Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Заставный, О рядах, возникающих при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 497–511

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 18:03:40

О рядах, возникающих при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона

В. П. Заставный

Для рядов специального вида найдено разложение по степеням параметра. При этом коэффициенты разложения явно выписываются через многочлены Бернулли. В частном случае получается разложение по степеням параметра верхних граней уклонений классов периодических дифференцируемых функций от их интегралов Пуассона.

Библиография: 15 названий.

В 1950 г. Тиман [1] нашел следующее точное значение остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона. Если $0 \leq \rho < 1$ и $r \in \mathbb{N}$, то

$$\sup_{f \in W^r} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) P_{\rho}(t) dt \right| = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)} (1 - \rho^{2k+1})}{(2k+1)^{r+1}}, \quad (1)$$

где

$$P_{\rho}(t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}$$

– ядро Пуассона, а W^r – класс 2π -периодических функций, имеющих абсолютно непрерывные производные $(r-1)$ -го порядка и таких, что $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ при почти всех $x \in \mathbb{R}$. В этой же работе для величины (1) при $r > 1$ выделены первые $r-1$ главных членов по степеням $\varepsilon = \ln(1/\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-0$ и указаны остатки в интегральной форме. В 1961 г. Малей [2] для $r=1$ нашел асимптотическое разложение ряда (1) при $\rho \rightarrow 1-0$ по степеням $(1-\rho)$. Этот же результат в 1973 г. переоткрыл Штарк [3]. В 2002 г. в работе Жигалла и Харкевича [4] уже при всех $r \in \mathbb{N}$ найдено асимптотическое разложение правой части равенства (1) при $\rho \rightarrow 1-0$ по степеням $(1-\rho)$. Все коэффициенты этого разложения содержат как явные величины, так и величины, которые определяются по непростой рекуррентной формуле. В 1975 г. Баскаков [5] для правой части равенства (1) нашел интегральное представление, из которого для $r=1, 2, 3$ им было получено разложение правой части по степеням $\varepsilon = \ln(1/\rho)$ ($0 < \varepsilon < \pi$ для $r=1, 3$ и $0 < \varepsilon < \pi/2$ для $r=2$) с коэффициентами, которые выражаются некоторыми интегралами. В 2004 г. в работе Харкевича и Кальчук [6] при всех $r \in \mathbb{N}$ найдено асимптотическое разложение при $\varepsilon = \ln(1/\rho) \rightarrow +0$ по тем же степеням с коэффициентами, которые явно выражаются

только для первых r членов, а остальные определяются по непростой рекуррентной формуле.

Отметим, что рядами (1) выражаются точные значения приближения интегралами Пуассона не только на классе W^r , но и на классе $\overline{W}^r$, причем как в метрике L_∞ , так и в метрике L_1 (см., например, [4], [6]). Здесь $\overline{W}^r$ – класс функций, сопряженных к функциям из класса W^r , т.е.

$$\overline{W}^r = \left\{ g : g(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, f \in W^r \right\},$$

где интеграл понимается в смысле его главного значения.

Отметим еще, что асимптотическое разложение верхних граней уклонений функций f от их сумм Фейера, взятых по классу функций, удовлетворяющих условию Липшица, было найдено в 1969 г. в работе Теляковского [7].

В настоящей работе для более общих рядов, чем (1), найдено разложение по степеням $\varepsilon = \ln(1/\rho)$ с явными коэффициентами (см. теорему 1 и следствие 1), из которого получается и разложение с явными коэффициентами по степеням $(1-\rho)$ (см. теорему 2 и следствие 2). Обратим внимание, что получено именно разложение в ряд (как у Баскакова [5]), а не асимптотическое представление (как в работах [2]–[4], [6]).

Для $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, $r \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ рассмотрим следующие две функции:

$$F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\varepsilon(\alpha k + \beta)}}{(\alpha k + \beta)^{r+1}}, \quad G_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-\varepsilon(\alpha k + \beta)}}{(\alpha k + \beta)^{r+1}}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2)$$

Если $r \in \mathbb{N}$, то можно считать $\varepsilon \geq 0$. С точностью до множителя $4/\pi$ правая часть равенства (1), очевидно, равна при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ разности $F_{r,\alpha,\beta}(0) - F_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho)$ при нечетном r и равна разности $G_{r,\alpha,\beta}(0) - G_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho)$ при четном r .

Приведем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{r+1} \varepsilon^r \ln \varepsilon}{\alpha r!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu(r, \alpha, \beta)}{\nu!} \varepsilon^\nu, \quad 0 < \varepsilon < \frac{2\pi}{|\alpha|}, \quad (3)$$

где

$$a_\nu(r, \alpha, \beta) = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha k + \beta)^{r-\nu+1}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1, \quad (4)$$

если $r \geq 1$, и

$$\begin{aligned} a_r(r, \alpha, \beta) &= \frac{(-1)^r}{\alpha} \left(b(r) + \ln \frac{4}{\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha - 2\beta}{(\alpha k + \beta)(2k+1)} \right) \\ &= \frac{(-1)^r}{\alpha} \left(b(r) + \ln \frac{4}{\alpha} + \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} - \frac{\Gamma'(\beta/\alpha)}{\Gamma(\beta/\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $b(0) = 0$ и $b(r) = \sum_{k=1}^r 1/k$, $r \geq 1$,

$$a_\nu(r, \alpha, \beta) = \frac{(-1)^{\nu+1} \alpha^{\nu-r-1}}{\nu-r} B_{\nu-r} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right), \quad \nu \geq r+1. \quad (6)$$

Здесь $B_n(x)$ – многочлены Бернулли.

СЛЕДСТВИЕ 1. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$G_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu(r, \alpha, \beta)}{\nu!} \varepsilon^\nu, \quad b_\nu(r, \alpha, \beta) = 2a_\nu(r, 2\alpha, \beta) - a_\nu(r, \alpha, \beta), \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{|\alpha|}, \quad (7)$$

где

$$b_\nu(r, \alpha, \beta) = (-1)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha k + \beta)^{r-\nu+1}}, \quad 0 \leq \nu \leq r-1, \quad (8)$$

если $r \geq 1$, и

$$\begin{aligned} b_r(r, \alpha, \beta) &= \frac{(-1)^r}{\alpha} \left(-\ln 2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{(2\alpha k + \beta)(\alpha k + \beta)} \right) \\ &= \frac{(-1)^r}{\alpha} \left(-\ln 2 + \frac{\Gamma'(\beta/\alpha)}{\Gamma(\beta/\alpha)} - \frac{\Gamma'(\beta/(2\alpha))}{\Gamma(\beta/(2\alpha))} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$b_\nu(r, \alpha, \beta) = \frac{(-1)^\nu \alpha^{\nu-r-1}}{2} E_{\nu-r-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right), \quad \nu \geq r+1. \quad (10)$$

Здесь

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n} \left(B_n(x) - 2^n B_n \left(\frac{x}{2} \right) \right)$$

– многочлены Эйлера.

ТЕОРЕМА 2. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$F_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho) = -\frac{\ln^r \rho \ln(-\ln \rho)}{\alpha r!} + a_0(r, \alpha, \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k s(n, k) a_k(r, \alpha, \beta), \quad (11)$$

где $1 - r_f(\alpha) < \rho < 1$, и

$$G_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho) = b_0(r, \alpha, \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k s(n, k) b_k(r, \alpha, \beta), \quad (12)$$

где $1 - r_g(\alpha) < \rho < 1$. Здесь $a_k(r, \alpha, \beta)$ и $b_k(r, \alpha, \beta)$ определяются соответственно по формулам (4)–(6) и (8)–(10), $s(n, k)$ – числа Стирлинга первого рода, которые определяются из соотношения

$$x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

u

$$\begin{aligned} r_f(\alpha) &:= \min_{z \in Z_f(\alpha)} \{1, |e^{-z} - 1|\}, & Z_f(\alpha) &:= \left\{ z_k = \frac{2k\pi i}{\alpha} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\} \cap \Pi, \\ r_g(\alpha) &:= \min_{z \in Z_g(\alpha)} \{1, |e^{-z} - 1|\}, & Z_g(\alpha) &:= \left\{ z_k = \frac{(2k+1)\pi i}{\alpha} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cap \Pi, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$. При этом $r_f(\alpha) := 1$ и $r_g(\alpha) := 1$ соответственно при $Z_f(\alpha) = \emptyset$ и $Z_g(\alpha) = \emptyset$. Если $|\alpha|^2 \leq 4 \operatorname{Re} \alpha$, то $Z_f(\alpha) = \emptyset$ и, значит, $r_f(\alpha) = 1$. Если $|\alpha|^2 \leq 2 \operatorname{Re} \alpha$, то $Z_g(\alpha) = \emptyset$ и, значит, $r_g(\alpha) = 1$. В частности, $r_f(2) = r_g(2) = 1$. Кроме того, справедливы неравенства

$$r_f(\alpha) \geq \frac{2\pi/|\alpha|}{2\pi/|\alpha| + 1}, \quad r_g(\alpha) \geq \frac{\pi/|\alpha|}{\pi/|\alpha| + 1}, \quad \alpha \in \mathbb{C}_+. \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho) &= \frac{\ln^r \rho \ln(1/(1-\rho))}{\alpha r!} + \frac{(-1)^r}{\alpha r!} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=r+1}^n \frac{(-1)^k s(n,k) B_{k-r} k!}{(k-r)(k-r)!} \\ &\quad + a_0(r, \alpha, \beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k s(n,k) a_k(r, \alpha, \beta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $1 - r_f(\alpha) < \rho < 1$. Здесь $r_f(\alpha)$ определяется по формуле (13), $a_k(r, \alpha, \beta)$ определяются по формулам (4)–(6), $s(n, k)$ – числа Стирлинга первого рода, $B_n := B_n(0)$ – числа Бернулли. Если дополнительно $r \in \mathbb{N}$, то первое слагаемое можно записать в виде

$$\frac{\ln^r \rho \ln(1/(1-\rho))}{\alpha r!} = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{s(n,r)}{\alpha n!} (\rho-1)^n \ln \frac{1}{1-\rho}, \quad 0 < \rho < 1. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При любом $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\varepsilon u}}{u^{r+1}} &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (x-\varepsilon)^r e^{-ux} dx, \quad u \in \mathbb{C}_+, \quad \varepsilon \geq 0, \\ F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (x-\varepsilon)^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\alpha k + \beta)x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (x-\varepsilon)^r \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $r \in \mathbb{N}$, то в (17) можно считать $\varepsilon \geq 0$. После несложных преобразований получаем представление

$$\begin{aligned} &\Gamma(r+1) F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} ((x-\varepsilon)^r - (-\varepsilon)^r) \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx \\ &\quad + (-\varepsilon)^r \left(\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx + \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} - \frac{1}{\alpha x} \right) dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \frac{(-1)^{r+1} \varepsilon^r \ln \varepsilon}{\alpha} + \Gamma(r+1) f_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Функцию $f_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, можно записать в виде

$$\Gamma(r+1)f_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} (-\varepsilon)^{r-k} \left(A_k(\alpha, \beta) - \int_0^\varepsilon \frac{x^k e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx \right) + (-\varepsilon)^r \left(A_0(\alpha, \beta) - \int_0^\varepsilon \left(\frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} - \frac{1}{\alpha x} \right) dx \right), \quad \varepsilon > 0, \quad (19)$$

где слагаемые в первой сумме при $r = 0$ отсутствуют, $A_k(\alpha, \beta)$ – величины, которые зависят от k , α , β и не зависят от ε . Из представления (19) видно, что $f_{r,\alpha,\beta}$ – функция, аналитическая в круге $|z| < 2\pi/|\alpha|$. Поэтому функция $f_{r,\alpha,\beta}(z)$ в окрестности точки $z = 0$ раскладывается в степенной ряд, который сходится в круге $|z| < 2\pi/|\alpha|$. Следовательно,

$$F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{r+1} \varepsilon^r \ln \varepsilon}{\alpha \Gamma(r+1)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu(r, \alpha, \beta)}{\nu!} \varepsilon^\nu, \quad 0 < \varepsilon < \frac{2\pi}{|\alpha|}. \quad (20)$$

Если $r \in \mathbb{N}$, то при $0 \leq p \leq r-1$ имеем

$$a_p(r, \alpha, \beta) = F_{r,\alpha,\beta}^{(p)}(0) = (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha k + \beta)^{r-p+1}} = \frac{(-1)^p}{\Gamma(r-p+1)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{r-p} e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx. \quad (21)$$

Формулы (3) и (4) доказаны.

Докажем формулу (5). Из представлений (17) и (20) соответственно получаем

$$F_{r,\alpha,\beta}^{(r)}(\varepsilon) = (-1)^r \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx, \quad \varepsilon > 0, \quad (22)$$

$$F_{r,\alpha,\beta}^{(r)}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha \Gamma(r+1)} (\varepsilon^r \ln \varepsilon)^{(r)} + \sum_{\nu=r}^{\infty} \frac{a_\nu(r, \alpha, \beta)}{\Gamma(\nu - r + 1)} \varepsilon^{\nu-r}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{2\pi}{|\alpha|}.$$

Покажем, что

$$(\varepsilon^r \ln \varepsilon)^{(r)} = \Gamma(r+1)(\ln \varepsilon + b(r)), \quad (23)$$

где $b(0) = 0$ и $b(r) = \sum_{k=1}^r 1/k$, если $r \geq 1$. При $r = 0$ это равенство очевидно. Если $r \geq 1$, то

$$(\varepsilon^r \ln \varepsilon)^{(r)} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (\ln \varepsilon)^{(k)} (\varepsilon^r)^{(r-k)} = \Gamma(r+1)(\ln \varepsilon + b(r)),$$

где

$$b(r) = \sum_{k=1}^r \binom{r}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^r}{x} dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^r (1-x)^{k-1} dx = \sum_{k=1}^r \frac{1}{k}.$$

Теперь из (22), учитывая (23), получаем

$$a_r(r, \alpha, \beta) = \frac{(-1)^r}{\alpha} \left(b(r) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_{\alpha,\beta}(\varepsilon) \right), \quad (24)$$

где

$$I_{\alpha,\beta}(\varepsilon) = \alpha \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx + \ln \varepsilon = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx + \int_\varepsilon^1 \left(\frac{\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Тогда

$$f(\alpha, \beta) := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_{\alpha, \beta}(\varepsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} dx + \int_0^1 \left(\frac{\alpha e^{-\beta x}}{1 - e^{-\alpha x}} - \frac{1}{x} \right) dx. \quad (25)$$

Докажем, что

$$f(\alpha, \beta) = -\ln \alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta/\alpha + k} - \frac{1}{1/2 + k} \right) + 2 \ln 2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}_+. \quad (26)$$

При каждом фиксированном $\beta \in \mathbb{C}_+$ функции, стоящие в левой и правой частях равенства (26), являются аналитическими по $\alpha \in \mathbb{C}_+$. Поэтому в силу теоремы единственности равенство (26) достаточно доказать при любых $\beta \in \mathbb{C}_+$ и $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha > 0$. Делая в интегралах (25) замену переменной $\alpha x = t$ и вводя новую переменную $\gamma := \beta/\alpha$, получаем, что

$$f(\alpha, \beta) = \Psi(\alpha, \gamma) := \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} dt + \int_0^{\alpha} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \in \mathbb{C}_+.$$

Очевидно, $\partial \Psi / \partial \alpha = -1/\alpha$ и, значит, $\Psi(\alpha, \gamma) = -\ln \alpha + h(\gamma)$ и

$$h(\gamma) = \Psi(1, \gamma) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} dt + \int_0^1 \left(\frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt, \quad \gamma \in \mathbb{C}_+.$$

Первый интеграл – это преобразование Лапласа абсолютно интегрируемой функции, и, значит, его можно дифференцировать по параметру $\gamma \in \mathbb{C}_+$. Во втором интеграле функция

$$\frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{e^{-\gamma t} - 1}{1 - e^{-t}} + \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$$

и ее частная производная

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{e^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = -\frac{te^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}}$$

непрерывны по $(t, \gamma) \in [0, 1] \times \mathbb{C}$ (в точке $t = 0$ устранимая особенность). Поэтому второй интеграл можно дифференцировать по параметру $\gamma \in \mathbb{C}$. Тогда (см. (17) при $r = 1$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma$)

$$h'(\gamma) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\gamma t}}{1 - e^{-t}} dt = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\gamma + k)^2}, \quad \gamma \in \mathbb{C}_+.$$

Следовательно,

$$h(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\gamma + k} - \frac{1}{\gamma_0 + k} \right) + h(\gamma_0), \quad \gamma, \gamma_0 \in \mathbb{C}_+.$$

Значение $h(1/2)$ легко вычисляется следующим образом. Если $\alpha = 2$, $\beta = 1$, то $\gamma = 1/2$ и при $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} I_{2,1}(\varepsilon) &= 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx + \ln \varepsilon \\ &= -\ln \frac{e^{\varepsilon} - 1}{e^{\varepsilon} + 1} + \ln \varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(e^{\varepsilon} + 1)}{e^{\varepsilon} - 1} \rightarrow \ln 2, \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Поэтому $f(2, 1) = \ln 2$. С другой стороны,

$$f(2, 1) = \Psi\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\ln 2 + h\left(\frac{1}{2}\right)$$

и, значит, $h(1/2) = 2 \ln 2$. Равенство (26) доказано.

Для завершения доказательства формулы (5) надо воспользоваться следующим выражением для логарифмической производной Γ -функции:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{x+k} \right), \quad -x \notin \mathbb{Z}_+,$$

где $C = -\Gamma'(1)$ – постоянная Эйлера. Формула (5) полностью доказана.

Докажем формулу (6). Многочлены Бернулли $B_n(x)$ определяются с помощью следующей производящей функции (см., например, [8; гл. 1, § 13])

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_n(x), \quad |t| < 2\pi.$$

Из этого соотношения и (22) вытекает, что при $0 < \varepsilon < 2\pi/|\alpha|$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} F_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(\varepsilon) &= (-1)^{r+1} \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon}} = \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha\varepsilon} + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^r (-\alpha\varepsilon)^{\nu-r-1}}{(\nu-r)!} B_{\nu-r}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \\ F_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(\varepsilon) &= \frac{(-1)^{r+1}}{\alpha\varepsilon} + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(r, \alpha, \beta)}{\Gamma(\nu-r)} \varepsilon^{\nu-r-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем формулу (6). Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из представления (19) и теоремы о монодромии вытекает, что функция $f_{r,\alpha,\beta}(z)$ аналитически продолжается в любую односвязную область D конечной плоскости, которая содержит окрестность нуля и не содержит точек вида

$$z_k = \frac{2k\pi i}{\alpha}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0. \quad (28)$$

Поэтому функция $f_{r,\alpha,\beta}(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности любой точки $\zeta_0 \in D$ и радиус сходимости этого ряда совпадает с радиусом сходимости ряда Тейлора в точке ζ_0 для ее производной $f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$. Из равенств (18) и (27) и теоремы единственности вытекает следующее равенство:

$$f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z) = (-1)^{r+1} \left(\frac{e^{-\beta z}}{1 - e^{-\alpha z}} - \frac{1}{\alpha z} \right), \quad |z| < \frac{2\pi}{|\alpha|}, \quad (29)$$

которое показывает, что производная $f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$ аналитически продолжается во всю конечную плоскость $\mathbb{C}$, кроме точек вида (28), которые являются простыми полюсами для $f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$. Поэтому $f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности любой точки ζ_0 , отличной от полюсов (28), и его радиус сходимости равен расстоянию от ζ_0 до ближайшей особой точки функции $f_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$, т.е. до точек вида (28).

Таким образом, функция $f_{r,\alpha,\beta}(z)$ в окрестности точки $z = 0$ раскладывается в степенной ряд, радиус сходимости которого равен $2\pi/|\alpha|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Следствие 1 получается из следующего утверждения: если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится, например, абсолютно, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k = 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Поэтому

$$G_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) = 2F_{r,2\alpha,\beta}(\varepsilon) - F_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Осталось применить теорему 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следствие 1 можно доказать как и теорему 1, если воспользоваться представлением

$$\begin{aligned} G_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (x-\varepsilon)^r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(\alpha k + \beta)x} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} (x-\varepsilon)^r \frac{e^{-\beta x}}{1+e^{-\alpha x}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(r+1)} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\varepsilon)^{r-k} \left(B_k(\alpha, \beta) - \int_0^{\varepsilon} \frac{x^k e^{-\beta x}}{1+e^{-\alpha x}} dx \right) =: g_{r,\alpha,\beta}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (30)$$

где $\varepsilon > 0$. Следует только учесть, что из представления (30) вытекает, что $g_{r,\alpha,\beta}$ — функция, аналитическая в круге $|z| < \pi/|\alpha|$, и аналитически продолжается в любую односвязную область D конечной плоскости, которая содержит окрестность нуля и не содержит точек вида $z_k = (2k+1)\pi i/\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$. Из (30) также вытекает равенство

$$g_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z) = \frac{(-1)^{r+1} e^{-\beta z}}{1+e^{-\alpha z}}, \quad |z| < \frac{\pi}{|\alpha|}, \quad (31)$$

которое показывает, что производная $g_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$ аналитически продолжается во всю конечную плоскость $\mathbb{C}$, кроме точек вида $z_k = (2k+1)\pi i/\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, которые являются простыми полюсами для $g_{r,\alpha,\beta}^{(r+1)}(z)$. Поэтому функция $g_{r,\alpha,\beta}(z)$ в окрестности точки $z = 0$ раскладывается в степенной ряд, радиус сходимости которого равен $\pi/|\alpha|$.

Для вычисления $g_{r,\alpha,\beta}^{(\nu)}(0)$ при $\nu \geq r+1$ надо воспользоваться следующим определением многочленов Эйлера $E_n(x)$ (см., например, [8; гл. 1, § 14]):

$$\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E_n(x), \quad |t| < \pi.$$

Связь между многочленами Эйлера и Бернулли вытекает из следующего тождества:

$$\frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \frac{2e^{tx}}{e^t - 1} - \frac{4e^{tx}}{e^{2t} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{2}{n} \left(B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) \right), \quad 0 < |t| < \pi.$$

Поэтому

$$E_{n-1}(x) = \frac{2}{n} \left(B_n(x) - 2^n B_n\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если функция $h(t)$ имеет достаточное число производных в окрестности точки $t = 0$, то функция $q(\rho) := h(-\ln \rho)$ имеет столько же производных в окрестности точки $\rho = 1$. Очевидно, что $h(t) = q(e^{-t})$ в некоторой окрестности точки $t = 0$. Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ легко доказать, что

$$\begin{aligned} q^{(n)}(\rho) &= \rho^{-n} \sum_{k=1}^n a(n, k) h^{(k)}(-\ln \rho), \quad n \in \mathbb{N}, \\ h^{(n)}(t) &= \sum_{k=1}^n b(n, k) q^{(k)}(e^{-t}) e^{-kt}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (32)$$

где коэффициенты $a(n, j)$ и $b(n, j)$ не зависят от функции h . Берем $h(t) := e^{-xt}$, где x – произвольный параметр. Тогда $h^{(k)}(t) = (-x)^k e^{-xt}$ и $h^{(k)}(-\ln \rho) = (-x)^k \rho^x$, а $q(\rho) = \rho^x$ и

$$q^{(k)}(\rho) = (\rho^x)^{(k)} = x(x-1) \cdots (x-k+1) \rho^{x-k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Подставляя в (32) и сокращая первое равенство на ρ^{x-n} , а второе на e^{-tx} , получаем, что при всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a(n, k) (-x)^k &= x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=1}^n s(n, k) x^k, \\ \sum_{k=1}^n b(n, k) x(x-1) \cdots (x-k+1) &= (-x)^n = (-1)^n \sum_{k=1}^n \sigma(n, k) x(x-1) \cdots (x-k+1), \end{aligned}$$

где $s(n, k)$ и $\sigma(n, k)$ – числа Стирлинга соответственно первого и второго рода (см., например, [9; гл. 1, § 4]). В силу произвольности x получаем $a(n, k) = (-1)^k s(n, k)$, $b(n, k) = (-1)^n \sigma(n, k)$ и

$$\begin{aligned} q^{(n)}(1) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k s(n, k) h^{(k)}(0), \quad n \in \mathbb{N}, \\ h^{(n)}(0) &= (-1)^n \sum_{k=1}^n \sigma(n, k) q^{(k)}(1), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отметим, что для чисел Стирлинга справедливы следующие соотношения (здесь $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера):

$$\begin{aligned} s(n, n) &= 1, \quad s(n, 1) = (-1)^{n-1} (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s(n+1, k) &= s(n, k-1) - ns(n, k), \quad 2 \leq k \leq n, \\ \sum_{j=k}^n s(n, j) \sigma(j, k) &= \delta_{n,k}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ \sigma(n, r) &= \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n, \quad 1 \leq r \leq n. \end{aligned} \quad (34)$$

Если $0 < R < 1$, $w \in \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < R\}$ и Γ_w – отрезок, соединяющий точки 1 и w , то, очевидно, выполняется неравенство (берем ту ветвь логарифма, для которой

$$\ln 1 = 0)$$

$$|\ln w| = \left| \int_{\Gamma_w} \frac{dz}{z} \right| \leq |w - 1| \sup_{z \in \Gamma_w} \frac{1}{|z|} < \frac{R}{1 - R}.$$

Таким образом, доказана следующая

ЛЕММА 1. Если $R_1 > 0$ и функция $h(z)$ является аналитической в круге $|z| < R_1$, то функция $q(w) := h(-\ln w)$ ($\ln 1 = 0$) является аналитической по крайней мере в круге $|w - 1| < R_h$, где $R_h := R_1/(R_1 + 1)$ и

$$\begin{aligned} q(w) &= h(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k s(n, k) h^{(k)}(0), & |w-1| < R_h, \\ h(z) &= q(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (-1)^n \sum_{k=1}^n \sigma(n, k) q^{(k)}(1), & |z| < R_1. \end{aligned} \quad (35)$$

Применяя эту лемму к функции $h(z) = f_{r, \alpha, \beta}(z)$ из представления (18), получаем разложение (11), но только при $1 - R_f < \rho < 1$, где

$$R_f = \frac{2\pi/|\alpha|}{2\pi/|\alpha| + 1}.$$

Этот интервал можно расширить следующим образом.

Пусть Δ – комплексная плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Функция $z = -\ln w$ ($\ln 1 = 0$) является аналитической в области Δ и осуществляет конформное отображение этой области на полосу $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$. При этом правая полуплоскость $\mathbb{C}_+$ конформно отображается на полосу $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$. Функция $f_{r, \alpha, \beta}(z)$ (см. замечание 1) является аналитической в любой односвязной области G конечной плоскости, которая содержит окрестность нуля и не содержит точек вида $z_k = 2k\pi i/\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Так как $\operatorname{Re} \alpha > 0$, то в полосе Π может находиться лишь конечное число этих точек. Пусть r_f – наименьшее расстояние от точки $w = 1$ до точки $w = 0$ и до ближайшей точки вида $w_k = e^{-z_k}$, $z_k \in \Pi$ (если такие точки есть). Очевидно $0 < r_f \leq 1$. При любом $0 < R < r_f$ открытый круг

$$D_R := \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| < R\} \subset \mathbb{C}_+$$

при отображении $z = -\ln w$ конформно отображается на ограниченную односвязную область $G_R \subset \Pi$, которая содержит окрестность нуля и не содержит точек вида (28). Поэтому функция $q(w) := f_{r, \alpha, \beta}(-\ln w)$ является аналитической в круге D_{r_f} и, значит, раскладывается в этом круге по степеням $(w - 1)^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если $0 < r_f < 1$, то на окружности $|w - 1| = r_f$ есть хотя бы одна точка $w_k = e^{-z_k}$, $z_k \in \Pi$, и, значит, в этом случае r_f равен радиусу сходимости этого степенного ряда.

Таким образом, разложение (11) справедливо при $1 - r_f < \rho < 1$, где $r_f = r_f(\alpha)$ вычисляется по формуле (13). Если в $\mathbb{C}_+$ нет точек вида $w_k = e^{-z_k}$, $z_k \in \Pi$, что эквивалентно отсутствию точек z_k в Π , то $r_f = 1$. Этот случай реализуется, например, при $|\alpha|^2 \leq 4 \operatorname{Re} \alpha$.

Покажем, что $r_f \geq R_f$. Если $r_f = 1$, то это неравенство очевидно. Если $r_f < 1$, то по доказанному r_f равен радиусу сходимости первого ряда в (35) для случая $h(z) = f_{r, \alpha, \beta}(z)$ и, значит, $r_f \geq R_f$.

Теорема 2 для функции $F_{r,\alpha,\beta}$ доказана. Для функции $G_{r,\alpha,\beta}$ доказательство точно такое же. В этом случае (см. замечание 2) функция $g_{r,\alpha,\beta}(z)$ является аналитической в любой односвязной области G конечной плоскости, которая содержит окрестность нуля и не содержит точек вида $z_k = (2k+1)\pi i/\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если применить равенства (35) к функциям $h_1(z) = (-z)^r$ и $h_2(z) = (e^{-z} - 1)^r$, $r \in \mathbb{N}$, то получаем известные разложения (см., например, [9; гл. 3, § 2])

$$\frac{\ln^r w}{r!} = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{s(n, r)}{n!} (w-1)^n, \quad |w-1| < 1, \quad \frac{(e^z - 1)^r}{r!} = \sum_{n=r}^{\infty} \frac{\sigma(n, r)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Из (36) получаются следующие равенства для чисел Стирлинга

$$s(n, r) = \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \sum \frac{n!}{n_1 \cdots n_r}, \quad \sigma(n, r) = \frac{1}{r!} \sum \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (37)$$

где в обоих равенствах сумма берется по всем натуральным числам $n_1 \geq 1, \dots, n_r \geq 1$ таким, что $n_1 + \dots + n_r = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Функция

$$g(z) := \ln \frac{z}{1 - e^{-z}}$$

(здесь $\ln 1 = 0$) является аналитической в достаточно малой окрестности точки $z = 0$, $g(0) = 0$ и в этой окрестности

$$g'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^{n-1},$$

где $B_n := B_n(0)$ – числа Бернулли. Из последнего равенства вытекает, что функция $g(z)$ аналитически продолжается в круг $|z| < 2\pi$ и раскладывается в этом круге в ряд Тейлора в точке $z = 0$, радиус сходимости которого равен 2π и $g^{(n)}(0) = -B_n/n$ при $n \geq 1$. Поэтому при любом $r \in \mathbb{Z}_+$ функция $h(z) := -z^r g(z)$ также является аналитической в круге $|z| < 2\pi$ и раскладывается в этом круге в ряд Тейлора в точке $z = 0$, радиус сходимости которого равен 2π . Следовательно,

$$h(z) = -z^r \ln \frac{z}{1 - e^{-z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \cdot \frac{z^{n+r}}{n!}, \quad |z| < 2\pi.$$

Из этого равенства вытекает, что $h^{(n)}(0) = 0$ при $0 \leq n \leq r$ и

$$h^{(n)}(0) = \frac{B_{n-r} n!}{(n-r)(n-r)!} \quad \text{при } n \geq r+1.$$

Из леммы 1 вытекает, что функция

$$q(w) := h(-\ln w) = (-1)^{r+1} \ln^r w \ln \frac{\ln w}{w-1}$$

является аналитической в некоторой окрестности точки $w = 1$. Покажем, что эта функция аналитически продолжается в круг $|w - 1| < 1$. Для первого множителя $\ln^r w$ это очевидно. Рассмотрим второй множитель

$$f(w) = \ln \frac{\ln w}{w - 1}.$$

В достаточно малой окрестности точки $w = 1$ имеем

$$f'(w) = \frac{1}{w \ln w} - \frac{1}{w - 1}.$$

Из последнего равенства вытекает, что функция $f(w)$ (а вместе с ней и $q(w)$) аналитически продолжается в круг $|w - 1| < 1$. Учитывая лемму 1, получаем

$$(-1)^{r+1} \ln^r w \ln \frac{\ln w}{w - 1} = \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{(w - 1)^n}{n!} \sum_{k=r+1}^n \frac{(-1)^k s(n, k) B_{k-r} k!}{(k - r)(k - r)!}, \quad |w - 1| < 1. \quad (38)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} -\frac{\ln^r \rho \ln(-\ln \rho)}{\alpha r!} &= \frac{\ln^r \rho \ln(1/(1 - \rho))}{\alpha r!} - \frac{\ln^r \rho \ln(\ln \rho/(\rho - 1))}{\alpha r!} \\ &= \frac{\ln^r \rho \ln(1/(1 - \rho))}{\alpha r!} \\ &\quad + \frac{(-1)^r}{\alpha r!} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{(\rho - 1)^n}{n!} \sum_{k=r+1}^n \frac{(-1)^k s(n, k) B_{k-r} k!}{(k - r)(k - r)!}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $0 < \rho < 1$. Для завершения доказательства следствия 2 надо воспользоваться равенством (11), а если $r \geq 1$, то и равенством (36).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорему 1 для случая $\alpha = 2$, $\beta = 1$ можно уточнить следующим образом. Очевидно,

$$a_r(r, 2, 1) = \frac{(-1)^r}{2} (b(r) + \ln 2).$$

Известно, что

$$B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad B_{2p}\left(\frac{1}{2}\right) = (2^{1-2p} - 1)B_{2p}$$

при всех $p \in \mathbb{Z}_+$, где $B_n := B_n(0)$ – числа Бернулли. Поэтому при всех $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$a_{2p-1+r}(r, 2, 1) = 0 \quad \text{и} \quad a_{2p+r}(r, 2, 1) = \frac{(-1)^{r+1}}{2p} (1 - 2^{2p-1}) B_{2p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Следствие 1 для случая $\alpha = 2$, $\beta = 1$ также можно уточнить. Из хорошо известного равенства

$$\frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} - \frac{\Gamma'(1/4)}{\Gamma(1/4)} = \ln 2 + \frac{\pi}{2}$$

вытекает, что $b_r(r, 2, 1) = (-1)^r \pi/4$. Числа Эйлера E_n определяются из разложения

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E_n, \quad |t| < \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, $E_n = 2^n E_n(1/2)$. Поэтому

$$b_\nu(r, 2, 1) = \frac{(-1)^\nu}{2} E_{\nu-r-1}, \quad \nu \geq r+1.$$

Так как числа Эйлера с нечетными номерами равны нулю, то при всех $p \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$b_{2p+r}(r, 2, 1) = 0 \quad \text{и} \quad b_{2p-1+r}(r, 2, 1) = \frac{(-1)^{r+1}}{2} E_{2p-2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq \rho < 1$, то

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in W^r} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_\rho(t) dt \right| \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(r+1)} \frac{1 - (1 + ((2k+1)/2)(1-\rho^2))\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2(1-\rho \cos t)}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}$$

– бигармоническое ядро Пуассона. Это равенство при $r = 1$ в 1976 г. доказал Фалалеев [10], и было доказано снова в 2000 г. в работе Жигалла и Харкевича [11], а при $r \geq 2$ в 2002 г. доказано в работе Жигалла и Харкевича [12]. С точностью до множителя $4/\pi$ правая часть равенства (40) очевидно равна при $\alpha = 2$, $\beta = 1$ разности

$$F_{r,\alpha,\beta}(0) - F_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho) - \frac{1}{2}(1-\rho^2)F_{r-1,\alpha,\beta}(-\ln \rho)$$

при нечетном r и равна разности

$$G_{r,\alpha,\beta}(0) - G_{r,\alpha,\beta}(-\ln \rho) - \frac{1}{2}(1-\rho^2)G_{r-1,\alpha,\beta}(-\ln \rho)$$

при четном r . Поэтому из равенств (3), (7), (11), (12), (15) и (16) для правой части равенства (40) сразу получается разложение с явными коэффициентами как по степеням $\varepsilon = \ln(1/\rho)$, так и по степеням $(1-\rho)$.

Отметим, что в работах [10], [11] при $r = 1$ и [12] при $r \geq 2$ получено асимптотическое представление ряда (40) по степеням $(1-\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-0$. В [12] все коэффициенты этого разложения содержат как явные величины, так и величины, которые определяются по непростой рекуррентной формуле. При $r = 1$ в работе [11] коэффициенты хотя и выражаются явно, но при их нахождении допущена исправимая ошибка. На с. 973 работы [11] применяется результат Штарка [3] о разложении ряда (1) (для $r = 1$) по степеням $(1-\rho)$ при всех $0 < \rho < 1$. Но в работе Штарка получено лишь асимптотическое разложение по степеням $(1-\rho)$ при $\rho \rightarrow 1-0$, а это не одно и то же.

Отметим также, что рядами (40) выражаются точные значения приближения бигармоническими интегралами Пуассона не только на классе W^r , но и на классе $\bar{W}^r$, причем как в метрике L_∞ , так и в метрике L_1 (см., например, [11]–[14]).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что приведенные в 2005 г. в работе Харкевича и Кальчук [13] асимптотические разложения правой части равенства (40) по степеням $1/\delta = \ln 1/\rho$, $\delta \rightarrow +\infty$, не верны. Доказательства всех теорем из [13] опираются либо на лемму 3, либо на лемму 4 из этой же работы [13] и обе эти леммы не верны. Это не трудно показать на примере леммы 3. Эта лемма утверждает следующее. Пусть

$$\varphi(\delta) = (-1)^{m-1} \int_{1/\delta}^{\infty} \int_{t_{n-m}}^{\infty} \dots \int_{t_2}^{\infty} \ln \frac{1+e^{-t_1}}{1-e^{-t_1}} dt_1 \dots dt_{n-m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m \leq n,$$

и $g(\delta)$ – произвольная непрерывная на $(0, +\infty)$ функция, для которой выполняется условие $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \delta g(\delta) = K$, $K \in \mathbb{R}$. Тогда при $\delta \rightarrow +\infty$ имеет место полное асимптотическое разложение

$$g(\delta)\varphi(\delta) \cong \frac{\mu_0}{\delta^{n-m+1}} \ln \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\delta^k},$$

где коэффициенты μ_k вычисляются по формуле (17) из работы [13]. Из этой формулы для μ_k следует, что

- 1) $\mu_k = K\nu_k$, где числа ν_k зависят только от m и n и не зависят от функции g ;
- 2) $\nu_k \neq 0$ при $0 \leq k \leq n-m+1$;
- 3) $\nu_k = 0$ при всех $k > n-m+1$, для которых число $m+k-n$ является четным.

Таким образом, для произвольной непрерывной функции $g_0(\delta)$, для которой выполняется условие $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \delta g_0(\delta) = 0$, функции $g(\delta)\varphi(\delta)$ и $(g(\delta) + g_0(\delta))\varphi(\delta)$ имеют одинаковые асимптотические разложения при $\delta \rightarrow +\infty$, что, очевидно, не верно. При доказательстве этой леммы многократно и неявно используется следующее ошибочное рассуждение. Пусть функции φ и g из леммы,

$$h(\delta) = \delta^{-k} \ln^q \delta, \quad f(\delta) = P(\delta^{-1}) + Q(\delta^{-1}) \ln \delta, \quad q \in \{0; 1\},$$

$k-1 \in \mathbb{N}$, P – алгебраический многочлен степени не выше $k-2$, не равный тождественно нулю, если $K \neq 0$, а Q – алгебраический многочлен степени не выше $k-2$, если $q = 1$ и степени не выше $k-1$, если $q = 0$. Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{g(\delta)\varphi(\delta) - \delta^{-1}f(\delta)}{h(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \frac{K\delta^{-1}\varphi(\delta) - \delta^{-1}f(\delta)}{h(\delta)}.$$

Здесь слагаемое $g(\delta)\varphi(\delta)$ в числителе заменяется на слагаемое $K\delta^{-1}\varphi(\delta)$, чего, очевидно, делать нельзя. Утверждение леммы 4 такое же, как и леммы 3, только с другой функцией φ . Отметим также, что все теоремы из работы Харкевича и Кальчук [14] также не верны, так как при их доказательстве используются теоремы из работы [13]. Указанные выше неверные результаты содержатся также и в третьем разделе диссертации Кальчук [15].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ф. Тиман, “Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона”, *Докл. АН СССР*, **74**:1 (1950), 17–20.
- [2] Л. В. Малей, “Точная оценка приближения квазигладких функций интегралами Пуассона”, *Докл. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук*, 1961, № 3, 25–32.

- [3] Э.Л. Штарк, “Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip\ 1$ от сингулярного интеграла Абеля–Пуассона”, *Матем. заметки*, **13**:1 (1973), 21–28.
- [4] К.М. Жигалло, Ю.И. Харкевич, “Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона”, *Укр. матем. журн.*, **54**:1 (2002), 43–52.
- [5] В.А. Баскаков, “О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля–Пуассона”, *Матем. заметки*, **17**:2 (1975), 169–180.
- [6] Ю.И. Харкевич, И.В. Кальчук, “Асимптотичні розклади верхніх меж наближень диференційовних функцій їх гармонійними інтегралами Пуассона в рівномірній та інтегральній метриках”, *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання*, Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **1**, 1, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2004, 389–412.
- [7] С.А. Теляковский, “О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера”, *Укр. матем. журн.*, **21**:3 (1969), 334–343.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.
- [9] В.Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, Наука, М., 1982.
- [10] Л.П. Фалалеев, “Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip\ 1$ от одного сингулярного оператора”, *Теоремы вложения и их приложения*, Материалы Всесоюзного симпозиума (Алма-Ата, 1973), Наука КазССР, Алма-Ата, 1976, 163–167.
- [11] К.М. Жигалло, Ю.И. Харкевич, “Про наближення функцій класу Гельдера бігармонійними інтегралами Пуассона”, *Укр. матем. журн.*, **52**:7 (2000), 971–974.
- [12] К.М. Жигалло, Ю.И. Харкевич, “Наближення диференційовних періодичних функцій їх бігармонійними інтегралами Пуассона”, *Укр. матем. журн.*, **54**:9 (2002), 1213–1219.
- [13] Ю.И. Харкевич, И.В. Кальчук, “Повні асимптотики точних верхніх меж відхилень бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій”, *Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання*, Зб. праць Ін-ту матем. НАН України, **2**, 2, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2005, 311–335.
- [14] Ю.И. Харкевич, И.В. Кальчук, “Асимптотика величин наближення в середньому класів диференційовних функцій за допомогою бігармонійних інтегралів Пуассона на класах диференційовних функцій”, *Укр. матем. журн.*, **59**:8 (2007), 1105–1115.
- [15] И.В. Кальчук, *Приближение дифференцируемых функций линейными методами суммирования их рядов и интегралов Фурье*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 2007.

В. П. Заставный

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: zastavn@rambler.ru, zastavn@skif.net

Поступило

10.06.2008

Исправленный вариант

24.12.2008