'_{m^*+2}, \dots, c'_k)$. По свойству 2 отсюда следует сбалансированность последовательности $(c'_1, c'_2, \dots, c'_k)$, и множество $(c_0, c_1, \dots, c_k)$ оказывается специальным. Но ввиду $m^* < k$ это противоречит равенству $m^*(S(x)) = m^*$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Из лемм 2 и 3 теперь без труда получается утверждение теоремы в случаях, когда множество $S(x)$ не специально или когда оно специально и $c_{r-1} < n - 1$. В самом деле, согласно лемме 2 $\varphi(x)$ не может равняться $z^c + x$ при $c < c_{m^*}$, так как все такие значения “заняты” элементами $\varphi(y)$ при каком-либо $y > x$. Таким образом, согласно правилу (4) $\varphi(x) = z^{c_{m^*+1}} + x = \psi(x)$, если это значение еще не “занято”. Но по лемме 3 оно действительно “свободно”.

Рассмотрим теперь оставшийся случай, когда $S(x)$ специально и $c_{r-1} = n - 1$.

ЛЕММА 4. Пусть множество $C = (c_0, \dots, c_{r-1})$ с $c_{r-1} = n - 1$ специально и

$$x = \sum_{c_i \in C} z^{c_i} \in V_n^{(r)}.$$

Не существует элемента $y \in V_n^{(r)}$, $y > x$, для которого $\varphi(y) = \psi(y) = 1 + x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, от противного, такой y найдется. Тогда $S(y) = (C \cup \{0\}) - \{c\}$ для некоторого элемента $c \in C$; при этом $c - 1 \in C$ и $(0, c_0, c_1, \dots, c - 1)$ – специальная часть $S(y)$.

Предположим сначала, что $c = c_{r-1} = n - 1$. Тогда $S(y) = (0, c_0, c_1, \dots, c_{r-2})$ специально и $c_{r-2} = n - 2$. Однако по лемме 1 в любом специальном множестве наибольший элемент отстоит от наименьшего не более, чем на $n - 3$. Таким образом, $S(y)$ не может быть специальным.

Пусть $S(y)$ не специально. Также по лемме 1 $c_0 \geq 2$. Таким образом, $S(y) = (0, c_0, c_1, \dots, c_t, c_{t+2}, \dots, c_{r-1})$ для некоторого t , $1 \leq t < r - 2$, $c_0 \geq 2$, $c_{r-1} = n - 1$, $c_{t+1} - c_t = 1$, и множество $(0, c_0, c_1, \dots, c_t)$ – специальная часть $S(y)$; лишь в таком случае $\psi(y) = 1 + x$. Поэтому последовательность $C'_1 = (c_0, c'_1, \dots, c'_t)$ сбалансирована. Кроме того, ввиду специальности C сбалансирована также последовательность $C'_2 = (c'_{t+2}, \dots, c'_{r-1})$. Для C'_1 и соответственно C'_2 справедливы неравенства

$$c_0 - 2 + \sum_{i=1}^t (c'_i - 2) \leq 0, \quad \sum_{i=t+2}^{r-1} (c'_i - 2) \leq 0.$$

Складывая неравенства и учитывая, что $c'_{t+1} = c_{t+1} - c_t = 1$, получаем $c_{r-1} - 1 \leq 2r - 2$ или $c_{r-1} \leq n - 2$, что противоречит условию $c_{r-1} = n - 1$. Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что при специальном множестве $S(x)$ вида $(c_0, c_1, \dots, c_{r-2}, n - 1)$, действуя по правилу 4, мы должны в качестве $\varphi(x)$ взять значение $1 + x = \psi(x)$. Этим завершается доказательство теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть n нечетно, $r = (n - 1)/2$. Формулой (14) устанавливается взаимно однозначное соответствие $x \rightarrow \psi(x)$ между множествами $V_n^{(r)}$ и $V_n^{(r+1)}$ всех n -мерных двоичных векторов весов r и $r + 1$ соответственно; при этом $d(x, \psi(x)) = 1$ для любого $x \in V_n^{(r)}$, где d – расстояние Хэмминга.

Если $y = \sum_{c_i \in D} z^{c_i}$ – представление $y \in V_n^{(r+1)}$ в виде (12), где $D = S(y)$, то

$$x = \psi^{-1}(y) = \sum_{c_i \in C} z^{c_i},$$

где $C = S(x) = \hat{D}^{(k)}$ и k – наибольший среди индексов l со свойствами: $c_l - c_{l-1} = 1$, $(c_0, c_1, \dots, c_{l-1})$ – специальное множество.

Утверждение непосредственно следует из формулы (14).

Формула (10) позволяет без труда вычислять индекс специальности для множества $S(x) = (c_0, c_1, \dots, c_{m-1})$, с помощью которого задается вектор $x \in V_n^{(m)}$ веса m , $1 \leq m \leq [n/2]$. Тем самым, по формуле (14) эффективно вычисляется образ $\psi(x) = \varphi(x)$ при рассматриваемом взаимно однозначном соответствии $V_n^{(m)} \rightarrow V_n^{(m+1)}$.

Применим полученные результаты к задаче эффективного нахождения максимального паросочета в n -мерном кубе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \geq 3$ – нечетное целое число, V_n – n -мерный куб с множеством ребер E (см. (1), (2)). В E можно эффективно построить максимальное паросочетание M_n , состоящее из m_n ребер, где

$$m_n = \begin{cases} \binom{n}{r} + \sum_{i=0}^{(r-2)/2} \binom{n}{2i} & \text{при } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \binom{n}{r} + \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \binom{n}{2i-1} & \text{при } n \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad r = \frac{n-1}{2}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В n -мерном кубе две вершины x и y могут быть соединены ребром лишь в том случае, когда $|w(x) - w(y)| = 1$. Строим максимальное паросочетание, используя найденное в теореме 1 отображение ψ , которое при $1 \leq m \leq r$ каждому $x \in V_n^{(m)}$ ставит в соответствие по формуле (14) элемент $\psi(x) \in V_n^{(m+1)}$. Доопределим отображение ψ на единственном элементе веса 0:

$$\psi(0) = 1. \quad (22)$$

Тем самым, ψ можно рассматривать как отображение $V_n^{(0)} \cup V_n^{(1)} \cup \dots \cup V_n^{(r)}$ в $V_n^{(1)} \cup V_n^{(2)} \cup \dots \cup V_n^{(r+1)}$. Определим теперь на V_n отображение $x \rightarrow \bar{x}$:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i z^i \rightarrow \bar{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{\varepsilon}_i z^i, \quad (23)$$

где $\bar{\varepsilon}_i = 1 - \varepsilon_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ясно, что если $w(x) = m$, то $w(\bar{x}) = n - m$, $m = 0, 1, \dots, n$. Пользуясь (22) и (23), распространим функцию $\psi(x)$ на элементы x веса $w(x) > n/2$:

$$\psi(x) = \overline{\psi(\bar{x})}; \quad (24)$$

при (24) $V_n^{(m)}$ отображается в $V_n^{(m-1)}$, $m = n-r, n-r+1, \dots, n$, и вновь $d(x, \psi(x)) = 1$.

Строим паросочетание M_n , беря при $n \equiv 1 \pmod{4}$ ребра $(x, \psi(x))$ для всех $x \in V_n^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, r/2$, и для всех $x \in V_n^{(2i+1)}$, $i = r/2 + 1, r/2 + 2, \dots, r$. При $n \equiv 3 \pmod{4}$ берем $(x, \psi(x))$ для всех $x \in V_n^{(2i-1)}$, $i = 1, 2, \dots, (r+1)/2$, и для всех $x \in V_n^{(2i)}$, $i = (r+3)/2, (r+5)/2, \dots, r$. В полученных множествах M_n любая пара ребер не имеет общих концов, поэтому M_n – действительно паросочетание. Оно является максимальным. В самом деле, пусть (x, y) – любое ребро из $E - M_n$, $x \in V_n^{(m)}$, $y \in V_n^{(m+1)}$, $0 \leq m \leq n-1$. Очевидно, что один из концов ребра (x, y) принадлежит одному из тех множеств $V_n^{(k)}$, которые были взяты нами при построении M_n . Скажем, если $n \equiv 1 \pmod{4}$, $x \in V_n^{(r+1)}$, $y \in V_n^{(r+2)}$, то в M_n обязательно найдется ребро (u, x) , где $u = \psi^{-1}(x) \in V_n^{(r)}$. Таким образом, паросочетание M_n действительно максимально. При $n \equiv 1 \pmod{4}$ оно состоит из

$$\binom{n}{r} + \sum_{i=0}^{r/2-1} \binom{n}{2i} + \sum_{i=r/2+1}^r \binom{n}{2i+1} = \binom{n}{r} + 2 \sum_{i=0}^{r/2-1} \binom{n}{2i}$$

ребер. При $n \equiv 3 \pmod{4}$ M_n состоит из

$$\binom{n}{r} + \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \binom{n}{2i-1} + \sum_{i=(r+3)/2}^{n-1} \binom{n}{2i} = \binom{n}{r} + 2 \sum_{i=1}^{(r-1)/2} \binom{n}{2i-1}$$

ребер.

Значение $\psi(x)$ вычисляется по x с помощью формул (10) и (14) за время, полиномиально зависящее от n . Тем самым, M_n находится эффективно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для реберного числа независимости $\beta_1(V_n)$ n -мерного куба V_n при данном нечетном $n \geq 3$ справедливо неравенство

$$\beta_1(V_n) \geq m_n,$$

где m_n – число из (21).

В заключение отметим, что аналогичный теореме 2 результат для четного n требует, по-видимому, более детального рассмотрения множества образов элементов V_n при отображении ψ из теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
- [2] Камерон П., ван Линт Дж. Теория графов, теория кодирования и блок-схемы. М.: Наука, 1980.
- [3] König D. Graphen und Matrizen // Mat. Fiz. Lapok. 1931. V. 38. P. 116–119.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило
05.09.2000