Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Фоменко, О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 110–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:35:17

О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств

Т. Н. Фоменко

Решается задача построения на полном метрическом пространстве X алгоритма (вообще говоря, неоднозначного) последовательного приближения из любой точки пространства к заданному замкнутому подмножеству A . Дается оценка расстояния от произвольной начальной точки до соответствующих предельных точек. Рассматриваются три варианта подмножества A : (1) A – полный прообраз замкнутого подпространства H при отображении из X в метрическое пространство Y ; (2) A – множество точек совпадения n ($n > 1$) отображений из X в Y ; (3) A – множество общих неподвижных точек n отображений X в себя ($n = 1, 2, \dots$). Рассматриваемые задачи удобно формулируются в терминах мульти-каскада, т.е. обобщенной дискретной динамической системы с фазовым пространством X , полугруппой сдвигов, равной аддитивной полугруппе неотрицательных целых чисел, и предельным множеством A . В частности, в случае (2) при $n = 2$ получено обобщение теоремы А.В. Арутюнова о совпадениях двух отображений. В случае (3) при $n = 1$ получается обобщение принципа сжимающих отображений.

Библиография: 6 названий.

*Посвящаю светлой памяти
моей дорогой и горячо любимой мамы
Щёлоковой Александры Матвеевны
(26.04.1920–17.01.2009)*

Введение. Пусть (X, ρ) , (Y, d) – метрические пространства, причем X полно в метрике ρ . Рассматривается задача построения на X алгоритма, позволяющего из любой точки $x \in X$ с помощью итерационного процесса (вообще говоря, неоднозначного) последовательно приблизиться к некоторой точке $\xi = \xi(x) \in A$, где $A \subset X$ – заданное замкнутое подмножество. При этом не предполагается единственность предельной точки $\xi(x)$. Дается оценка расстояния $\rho(x, \xi(x))$. В работе рассматриваются три варианта подмножества A и, соответственно, три возникающие задачи:

- (1) $A = F^{-1}(H) = \{x \in X \mid F(x) \in H\}$ – полный прообраз некоторого замкнутого подпространства $H \subset Y$ при отображении $F: X \rightarrow Y$;
- (2) $A = \text{Coin}(f_1, \dots, f_n) = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_n(x)\}$ – множество точек совпадения n ($n > 1$) отображений $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$;

(3) $A = \text{Comfix}(f_1, \dots, f_n) = \{x \in X \mid f_1(x) = \dots = f_n(x)\}$ – множество общих неподвижных точек n ($n > 1$) отображений пространства X в себя.

В отличие от ряда работ, связанных с задачей об общей неподвижной точке (см., например, [1]–[4]), на рассматриваемые отображения не накладывается каких-либо условий коммутативности или близких к ним.

Отметим, что результаты, полученные при решении задачи (2), при $n = 2$ дают обобщение одной недавней теоремы Арутюнова о совпадениях двух отображений [5; теорема 1].

Следует отметить, что рассматриваемые задачи и полученные результаты удобно формулируются в терминах дискретных динамических систем. Под *дискретной динамической системой* с фазовым пространством X и полугруппой сдвигов $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, +)$ понимают произвольное действие этой полугруппы на X , т.е. когда на X задана полугруппа отображений $\{G^n\}_{n=0,1,\dots}$, где $G^0 := \text{id}_X$. Такая динамическая система называется *каскадом*¹ на X . Здесь мы будем использовать термин *мульти-каскад*, имея в виду его многозначный вариант. Оператор сдвига $G = G^1: X \rightarrow X$, представляющий образующий элемент $1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, называется *генератором* каскада. В случае мульти-каскада этот оператор, вообще говоря, многозначен. Таким образом, фактически задача, сформулированная выше, – это задача построения мульти-каскада на пространстве X с заданным предельным множеством A . Иными словами, построение мульти-каскада означает задание некоторого, вообще говоря, неоднозначного, отображения (генератора каскада) $G: X \rightarrow X$ – итерации которого, примененные к любой точке $x \in X$, задают начинающуюся из x сходящуюся последовательность (также, вообще говоря, неоднозначную), предел которой есть элемент предельного множества этого каскада, т.е. заданного подмножества A . Ниже мы будем пользоваться также и этой терминологией.

1. Приближение к прообразу подпространства. Пусть (X, ρ) , (Y, d) – метрические пространства, причем X полно. Пусть H – замкнутое подпространство в Y . Обозначим через $B_r(x)$ замкнутый шар радиуса $r = r(x)$ с центром в точке $x \in X$ по метрике ρ (или соответственно в точке $x \in Y$ по метрике d).

ТЕОРЕМА 1. Пусть в описанных условиях $F: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Пусть существуют числа α, β , $0 < \beta < \alpha$ такие, что для любого $x \in X$ в шаре радиуса $r = r(x) = d(F(x), H)/\alpha$ найдется точка x' такая, что

$$d(F(x'), H) \leq \frac{\beta}{\alpha} d(F(x), H).$$

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = F^{-1}(H) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает $\rho(F(x_0), H)/(\alpha - \beta)$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада, (и вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что ее предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X, \quad F(\xi) \in H,$$

¹Удачный термин *каскад* предложен Д. В. Аносовым.

причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\rho(F(x_0), H)}{\alpha - \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим искомую последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ следующим образом. Пусть $x_0 \in X$ – произвольная точка. Если $y_0 = F(x_0) \in H$, то все ясно (достаточно взять постоянную последовательность). Если же $y_0 \notin H$, то положим $d_0 = d(F(x_0), H) > 0$. По условию теоремы существует точка $x_1 \in B_{d_0/\alpha}(x_0)$, для которой $d_1 = d(F(x_1), H) \leq (\beta/\alpha) d_0$. (Возможно, такая точка не единственна. Выберем любую из таких точек.) Далее по индукции: если выбрана точка $x_m \in X$, $d_m = d(F(x_m), H) > 0$, то следующая точка x_{m+1} выбирается так, что

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{d_m}{\alpha} \quad \text{и} \quad d_{m+1} = d(F(x_{m+1}), H) \leq \frac{\beta}{\alpha} d_m.$$

Следовательно, в итоге $d_{m+1} \leq (\beta/\alpha)^{m+1} d_0$.

Теперь оценим расстояние между соседними точками полученной последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$. По построению

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{d_m}{\alpha} = \frac{d_0}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Поэтому последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна и, следовательно, так как X полно, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X$. В силу непрерывности отображения F и метрики d расстояние

$$d(F(\xi), H) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(F(x_m), H) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_m \leq d_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m = 0.$$

Следовательно, $F(\xi) \in H$, так как H замкнуто. Итак, точка $\xi \in F^{-1}(H)$, что и требовалось.

Оценим расстояние между исходной точкой x_0 и найденной точкой ξ . Подставляя оценку (1) и пользуясь неравенством треугольника и формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, находим

$$\begin{aligned} \rho(x_0, \xi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \rho(x_{k-1}, x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{k-1}, x_k) \\ &\leq \frac{d_0}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{d_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{d_0}{\alpha - \beta}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В частности, если подпространство $H = \{h\}$ – фиксированная точка $h \in Y$, то теорема 1 дает достаточные условия приближения к корню уравнения: $F(x) = h$.

2. Приближение к точкам совпадения N отображений ($N > 1$). Важным частным случаем рассмотренной выше задачи о приближении к прообразу подпространства является проблема приближения к точке совпадения заданного набора n отображений $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$. В самом деле, эта задача равносильна задаче о приближении к диагонали

$$\Delta_n \subset \underbrace{Y \times \dots \times Y}_n = Y^n$$

для отображения $F = f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y^n$. Сформулируем в виде теоремы этот частный вариант теоремы 1, полагая метрику D в Y^n , заданной по формуле

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i), \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы непрерывные отображения $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$, и существуют числа α, β , $0 < \beta < \alpha$, такие, что для любого $x \in X$ в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = r(x) = D(F(x), \Delta_n)/\alpha$ найдется точка x' такая, что

$$D(F(x'), \Delta_n) \leq \frac{\beta}{\alpha} D(F(x), \Delta_n). \quad (2)$$

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = \text{Coin}(f_1, \dots, f_n) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает $D(F(x_0), \Delta_n)/(\alpha - \beta)$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (вообще говоря, не единственная), последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что ее предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X, \quad f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi),$$

причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теоремы 1.

С точки зрения теоремы 2 представляет интерес отыскание достаточных условий на отображения $f_1, \dots, f_n$, обеспечивающих условие теоремы. Поэтому полезно получить оценки на расстояние до диагонали от любой точки $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$. Приведем такие оценки в следующей лемме.

ЛЕММА 1. Для произвольного элемента $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$, $n \geq 2$, обозначим

$$\tilde{D}(y) = \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(y_i, y_j).$$

Справедлива следующая оценка:

$$\tilde{D}(y) \leq D(y, \Delta_n) \leq \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(y). \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{D}(y) &= \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} d(y_i, y_j) \leq \frac{1}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (d(y_i, z) + d(z, y_j)) \\ &= \sum_{i=1}^n d(y_i, z) = D(y, Z), \end{aligned}$$

где $Z = (z, \dots, z) \in \Delta_n$ для любого $z \in Y$. Таким образом, $\tilde{D}(y) \leq D(y, \Delta_n)$.

С другой стороны, для $Y_k = (y_k, \dots, y_k)$ имеем неравенство

$$D(y, \Delta_n) \leq D(y, Y_k) = \sum_{i=1}^n d(y_i, y_k) = \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d(y_k, y_i), \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем

$$D(y, \Delta_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{1 \leq i \leq n, i \neq k} d(y_i, y_k) = \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(y).$$

Лемма доказана.

Заметим, что при $n = 2$ из приведенной оценки следует очевидное равенство $D(y, \Delta_2) = \tilde{D}(y) = d(y_1, y_2)$.

Применяя оценку (3), можно несколько усилить неравенство (2) в теореме 2, сделав его “более легко проверяемым”. Получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть заданы непрерывные отображения $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$, $F = f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y^n$, и существуют числа α, β , $0 < \beta < \alpha$, такие, что для любого $x \in X$ в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = r(x) = \tilde{D}(F(x))/\alpha$ найдется точка x' такая, что

$$\tilde{D}(F(x')) \leq \frac{\beta n}{2\alpha(n-1)} \tilde{D}(F(x)). \quad (4)$$

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = \text{Coin}(f_1, \dots, f_n) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает

$$\frac{\tilde{D}(F(x_0))2(n-1)}{2\alpha(n-1) - \beta n}.$$

Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (и, вообще говоря, не единственная), последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что ее предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X, \quad f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi),$$

причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\tilde{D}(F(x_0))2(n-1)}{2\alpha(n-1) - \beta n}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу оценки (3) из неравенства (4) следует неравенство (2). Таким образом, утверждение теоремы 3 о существовании последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, сходящейся к некоторой точке $\xi \in X$, для которой $f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi)$, вытекает из теоремы 2 и леммы 1 с соответствующей оценкой на расстояние $\rho(x_0, \xi)$, указанной в теореме 2. Однако при помощи неравенства (4) искомую последовательность, начинающуюся из произвольной точки x_0 пространства X , можно построить чуть иначе. А именно, если уже выбрана точка $x_m \in X$,

то следующую точку x_{m+1} возьмем в шаре $B_r(x_m)$ радиуса $r = r(x) = \tilde{D}(F(x_m))/\alpha$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\tilde{D}(F(x_{m+1})) \leq \frac{n\beta}{2\alpha(n-1)} \tilde{D}(F(x_m)).$$

Отсюда индуктивно получаем, что

$$\tilde{D}(F(x_{m+1})) \leq \left(\frac{n\beta}{2\alpha(n-1)} \right)^{m+1} \tilde{D}(F(x_0)),$$

где $n\beta/(2\alpha(n-1)) < 1$ при $\beta < \alpha$ и $n > 1$. Тогда

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leq \frac{\tilde{D}(F(x_m))}{\alpha} \leq \frac{\tilde{D}(F(x_0))}{\alpha} \left(\frac{n\beta}{2\alpha(n-1)} \right)^m.$$

Отсюда видно, что построенная последовательность фундаментальна и, следовательно, в полном пространстве X существует ее предел $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X$. Оценим расстояние от исходной точки x_0 до найденной точки ξ :

$$\begin{aligned} \rho(x_0, \xi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \rho(x_k, x_{k+1}) \\ &\leq \frac{\tilde{D}(F(x_0))}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n\beta}{2\alpha(n-1)} \right)^k = \frac{\tilde{D}(F(x_0))2(n-1)}{2\alpha(n-1) - \beta n}. \end{aligned}$$

Таким образом, получена требуемая оценка (5). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что при $n = 2$ как формулировки теорем 2 и 3, так и оценки расстояния $\rho(x_0, \xi)$ совпадают, поскольку в этом случае, как уже отмечалось выше, $D(F(x_0), \Delta_n) = \tilde{D}(F(x_0))$.

Рассмотрим теперь при $n = 2$ связь теоремы 2 (и совпадающей с ней в этом случае теоремы 3) с теоремой Арутюнова [5; теорема 1], которую приведем ниже в удобных обозначениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $F: X \rightarrow Y$ называется λ -накрывающим, если существует такое $\lambda > 0$, что для любого $r > 0$ и любого $x \in X$ верно включение $B_{\lambda r}(F(x)) \subseteq F(B_r(x))$.

ТЕОРЕМА 4 [5; теорема 1]. Пусть X, Y – метрические пространства и X полно. Пусть $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ – произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является λ -накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой γ , $0 < \gamma < \lambda$. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что $f_1(\xi) = f_2(\xi)$ и справедлива оценка

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\rho(f_1(x_0), f_2(x_0))}{\lambda - \gamma}. \quad (6)$$

Итак, условие λ -накрываемости для отображения f_1 в теореме Арутюнова означает, что верно включение: $B_{\lambda r}(f_1(x)) \subseteq f_1(B_r(x))$. Условие же теоремы 2 при $n = 2$

таково: для любого $x \in X$ найдется точка x' , $x' \in B_{d(f_1(x), f_2(x))/\alpha}(x)$, для которой выполнено соотношение

$$d(f_1(x'), f_2(x')) \leq \frac{\beta}{\alpha} d(f_1(x), f_2(x)). \quad (7)$$

В доказательстве теоремы 4 (т.е. теоремы 1 в [5]) на $(k+1)$ -м шаге построения искомой последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, начинающейся в x_0 и сходящейся к точке ξ , делается следующее. Рассматриваются точки $(f_1(x_k), f_2(x_k))$; в силу условия λ -накрываемости отображения f_1 существует точка $x_{k+1} \in X$ такая, что

$$\rho(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{d(f_1(x_k), f_2(x_k))}{\lambda}, \quad f_1(x_{k+1}) = f_2(x_k).$$

Тогда, в силу условия Липшица для f_2 , получается, что

$$d(f_1(x_{k+1}), f_2(x_{k+1})) = d(f_2(x_k), f_2(x_{k+1})) \leq \gamma \cdot \rho(x_k, x_{k+1}) \leq \frac{\gamma}{\lambda} d(f_1(x_k), f_2(x_k)).$$

Таким образом, в доказательстве теоремы 4 фактически используется неравенство

$$d(f_1(x_{k+1}), f_2(x_{k+1})) \leq \frac{\gamma}{\lambda} d(f_1(x_k), f_2(x_k)),$$

совпадающее с неравенством (7) при $\beta = \gamma$, $\alpha = \lambda$. Условия $0 < \beta < \alpha$ и $0 < \gamma < \lambda$ при этом также совпадают. Итак, из условий теоремы 4 вытекают все требования теоремы 2 при $n = 2$. Легко видеть, что оценки расстояния между начальной точкой x_0 и найденной точкой совпадения ξ в теореме 2 при $n = 2$ и в теореме 4 также совпадают. В самом деле, в теореме 2 при $n = 2$ эта оценка такова:

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\rho(f_1(x_0), f_2(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Взяв $\beta = \gamma$, $\alpha = \lambda$, получаем оценку (6) теоремы 4. Однако из условий теоремы 2 при $n = 2$ не следует, вообще говоря, ни одно из условий теоремы Арутюнова [5; теорема 1]. Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = [-1, +\infty)$ и $Y = [-2, +\infty)$. Отображения $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ зададим следующими формулами:

$$f_1(x) = \begin{cases} -(x+1), & 0 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^x - 1, & 0 \leq x, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -2(x+1), & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ 2x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^{2x} - 1, & 0 \leq x. \end{cases}$$

Ниже на рис. 1 изображены для наглядности графики этих функций. Легко видеть, что пространство X полно, и оба отображения непрерывны. Кроме того, оба отображения f_1, f_2 не являются ни накрывающими, ни липшицевыми. В самом деле, при $x > 0$, $\Delta x > 0$ имеем

$$\Delta f_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1) > e^x \cdot \Delta x.$$

Рис. 1. Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$

Отсюда видно, что не существует универсальной константы $K > 0$, при которой для всех $x \in X$ было бы выполнено условие Липшица: $|\Delta f| \leq K \cdot |\Delta x|$. Кроме того, отображение f_1 не является накрывающим, поскольку никакая окрестность точки $-1/2 = f_1(-1/2) \in Y$ не покрывается образом какой-либо окрестности точки $-1/2 \in X$. Очевидно, что теми же свойствами обладает и отображение f_2 .

Проверим теперь для этих отображений выполнение условий теоремы 2. Обозначим $d(x) = d(f_1(x), f_2(x)) = |f_1(x) - f_2(x)|$. Тогда

$$d(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ -x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^{2x} - e^x = e^x \cdot (e^x - 1) > e^x \cdot x > x, & 0 < x. \end{cases}$$

Возьмем $\alpha = 1$. Тогда $r(x) = d(x)/\alpha = d(x)$. Следовательно, окрестности радиуса $r = r(x)$ вокруг каждой точки x имеют вид

$$U_r(x) = (x-r; x+r) = \begin{cases} (-1; 2x+1), & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ (2x; 0), & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ (x-r; x+r) \supset (0; 2x), & 0 < x. \end{cases}$$

Далее, очевидно, что функция $d(x)$ непрерывна на X , строго монотонна на участках $[-1; -1/2]$, $[-1/2; 0]$ и $[0; +\infty)$, и $d(-1) = d(0) = 0$. Поэтому в указанных интервалах $U_r(x)$ для каждого x имеются целые отрезки, состоящие из точек x' таких, что выполнено неравенство $d(x') \leq d(x)/2$. Это означает, что функции f_1 , f_2 удовлетворяют всем условиям теоремы 2 при $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$.

Приведенный пример подтверждает, что теорема 2 является обобщением теоремы 4 [5; теорема 1] не только на случай любого конечного числа отображений, но даже и при $n = 2$.

Вернемся к рассмотрению случая n отображений, когда $n > 2$. Заметим, что совпадение n отображений $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$ равносильно совпадению двух отображений:

$$F = f_1 \times \dots \times f_{n-1}, G = f_2 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y^{n-1}.$$

Возникает вопрос: можно ли применить в этой ситуации теорему 4? Оказывается, что это невозможно в силу зависимости отображений F, G . В самом деле, для отображений F, G не могут выполняться одновременно все требования теоремы 4. Поясним это на примере трех отображений (для $n > 3$ комментарии аналогичны). Условие γ -липшицевости для отображения F означает, что для любых $x, x' \in X$,

$$D(F(x), F(x')) = d(f_1(x), f_1(x')) + d(f_2(x), f_2(x')) \leq \gamma \cdot \rho(x, x').$$

Условие накрываемости для отображения G означает, в частности, что для любого $y = (y_1, y_2) \in Y^2$, для которого

$$D(G(x), y) = d(f_2(x), y_1) + d(f_3(x), y_2) = r$$

существует такое $x' \in X$, что $\rho(x, x') \leq r/\lambda$, и $G(x') = y$, т.е. $y_1 = f_2(x')$, $y_2 = f_3(x')$. Взяв $y = (y_1, f_3(x))$, и $d(y_1, f_2(x)) = r$, получим, что

$$r = D(G(x), y) = d(f_2(x), f_2(x')) \leq \gamma \cdot \rho(x, x') \leq \frac{\gamma}{\lambda} \cdot r < r$$

(поскольку $\gamma < \lambda$) – противоречие. Итак, теорема Арутюнова не имеет прямого обобщения на случай $n > 2$.

Естественно рассмотреть аналогичный вопрос по отношению к теореме 2. Можно ли случай произвольного n в теореме 2 редуцировать к ситуации, когда $n = 2$? Пусть, как и выше,

$$F = f_1 \times \dots \times f_{n-1}, G = f_2 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y^{n-1}.$$

Наложим на эти два отображения условия теоремы 2 при $n = 2$. Получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть заданы n ($n \leq 2$) непрерывных отображений

$$f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$$

(нумерация фиксирована) и

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(f_i(x), f_{i+1}(x)).$$

Пусть существуют числа α, β , $0 < \beta < \alpha$, такие, что для любого $x \in X$ в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = r(x) = T(x)/\alpha$ найдется точка x' такая, что $T(x') \leq (\beta/\alpha)T(x)$.

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = \text{Coin}(f_1, \dots, f_n) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает $T(x_0)/(\alpha - \beta)$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся,

итерационная относительно генератора каскада (и вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots} \subset X$ такая, что ее предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X, \quad f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi),$$

причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{T(x_0)}{\alpha - \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является очевидным следствием теорем 2, 3 при $n = 2$. Стоит лишь заметить, что

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(f_i(x), f_{i+1}(x)) = D(F(x), G(x)) = D((F \times G)(x), \Delta_2)$$

есть расстояние от образа $(F \times G)(x)$ элемента $x \in X$ при отображении $F \times G: X \rightarrow Y^{n-1} \times Y^{n-1}$ до диагонали $\Delta_2 \subset Y^{n-1} \times Y^{n-1}$.

Приведем пример, показывающий, что условия теоремы 5 непротиворечивы.

ПРИМЕР 2. Пусть X и Y – те же пространства, которые описаны в примере 1. Рассмотрим три отображения, добавив к двум отображениям $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ из примера 1 еще одно отображение f_3 , которое зададим так:

$$f_3(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{2}, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ \frac{x}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^{x/2} - 1, & 0 \leq x. \end{cases}$$

При этом расстояние $d(x) = d(f_1(x), f_2(x))$ между образами отображений f_1, f_2 вычислено выше в примере 1. Вычислим расстояние $d'(x) = d(f_2(x), f_3(x))$ между образами отображений f_2, f_3 и метрический функционал $T(x) = d(x) + d'(x)$:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{3(x+1)}{2}, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{3x}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^{2x} - e^{x/2} = e^{x/2} \cdot (e^{3x/2} - 1) > e^{x/2} \cdot \frac{3x}{2} > \frac{3x}{2}, & 0 < x, \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{cases} \frac{5(x+1)}{2}, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{5x}{2}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ e^x(e^x - 1) + e^{x/2}(e^{3x/2} - 1) > e^x \cdot x + e^{x/2} \cdot \frac{3x}{2} > 2x, & 0 < x. \end{cases}$$

Возьмем $\alpha = 1$, $\tilde{r}(x) = T(x)/\alpha = T(x)$. Тогда окрестности радиуса $\tilde{r} = \tilde{r}(x)$ вокруг каждой точки x имеют вид

$$U_{\tilde{r}}(x) = (x - \tilde{r}; x + \tilde{r}) = \begin{cases} \left(-\frac{3x+5}{2}; \frac{7x+5}{2}\right), & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ \left(\frac{7x}{2}; -\frac{3x}{2}\right), & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ (x - \tilde{r}; x + \tilde{r}) \supset (-x; 3x), & 0 \leq x. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично примеру 1, легко заметить, что функция $T(x)$ непрерывна на всем X , строго монотонна на участках $[-1; -1/2]$, $[-1/2; 0]$ и $[0; +\infty)$, $T(-1) = T(0) = 0$. Следовательно, в указанных интервалах $U_{\tilde{r}}(x)$ для каждого $x \in X$ содержатся целые отрезки, состоящие из точек x' таких, что выполнено, например, неравенство $T(x') \leq T(x)/2$. Это означает, что функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют всем условиям теоремы 5, например, при $\alpha = 1, \beta = 1/2$.

Итак, условия теоремы 5 непротиворечивы. Ясно, что на основе примера 2 несложно построить пример n отображений с аналогичными свойствами для любого $n > 2$.

3. Приближение к общим неподвижным точкам N отображений. Рассмотрим теперь задачу (3), т.е. задачу о совпадениях $(n+1)$ отображения ($n > 1$), когда (хотя бы) одно из них тождественно. Теорема 2 применима в этой ситуации. Нужно лишь положить $Y = X$ и одно из отображений равным тождественному. Мы не приводим эту версию теоремы 2. Теорема 3 в этом случае формулируется более конкретно следующим образом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть заданы непрерывные отображения $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow X$. Обозначим $F = f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow X^n$ и

$$Q(x) = \sum_{k=1}^n \rho(x, f_k(x)) + (n-1)\tilde{D}(F(x)).$$

Пусть существуют числа $\alpha, \beta, 0 < \beta < \alpha$, такие, что для любого $x \in X$ в шаре $B_r(x)$ радиуса $r = r(x) = Q(x)/(\alpha n)$ найдется точка x' такая, что

$$Q(x') \leq \frac{\beta(n+1)}{2\alpha n} Q(x).$$

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = \text{Comfix}(f_1, \dots, f_n) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает $2Q(x_0)/(2\alpha n - \beta(n+1))$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (и вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots} \subset X$ такая, что ее предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X, \quad \xi = f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi),$$

причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq 2 \cdot \frac{Q(x_0)}{2\alpha n - \beta(n+1)}.$$

Отметим, что теорема 5 также применима к случаю, когда при $X = Y$ одно из отображений тождественно. Мы не приводим здесь отдельно соответствующую формулировку.

В задаче о приближении к общим неподвижным точкам n отображений можно предложить еще один вариант решения, который мы приведем ниже. Введем в рассмотрение функционал Φ , определяемый отображениями $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow X$ из равенства

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \rho(x, f_i(x)) + \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(F(x)).$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть X – полное метрическое пространство, $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow X$ – непрерывные отображения ($n \geq 1$) и α – некоторое число, $0 < \alpha < 1$. Пусть для любой точки $x \in X$ существует хотя бы одна точка

$$x' \in M(x) = \left\{ z \in X \mid \sum_{j=1}^n \rho(f_j(x), z) \leq \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(F(x)) \right\}$$

такая, что выполнено неравенство

$$\Phi(x') \leq \alpha \Phi(x). \quad (8)$$

Тогда на X существует мульти-каскад с предельным множеством

$$A = \text{Comfix}(f_1, \dots, f_n) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мульти-каскада $\xi \in A$ не превышает $\Phi(x_0)/(n(1-\alpha))$. Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из нее сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (и вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, предел которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X,$$

причем

$$\xi = f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi) \quad \text{и} \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{\Phi(x_0)}{n(1-\alpha)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $M(x) = \text{пр}_X(B_R(F(x)) \cap \Delta_n)$ – проекция на X пересечения замкнутого шара $B_R(F(x))$ радиуса

$$R = R(x) = \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(F(x))$$

с диагональю $\Delta_n \subset X^n$, где $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. В силу леммы 1 $D(F(x), \Delta_n) \leq R(x)$. Если для данного x это последнее неравенство является строгим, то из определения $\inf$ следует, что множество $M(x)$ непусто. Если же для данного x имеет место равенство

$$D(F(x), \Delta_n) = R(x) = \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(F(x)),$$

то из доказательства леммы 1 вытекает, что в этом случае одновременно имеют место и следующие n равенств:

$$D(F(x), \Delta_n) = D(F(x), F_k(x)) = \sum_{i=1}^n d(f_i(x), f_k(x)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Это означает, что расстояние от $F(x)$ до диагонали достигается на любой из точек диагонали вида:

$$F_k(x) = \underbrace{(f_k(x), \dots, f_k(x))}_n$$

и, следовательно, в этом случае $f_k(x) \in M(x)$, $k = 1, \dots, n$. Итак, для любого $x \in X$ множество $M(x)$ непусто.

Пусть теперь $x_0 \in X$ – произвольная точка. Последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ построим следующим образом. Возьмем в качестве $x_1 \in M(x_0)$ такую точку, для которой выполнено неравенство (8) по отношению к x_0 . И так далее, если выбрана точка x_m , то следующая точка $x_{m+1} \in M(x_m)$ выбирается так, чтобы неравенство (8) было выполнено для нее по отношению к предыдущей точке x_m . Покажем, что построенная таким образом последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна. В самом деле, обозначая $\tilde{x}_j = (x_j, \dots, x_j) \in \Delta_n$, применяя неравенство треугольника и неравенство (8) и учитывая, что $0 < \alpha < 1$, имеем для любого $m = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_{m+1}) &= \frac{1}{n} D(\tilde{x}_m, \tilde{x}_{m+1}) \leq \frac{1}{n} [D(\tilde{x}_m, F(x_m)) + D(F(x_m), \tilde{x}_{m+1})] \\ &= \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n \rho(x_m, f_j(x_m)) + \sum_{j=1}^n \rho(f_j(x_m), x_{m+1}) \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \Phi(x_m) \leq \frac{\alpha}{n} \Phi(x_{m-1}) \leq \frac{\alpha^m}{n} \Phi(x_0) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна. Так как рассматриваемое пространство X полно, существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X$. При этом, в силу непрерывности отображений $f_1, \dots, f_n$, а следовательно, и функционала $\Phi(x)$, получаем

$$\Phi(\xi) = \Phi\left(\lim_{m \rightarrow \infty} x_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi(x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^m \Phi(x_0) = 0.$$

Это означает, что $\xi = f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi)$.

Оценим расстояние $\rho(x_0, \xi)$:

$$\rho(x_0, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m-1} \rho(x_j, x_{j+1}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\alpha^j}{n} \Phi(x_0) = \frac{\Phi(x_0)}{n(1-\alpha)}.$$

Теорема доказана.

Если все отображения $f_1, \dots, f_n$ совпадают ($n > 1$), или $n = 1$, то в качестве следствия из теоремы 7 получается следующее обобщение хорошо известного *принципа сжимающих отображений* (см., например, [6; с. 70]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть X – полное метрическое пространство, $f: X \rightarrow Y$ – заданное непрерывное отображение. Пусть существует такое число α , $0 < \alpha < 1$, что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство

$$\rho(f(x), f^2(x)) \leq \alpha \cdot \rho(x, f(x)).$$

Тогда на X существует каскад, генератор которого совпадает с отображением f , с предельным множеством

$$A = \text{fix}(f) \neq \emptyset,$$

причем расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки каскада $\xi \in A$ не превышает $\rho(x_0, f(x_0))/(1-\alpha)$. Иначе говоря, из любой точки $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, где $x_m = f^m(x_0)$, имеющую предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X,$$

причем

$$\xi = f(\xi) \quad \text{и} \quad \rho(x_0, \xi) \leq \frac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы 7 предположим, что $f_1 = \dots = f_n = f$ при $n > 1$, или $n = 1$. Легко видеть, что тогда для любого $x \in X$ множество $M(x)$ состоит из единственной точки $f(x)$, и $\Phi(x) = n \cdot \rho(x, f(x))$. Неравенство (8) приобретает вид: $\rho(f(x), f^2(x)) \leq \alpha \cdot \rho(x, f(x))$. Поэтому в силу теоремы 7 существует последовательность, начинающаяся в любой точке $x_0 \in X$ и сходящаяся к неподвижной точке ξ отображения f , причем

$$\rho(x_0, \xi) \leq \frac{\Phi(x_0)}{n(1-\alpha)} = \frac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha},$$

что и требуется. Теорема 8 доказана.

Отметим, что в отличие от принципа сжимающих отображений, теорема 8 не гарантирует единственности неподвижной точки, однако применима к более широкому классу отображений.

Заключительные замечания. 1. Отметим здесь, что генератор каждого из построенных мульти-каскадов в приведенных теоремах задается отображением (вообще говоря, неоднозначным) $G: X \rightarrow X$, $G(x) = x' = x'(x)$, где существование соответствующей (вообще говоря, не единственной) точки $x'(x) \in X$ с нужными свойствами обеспечивается условиями каждой из теорем. Все построенные в доказательствах теорем последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, являются, конечно, *итерационными относительно действия именно такого генератора G* .

2. Отметим, что предложенные в работе результаты объединены общей идеей, похожей на метод градиентного спуска. Для построения на пространстве X мульти-каскада с предельным множеством A , $A \subset X$, на X задается некоторый метрический функционал φ с нуль-пространством $\{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} = A$. Значение такого функционала в каждой точке $x \in X$ определяет (с помощью вспомогательных параметров) некоторое “направляющее” множество, где должны существовать точки “спуска” этого функционала, т.е. уменьшения его значения с коэффициентом,

меньшим единицы. Переход в такую точку “спуска” и задает действие генератора искомого каскада. Стремление такого функционала к нулю означает в точности приближение к заданному предельному множеству A . Таким образом, можно сказать, что для построения мульти-каскадов на X предложен метод “дискретного спуска” по значениям специальных метрических функционалов. Такие функционалы выше – это $D(F(x), H)$, $D(F(x), \Delta_n)$, $\tilde{D}(F(x))$, $T(x)$, $\Phi(x)$. “Направляющие множества” – это либо соответствующие окрестности точки x , либо (в теореме 7) специальное множество $M(x)$.

3. Нельзя не отметить, что в интересной работе [5] получено более общее утверждение, чем теорема 4 (т.е. теорема 1 в [5]). Этот более общий результат (теорема 2 и замечания после нее в [5]), примененный к однозначным отображениям, дает утверждение теоремы 4 при более слабых условиях: вместо непрерывности накрывающего отображения требуется лишь замкнутость его графика. Обобщение этого результата в данной работе не сформулировано. Однако, нетрудно заметить, что утверждения теорем 2, 3 и 5 остаются верными и при условии, когда не все, а лишь одно из отображений $f_1, \dots, f_n$ непрерывно, а остальные имеют замкнутые графики. В самом деле, в доказательстве теоремы 1 построена итерационная последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots} \subset \text{Graph}(F)$. При $H = \Delta_n$, $F = f_1 \times \dots \times f_n$ имеем: $y_m = (y_{1m}, \dots, y_{nm})$, где $y_{im} = f_i(x_m)$, $i = 1, \dots, n$. Если например, f_1 непрерывно, то из условия $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \xi$ следует, что $f_1(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f_1(\xi) = \eta$. Далее, так как

$$\frac{1}{n-1} T(x_m) \leq \tilde{D}(x_m) \leq D(y_m, \Delta_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

последовательности $\{y_{im}\}_{m=0,1,\dots}$, $i = 1, \dots, n$, сближаются и, следовательно, все сходятся к тому же пределу η . Значит,

$$\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (\xi, (\eta, \dots, \eta)) \in \text{Graph}(F)$$

в силу замкнутости этого графика. Отсюда

$$\eta = f_1(\xi) = \dots = f_n(\xi),$$

т.е. $\xi \in \text{Coin}(f_1, \dots, f_n)$. Аналогично, требование непрерывности можно, конечно заменить условием замкнутости графиков *всех* отображений $f_1, \dots, f_n$ в теоремах 6 и 7.

Развитие полученных результатов, а также исследование аналогичных задач для многозначных отображений будут изложены в другой статье.

Выражаю искреннюю благодарность А. В. Арутюнову за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов и ценные замечания и предложения, способствующие улучшению изложения данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2003.
- [2] A. Aliouche, A. Djoudi, “Common fixed point theorems for mappings satisfying an implicit relation without decreasing assumption”, *Hacet. J. Math. Stat.*, **36**:1 (2007), 11–18.

- [3] N. Hussain, B. E. Rhoades, G. Jungck, “Common fixed point and invariant approximation results for Gregus type I -contractions”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **28**:9–10 (2007), 1139–1151.
- [4] K. Iséki, “On common fixed point theorems of mappings”, *Proc. Japan Acad.*, **50**:7 (1974), 468–469.
- [5] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Докл. РАН*, **416**:2 (2007), 151–155.
- [6] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1972.

Т. Н. Фоменко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tn-fomenko@yandex.ru

Поступило

21.05.2008