Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, Точные оценки норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условиям Гёльдера, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 26–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:48:46

УДК 517.5

Точные оценки норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условиям Гёльдера

В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов

Доказано новое точное неравенство типа Колмогорова, которое оценивает равномерную норму смешанной производной дробного порядка (в смысле Маршо) функции многих переменных через равномерную норму функции и ее нормы в пространствах Гёльдера.

Библиография: 18 названий.

Во многих вопросах анализа возникает необходимость рассматривать производные и интегралы дробного порядка (см., например, [1]). Классическое определение Лиувилля производных $D_{\pm}^{\alpha}x$ дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ функции $x(u)$, $u \in \mathbb{R}$, заданной на всей действительной оси, таково [1; с. 43]:

$$(D_{+}^{\alpha}x)(u) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_{-\infty}^u \frac{x(t)}{(u-t)^{\alpha}} dt,$$

$$(D_{-}^{\alpha}x)(u) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{du} \int_u^{\infty} \frac{x(t)}{(u-t)^{\alpha}} dt.$$

Не менее важны, а в ряде вопросов более удобны, производные $\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}x$ в смысле Маршо [2] (см. также [1; с. 95–97]), которые определяются следующим образом:

$$(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}x)(u) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{x(u) - x(u \mp t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Ниже для сокращения записей мы будем полагать $A_{\alpha} = \alpha/\Gamma(1-\alpha)$.

Известно (см., например, [1; с. 96]), что для достаточно хороших функций значения этих производных совпадают:

$$(\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}x)(u) = (D_{\pm}^{\alpha}x)(u).$$

Ниже через $C(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство ограниченных непрерывных функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_C := \sup\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

Для показателя $\beta \in (0, 1]$ через H^β обозначим пространство функций $x \in C(\mathbb{R})$ таких, что

$$\|x\|_{H^\beta} := \sup_{\substack{t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta} < \infty.$$

В работе [3] доказано следующее точное неравенство типа Колмогорова для производных дробного порядка $\alpha < \beta \leq 1$ в смысле Маршо функций одной переменной:

$$\|\mathbb{D}_\pm^\alpha x\|_C \leq \frac{A_\alpha}{\alpha} \frac{2^{1-\alpha/\beta}}{1-\alpha/\beta} \|x\|_C^{1-\alpha/\beta} \|x\|_{H^\beta}^{\alpha/\beta}, \quad (1)$$

причем данное неравенство обращается в равенство для функции $x(u)$, которая определяется следующим образом: $x(u) = |u|^\beta - 1/2$, если $|u| \leq 1$, и $x(u) = 1/2$, если $|u| \geq 1$.

По поводу других известных точных неравенств типа Колмогорова для дробных производных функций одной переменной сошлемся на работы [4]–[8].

Для функций двух и более переменных точных неравенств типа Колмогорова (для производных целых и дробных порядков) также известно очень немного (см. [9]–[17]).

В данной работе мы получим обобщение неравенства (1) на случай функций многих переменных.

Через $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать пространство существенно ограниченных функций $x: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)} := \text{vrai sup}\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Для вектора $t \in \mathbb{R}^m$ обозначим через $\Delta_{t_j e_j} x(u)$ разность функции $x(u)$ по переменной u_j с шагом t_j :

$$\Delta_{t_j e_j} x(u) := x(u) - x(u + t_j e_j),$$

где $\{e_1, \dots, e_m\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^m$.

Для заданного вектора гладкостей Гёльдера $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_j \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$, введем классы H^{β_j} функций $x(u) \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, которые по переменной u_j удовлетворяют условию Гёльдера с показателем β_j , т.е.

$$H^{\beta_j} := \left\{ x \in L_\infty(\mathbb{R}^m) : \|x\|_{\beta_j} = \|x\|_{H^{\beta_j}} = \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^m \\ t_j \neq 0}} \frac{\|\Delta_{t_j e_j} x(\cdot)\|_\infty}{|t_j|^{\beta_j}} < \infty \right\}.$$

Пусть далее для $t = (t_1, \dots, t_m)$

$$\Delta_t x(u) := \Delta_{t_1 e_1} \Delta_{t_2 e_2} \dots \Delta_{t_m e_m} x(u)$$

– смешанная разность функции $x(u)$ с шагом t . Для вектора гладкостей

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_j \in (0, 1), \quad j = 1, \dots, m,$$

и вектора распределения знаков

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \quad \varepsilon_j = \pm, \quad j = 1, \dots, m,$$

смешанные производные Маршо $\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x$ порядка α определяются равенством (см. [1; с. 347])

$$(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x)(u) := A_\alpha \int_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{\varepsilon t} x(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt,$$

где $A_\alpha = \prod_{j=1}^m A_{\alpha_j}$, $A_{\alpha_j} = \alpha_j / \Gamma(1 - \alpha_j)$, $\varepsilon t := (\varepsilon_1 t_1, \dots, \varepsilon_m t_m)$.

Нами доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_j \in (0, 1]$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = 1, \dots, m$, и

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j} < 1.$$

Тогда для всех $x(u) \in \bigcap_{j=1}^m H^{\beta_j}$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \leq \frac{2^{m-1}}{\prod_{j=1}^m \Gamma(1 - \alpha_j)} \cdot \frac{2^{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j}}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j} \cdot \|x\|_\infty^{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j} \cdot \prod_{j=1}^m \|x\|_{H^{\beta_j}}^{\alpha_j / \beta_j}. \quad (2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неравенство (2) для функций двух переменных доказано в работе авторов [17].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО достаточно провести в случае $\varepsilon = (+, \dots, +)$. Для оценки $\|\Delta_t x\|_\infty$ будем использовать следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|\Delta_t x\|_\infty &\leq 2^m \|x\|_\infty, \\ \|\Delta_t x\|_\infty &\leq 2^{m-1} \|\Delta_{t_j e_j} x\|_\infty \leq 2^{m-1} \|x\|_{H^{\beta_j}} |t_j|^{\beta_j}, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Объединяя эти оценки, получим

$$\|\Delta_t x\|_\infty \leq 2^{m-1} \min \left\{ 2 \|x\|_\infty, \min_j (\|x\|_{H^{\beta_j}} |t_j|^{\beta_j}) \right\}.$$

Учитывая определение дробной производной, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty &\leq A_\alpha \int_{\mathbb{R}_+^m} \|\Delta_{\varepsilon t} x(u)\|_\infty \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt \\ &\leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min \left\{ 2 \|x\|_\infty, \min_j (\|x\|_{H^{\beta_j}} |t_j|^{\beta_j}) \right\} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Применим (3) к функции

$$y(u) = \frac{1}{b} x(d_1 u_1, \dots, d_m u_m), \quad b > 0, \quad d_j > 0.$$

Так как

$$\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha y\|_\infty = \left(\frac{1}{b} \prod_{j=1}^m d_j^{\alpha_j} \right) \|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty,$$

$$\begin{aligned} \|y\|_{H^{\beta_j}} &= \frac{1}{b} \sup_{t_j \neq 0} \frac{\|\Delta_{t_j e_j} x(d_1 u_1, \dots, d_m u_m)\|_{\infty}}{|t_j|^{\beta_j}} \\ &= \frac{1}{b} d_j^{\beta_j} \sup_{t_j \neq 0} \frac{\|\Delta_{t_j e_j} x(d_1 u_1, \dots, d_m u_m)\|_{\infty}}{|d_j t_j|^{\beta_j}} = \frac{1}{b} d_j^{\beta_j} \|x\|_{H^{\beta_j}}, \end{aligned}$$

то

$$\|\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} x\|_{\infty} \left(\frac{1}{b} \prod_{j=1}^m d_j^{\alpha_j} \right) \leq A_{\alpha} 2^{m-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min \left\{ \min_j \left(\frac{1}{b} d_j^{\beta_j} t_j^{\beta_j} \|x\|_{H^{\beta_j}} \right), \frac{2}{b} \|x\|_{\infty} \right\} dt.$$

Положим здесь

$$b = 2\|x\|_{\infty}, \quad d_j^{\beta_j} = \frac{b}{\|x\|_{H^{\beta_j}}} = \frac{2\|x\|_{\infty}}{\|x\|_{H^{\beta_j}}}.$$

Тогда получим

$$\|\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} x\|_{\infty} \frac{1}{2\|x\|_{\infty}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{2\|x\|_{\infty}}{\|x\|_{H^{\beta_j}}} \right)^{\alpha_j/\beta_j} \leq A_{\alpha} 2^{m-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}, 1 \right\} dt,$$

т.е.

$$\|\mathbb{D}_{\varepsilon}^{\alpha} x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}^{1-\sum_{j=1}^m \alpha_j/\beta_j} \prod_{j=1}^m \|x\|_{H^{\beta_j}}^{\alpha_j/\beta_j} A_{\alpha} 2^{m-1} 2^{1-\sum_{j=1}^m \alpha_j/\beta_j} \cdot I, \quad (4)$$

где

$$I = \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}, 1 \right\} dt.$$

Для вычисления I область интегрирования $\mathbb{R}_+^m$ разобьем на множества

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ t \in \mathbb{R}_+^m : \min_j t_j^{\beta_j} = 1 \right\}, \\ A_i &= \left\{ t \in \mathbb{R}_+^m : \min_j t_j^{\beta_j} = t_i^{\beta_i} \right\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Так как $\mathbb{R}_+^m = \bigcup_{i=0}^m A_i$ и попарные пересечения множеств A_i имеют нулевую меру, то

$$I = \sum_{i=0}^m I_i,$$

где

$$I_i = \int_{A_i} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min \left\{ \min_j t_j^{\beta_j}, 1 \right\} dt.$$

Ясно, что

$$I_0 = \int_{A_0} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt = \prod_{j=1}^m \int_1^{\infty} t_j^{-\alpha_j-1} dt_j = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j}.$$

Все интегралы I_j , $j = 1, \dots, m$, вычисляются одинаково. Вычислим, например, I_1 . Имеем

$$I_1 = \int_{A_1} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} t_1^{\beta_1} dt = \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1} \left(\int_{t_1^{\beta_1/\beta_2}}^{+\infty} \dots \int_{t_1^{\beta_1/\beta_m}}^{+\infty} \prod_{j=2}^m t_j^{-\alpha_j-1} dt_m \dots dt_2 \right) dt_1$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1} \prod_{j=2}^m \frac{1}{\alpha_j} \frac{1}{t_1^{\alpha_j \beta_1 / \beta_j}} dt_1 = \prod_{j=2}^m \frac{1}{\alpha_j} \int_0^1 t_1^{-\alpha_1-1+\beta_1-\sum_{j=2}^m \beta_1 \alpha_j / \beta_j} dt_1 \\
&= \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\alpha_1 / \beta_1}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j}.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$I_i = \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\alpha_i / \beta_i}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Следовательно,

$$I = \sum_{i=0}^m I_i = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} + \sum_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{\alpha_j} \right) \cdot \frac{\alpha_i / \beta_i}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j} = \frac{\prod_{j=1}^m (1/\alpha_j)}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j}. \quad (5)$$

Отсюда и из (4) получаем (2).

Теперь построим функцию $f(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, которая обращает (2) в равенство.

Сначала определим $f(u)$ для $u \in \mathbb{R}_+^m$, а затем продолжим f четным образом относительно каждой переменной на все пространство $\mathbb{R}^m$. Для $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m$ положим $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$, где $\bar{u}_i := \min\{u_i, 1\}$. Далее рассмотрим вектор $\bar{u}^\beta := (\bar{u}_1^{\beta_1}, \dots, \bar{u}_m^{\beta_m})$ и положим $v = v(u) = (v_1(u), \dots, v_m(u)) := (\bar{u}^\beta)^*$, где $(\bar{u}^\beta)^*$ – вектор, координатами которого являются числа $\bar{u}_1^{\beta_1}, \dots, \bar{u}_m^{\beta_m}$, переставленные в невозрастающем порядке. Теперь определим функцию f , полагая для $u \in \mathbb{R}_+^m$

$$f(u) = v_1(u) - v_2(u) + \dots + (-1)^{m-1} v_m(u) - \frac{1}{2}.$$

Так как

$$0 \leq \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} v_j(u) \leq 1,$$

то

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2},$$

причем в действительности

$$\|f\|_\infty = \frac{1}{2} \quad (6)$$

(норма достигается, например, в точке $u = e_1$).

Проверим, что $f \in \bigcap_{j=1}^m H^{\beta_j}$ и оценим $\|f\|_{\beta_j}$, $j = 1, \dots, m$. Для этого рассмотрим разность ($h > 0$)

$$\begin{aligned}
f(u + he_i) - f(u) &= v_1(u + he_i) - v_2(u + he_i) + \dots + (-1)^{m-1} v_m(u + he_i) \\
&\quad - (v_1(u) - v_2(u) + \dots + (-1)^{m-1} v_m(u)).
\end{aligned}$$

Вектор $u + he_i$ отличается от вектора u только i -й координатой, которая больше i -й координаты вектора u . Поэтому вектор $v(u + he_i)$ будет отличаться от вектора $v(u)$ следующим образом. Пусть у вектора $v(u)$ число $\bar{u}_i^{\beta_i}$ является ν -й координатой. Тогда найдется $\mu \leq \nu$ такое, что $(u + he_i)^{\beta_i}$ является μ -й координатой

вектора $v(u + he_i)$. Кроме того, координаты векторов $v(u + he_i)$ и $v(u)$, номера которых меньше μ или больше ν , совпадают между собой. Таким образом, разность $f(u + he_i) - f(u)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} f(u + he_i) - f(u) &= (-1)^{\mu-1}(\overline{u_i + h})^{\beta_i} + (-1)^\mu v_\mu(u) + \dots + (-1)^{\nu-1} v_{\nu-1}(u) \\ &\quad - (-1)^{\mu-1} v_\mu(u) - \dots - (-1)^{\nu-2} v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1} \overline{u_i}^{\beta_i} \\ &= (-1)^{\mu-1}(\overline{u_i + h})^{\beta_i} + 2(-1)^\mu v_\mu(u) + \dots \\ &\quad + 2(-1)^{\nu-1} v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1} \overline{u_i}^{\beta_i}. \end{aligned}$$

Пусть, для определенности, μ нечетно (случай четного μ рассматривается аналогично). Покажем, что тогда имеет место следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} \overline{u_i}^{\beta_i} - (\overline{u_i + h})^{\beta_i} &\leq (\overline{u_i + h})^{\beta_i} - 2v_\mu(u) + \dots + 2(-1)^{\nu-1} v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1} \overline{u_i}^{\beta_i} \\ &\leq (\overline{u_i + h})^{\beta_i} - \overline{u_i}^{\beta_i}. \end{aligned}$$

Первое неравенство этой системы эквивалентно неравенству

$$0 \leq 2(\overline{u_i + h})^{\beta_i} - 2v_\mu(u) + \dots + 2(-1)^{\nu-1} v_{\nu-1}(u) - (1 + (-1)^{\nu-1}) \overline{u_i}^{\beta_i},$$

которое очевидно в силу монотонного невозрастания чисел

$$(\overline{u_i + h})^{\beta_i}, \quad v_\mu(u), \quad \dots, \quad v_{\nu-1}(u), \quad \overline{u_i}^{\beta_i}.$$

Второе неравенство этой системы эквивалентно неравенству

$$-2v_\mu(u) + \dots + 2(-1)^{\nu-1} v_{\nu-1}(u) + (1 - (-1)^{\nu-1}) \overline{u_i}^{\beta_i} \leq 0,$$

которое также очевидно в силу монотонного невозрастания чисел

$$(\overline{u_i + h})^{\beta_i}, \quad v_\mu(u), \quad \dots, \quad v_{\nu-1}(u), \quad \overline{u_i}^{\beta_i}.$$

Из доказанной системы неравенств следует, что $f \in H^{\beta_i}$. Ясно также, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$

$$\|f\|_{\beta_i} \leq 1. \quad (7)$$

Теперь подсчитаем $(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha) f(0)$ при $\varepsilon = (+, \dots, +)$. Для этого сначала докажем, что

$$\Delta_{t_1 e_1} \dots \Delta_{t_m e_m} f(0, \dots, 0) = -2^{m-1} \min\{t_1^{\beta_1}, \dots, t_m^{\beta_m}, 1\} = -2^{m-1} \min\{\bar{t}_1^{\beta_1}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\}.$$

Этот факт докажем с помощью индукции по m . При $m = 2$ он проверяется непосредственно. Это базис индукции.

Так как операторы $\Delta_{t_i e_i}$ и $\Delta_{t_j e_j}$ коммутируют, вычисляя $\Delta_{t_1 e_1} \dots \Delta_{t_m e_m} f(0, \dots, 0)$, мы можем брать $\Delta_{t_1 e_1}, \dots, \Delta_{t_m e_m}$ в любом удобном порядке.

Будем, для определенности, считать, что среди чисел $\bar{t}_1^{\beta_1}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}$ самым большим является первое и по t_1 будем вычислять разность в последнюю очередь. Представим разность $\Delta_{t_1 e_1} \dots \Delta_{t_m e_m} f(0, \dots, 0)$ в виде

$$\Delta_{t_1 e_1} \dots \Delta_{t_m e_m} f(0, \dots, 0) = \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_1 + \dots + j_m} f(j_1 t_1, j_2 t_2, \dots, j_m t_m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_2+\cdots+j_m} f(0, j_2 t_2, \dots, j_m t_m) \\
&\quad - \sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_2+\cdots+j_m} f(t_1, j_2 t_2, \dots, j_m t_m).
\end{aligned}$$

По предположению индукции

$$\sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_2+\cdots+j_m} f(0, j_2 t_2, \dots, j_m t_m) = -2^{m-2} \min\{\bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\}. \quad (8)$$

В силу определения функции f и предположения о том, что среди чисел $\bar{t}_1^{\beta_1}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}$ самым большим является первое, получим

$$f(t_1, j_2 t_2, \dots, j_m t_m) = \bar{t}_1^{\beta_1} - f(0, j_2 t_2, \dots, j_m t_m),$$

так что

$$-\sum_{j_2=0}^1 \cdots \sum_{j_m=0}^1 (-1)^{j_2+\cdots+j_m} (\bar{t}_1^{\beta_1} - f(0, j_2 t_2, \dots, j_m t_m)) = -2^{m-2} \min\{\bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\}$$

(здесь мы снова воспользовались предположением индукции (8)). Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_{t_1 e_1} \cdots \Delta_{t_m e_m} f(0, \dots, 0) &= -2^{m-2} \min\{\bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\} - 2^{m-2} \min\{\bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\} \\
&= -2^{m-1} \min\{\bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\} = -2^{m-1} \min\{\bar{t}_1^{\beta_1}, \bar{t}_2^{\beta_2}, \dots, \bar{t}_m^{\beta_m}\}.
\end{aligned}$$

Теперь для $\varepsilon = (+, +, \dots, +)$, учитывая (5), оценим $\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\|_\infty$ снизу:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\|_\infty &\geq |(\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha) f(0, 0, \dots, 0)| = A_\alpha 2^{m-1} \int_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1} \min\left\{\min_j t_j^{\beta_j}, 1\right\} dt \\
&= 2^{m-1} A_\alpha \frac{\prod_{j=1}^m 1/\alpha_j}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j/\beta_j}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Учитывая (6), (7) и (9), получим

$$\frac{\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\|_\infty}{\|f\|_\infty^{1-\sum_{j=1}^m \alpha_j/\beta_j} \prod_{j=1}^m \|f\|_{H^{\beta_j}}^{\alpha_j/\beta_j}} \geq 2^{m-1} A_\alpha \frac{\prod_{j=1}^m (1/\alpha_j)}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j/\beta_j}.$$

Правая часть этого неравенства совпадает с константой в неравенстве (2). Точность неравенства (2) доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\alpha_j > 0$ для $j = 1, \dots, m$, причем $\sum_{j=1}^m \alpha_j < 1$. Тогда для любой функции $x(u) \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, имеющей для каждого $j = 1, \dots, m$ существенно ограниченную производную $\partial x/\partial t_j$ в смысле Соболева, справедливо неумлучшаемое неравенство

$$\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha x\|_\infty \leq \frac{2^{m-1}}{\prod_{j=1}^m \Gamma(1 - \alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum_{j=1}^m \alpha_j}}{1 - \sum_{j=1}^m \alpha_j} \cdot \|x\|_\infty^{1-\sum_{j=1}^m \alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^m \left\| \frac{\partial x}{\partial t_j} \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)}^{\alpha_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см., например, [18]), что в условиях следствия $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{\beta_j}$ при $\beta_1 = \dots = \beta_m = 1$, причем $\|x\|_{\beta_j} = \|\partial x / \partial t_j\|_\infty$ для всех $j = 1, \dots, m$.

В заключение отметим, что условие $\sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j < 1$ теоремы 1 отбросить нельзя. Действительно, если $\sum_{j=1}^m \alpha_j / \beta_j = 1$, то для построенной выше функции f будет

$$\|\mathbb{D}_\varepsilon^\alpha f\|_\infty = \infty.$$

Таким образом, из теоремы 1, в частности, вытекает следующее точное условие вложения класса $x \in \bigcap_{j=1}^m H^{\beta_j}$ в класс функций с ограниченной дробной производной Маршо порядка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j} < 1.$$

Авторам неизвестны публикации о неулучшаемых теоремах вложения такого типа для функций многих переменных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [2] A. Marchaud, “Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles”, *J. Math. Pures Appl.*, **6** (1927), 337–425.
- [3] В. Ф. Бабенко, М. С. Чурілова, “Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку”, *Вісн. Дніпропетровськ. ун-ту. Матем.*, **6** (2001), 16–20.
- [4] С. П. Гейсберг, “Обобщение неравенства Адамара”, *Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций*. 1, Сб. научн. трудов ЛМИ, **50**, Ленингр. мех. ин-т, Л., 1965, 42–54.
- [5] V. V. Arestov, “Inequalities for fractional derivatives on the half-line”, *Approximation Theory*, Banach Center Publ., **4**, PWN, Warsaw, 1979, 19–34.
- [6] G. G. Magaril-P’jaev, V. M. Tihomirov, “On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line”, *Anal. Math.*, **7**:1 (1981), 37–47.
- [7] В. Ф. Бабенко, “Точные неравенства для норм промежуточных производных полупе-лого порядка и некоторые их приложения”, *Доп. НАН України*, 1997, № 2, 23–26.
- [8] V. F. Babenko, M. G. Churilova, “On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives”, *East J. Approx.*, **8**:4 (2002), 437–446.
- [9] Ю. Н. Субботин, *Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 1973.
- [10] В. Н. Коновалов, “Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 67–78.
- [11] Динь Зунг, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных в метрике $\mathcal{L}_2$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1979, № 5, 7–11.
- [12] А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных в многомерном случае”, *Матем. заметки*, **25**:1 (1979), 59–73.
- [13] В. Г. Тимофеев, “Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных”, *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 676–689.
- [14] О. А. Тимошин, “Точные неравенства между нормами частных производных второго и третьего порядков”, *Докл. РАН*, **344**:1 (1995), 20–22.

- [15] V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, “Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications”, *Multivariate Approximation and Splines* (Mannheim, 1996), Internat. Ser. Numer. Math., **125**, Birkhäuser, Basel, 1997, 1–12.
- [16] В. Ф. Бабенко, “О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных”, *Доп. НАН України*, 2000, № 5, 7–11.
- [17] V. Babenko, S. Pichugov, “Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables”, *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 321–329.
- [18] V. I. Kolyada, “Rearrangements of functions and embedding of anisotropic spaces of Sobolev type”, *East J. Approx.*, **4**:2 (1998), 111–199.

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Поступило

05.06.2008

Исправленный вариант

26.05.2009

С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный технический университет
железнодорожного транспорта