Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, Об аналоге формулы Адамара для первого эллипса мероморфности, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 4, 552–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:40:25

Об аналоге формулы Адамара для первого эллипса мероморфности

В. И. Буслаев

Пусть P_n – ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены, построенные по удовлетворяющей условию Сегё весовой функции. В статье в терминах коэффициентов F_n найден первый эллипс мероморфности функции $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z)$, т.е. максимальный из эллипсов с фокусами в точках ± 1 , в который функция F продолжается как мероморфная функция, имеющая не более одного полюса.

Библиография: 7 названий.

Введение. 1. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \quad (1)$$

– разложение в степенной ряд функции, голоморфной в окрестности нуля. Одной из основных задач комплексного анализа является задача описания свойств функции непосредственно по коэффициентам ее разложения $\{f_n\}$. Фундаментальными результатами в этом направлении являются классическая формула Коши–Адамара для радиуса круга голоморфности функции и обобщающие ее формулы Адамара [1] для радиусов кругов мероморфности.

Пусть $R_m(f)$ – m -й радиус мероморфности функции f , т.е. максимальное из чисел R таких, что функция f допускает мероморфное продолжение в круг $|z| < R$ и имеет в этом круге не более m полюсов. Положим

$$f_{0,n} = 1, \quad f_{m,n} = \det(f_{n+i-j})_{i,j=0,\dots,m-1}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

ТЕОРЕМА АДАМАРА. Пусть f – голоморфная в точке $z = 0$ функция. Тогда в приведенных обозначениях имеют место равенства

$$R_m(f) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{m,n}|^{1/n} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{m+1,n}|^{1/n} \right)^{-1}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Частным случаем при $m = 0$ формул (2) является формула Коши–Адамара

$$R_0(f) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

для радиуса круга голоморфности функции f .

Работа выполнена при поддержке программы “Современные проблемы теоретической математики” ОМН РАН, Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00317) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3906.2008.1).

Из теоремы Адамара следует, что если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{m+1,n}|^{1/n} = 0$, то функция f мероморфна во всей комплексной плоскости и имеет не более m полюсов. Если $f_{m+1,n} = 0$ при всех $n \geq n_0$, то последнее утверждение в этом случае уточняется критерием Кронекера [2] рациональности функции.

КРИТЕРИЙ КРОНЕКЕРА. Пусть (1) – разложение в степенной ряд голоморфной в окрестности нуля функции. Тогда при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $f_{m+1,n} = 0$ при всех $n \geq n_0$;
- 2) функция f является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов.

2. Пусть σ – неубывающая функция на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая условию Сегё

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln \sigma'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > -\infty, \quad (3)$$

и пусть $P_n(z) = c_n z^n + \dots$, $n = 0, 1, \dots$, – последовательность ортонормированных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) d\sigma(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Хорошо известно [3], что если весовая функция σ удовлетворяет условию Сегё, то существуют равномерные внутри области $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n(z)}{\psi^n(z)} = P(z) \neq 0, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(z) \psi^{n+1}(z) = H(z) \neq 0, \quad (6)$$

где $\psi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, отображающая область G на внешность единичного круга,

$$H_n(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{z - x} d\sigma(x) \quad (7)$$

– функции второго рода.

Из (5) следует, что каноническими областями сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ являются эллипсы

$$D_\rho = [-1, 1] \cup \{z \in \mathbb{C} : |\psi(z)| < \rho\}, \quad \text{если } \rho > 1, \quad D_\rho = \emptyset, \quad \text{если } \rho \leq 1,$$

фокусы которых совпадают с точками ± 1 . При этом параметр ρ эллипса сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z)$ равен $(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n})^{-1}$.

Пусть F – функция, голоморфная в окрестности отрезка $[-1, 1]$. Известно [3], что функция F может быть разложена в ряд по ортонормированным многочленам $P_n(z)$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(z), \quad \text{где } F_n = \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) d\sigma(x). \quad (8)$$

Так как ряд (8) равномерно сходится внутри эллипса D_ρ , $\rho = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n})^{-1}$, то

$$\rho_0(F) \geq \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \right)^{-1},$$

где $\rho_0(F)$ – максимальное из чисел ρ таких, что функция F имеет голоморфное продолжение в эллипс D_ρ . С другой стороны, если ρ – произвольное число, не превосходящее $\rho_0(F)$, то, полагая $\Gamma_\rho = \{|\psi(z)| = \rho\}$ и пользуясь равенством (8) для коэффициентов F_n , формулой Коши и определением (7) функций второго рода, имеем равенство

$$F_n = \int_{-1}^1 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{F(z)}{z-x} dz P_n(x) d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} F(z) H_n(z) dz.$$

Отсюда и из равенства (6) получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \leq \rho_0^{-1}(F).$$

Таким образом, для функции F , голоморфной в окрестности отрезка $[-1, 1]$, имеет место аналог формулы Коши–Адамара

$$\rho_0(F) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \right)^{-1}. \quad (9)$$

Обозначим через $\rho_m(F)$ максимальное из чисел ρ таких, что функция F допускает мероморфное продолжение в эллипс D_ρ и имеет в этом эллипсе не более m полюсов. Эллипс $D_{\rho_m(F)}$ назовем m -м эллипсом мероморфности функции F . Основное содержание данной статьи составляет следующая теорема, дающая формулу для вычисления параметра первого эллипса мероморфности.

ТЕОРЕМА. Пусть F – функция, голоморфная в окрестности отрезка $[-1, 1]$, и пусть $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены, построенные по весовой функции σ , удовлетворяющей условию Сегё (3). Тогда

1) имеет место равенство

$$\rho_1(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n|^{1/n} \right)^{-1}, \quad (10)$$

где

$$F_n = \int_{-1}^1 F(x) P_n(x) d\sigma(x), \quad G_n = \int_{-1}^1 x F(x) P_n(x) d\sigma(x); \quad (11)$$

2) функция F является рациональной функцией, имеющей не более одного полюса, тогда и только тогда, когда

$$F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n = 0 \quad \text{при всех } n \geq n_0.$$

Утверждения 1) и 2) теоремы являются соответственно аналогами теоремы Адамара и критерия Кронекера при $m = 1$. При $m > 1$ выскажем следующую гипотезу.

ГИПОТЕЗА. Пусть F – функция, голоморфная в окрестности отрезка $[-1, 1]$, и пусть $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$ многочлены, построенные по весовой функции σ , удовлетворяющей условию Сегё (3). Тогда

1) имеют место равенства

$$\rho_m(F) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{m,n}|^{1/n} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{m+1,n}|^{1/n} \right)^{-1}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

где

$$\Delta_{0,n} = 1, \quad \Delta_{m,n} = \det \left(\int_{-1}^1 x^j F(x) P_{n+i}(x) d\sigma(x) \right)_{i,j=0,\dots,m-1}, \quad m = 1, 2, \dots;$$

- 2) функция F является рациональной функцией, имеющей не более m полюсов, тогда и только тогда, когда $\Delta_{m+1,n} = 0$ при всех $n \geq n_0$.

Заметим, что

$$f_{m,n} = \det([z^j f(z)]_{n+i})_{i,j=0,\dots,m-1}, \quad \Delta_{m,n} = \det(\{z^j F(z)\}_{n+i})_{i,j=0,\dots,m-1},$$

где символом $[\cdot]_n$ обозначается коэффициент при z^n разложения функции, стоящей в квадратных скобках, в степенной ряд, а символом $\{\cdot\}_n$ – коэффициент при $P_n(z)$ разложения функции, стоящей в фигурных скобках, в ряд по ортонормированным многочленам. Это замечание подчеркивает аналогичность формул (12) формулам Адамара (2).

При $m = 0$ равенство (12) совпадает с равенством (9) (аналогом формулы Коши–Адамара), а при $m = 1$ – с равенством (10). Заметим, что неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{m+1,n}|^{1/n} \leq (\rho_0(F) \cdots \rho_m(F))^{-1} \quad (13)$$

следует из определения величины $\Delta_{m,n}$ и аналога формулы Коши–Адамара (9) (при $m = 1$ соответствующее рассуждение приведено в начале второго раздела). Поэтому для доказательства гипотезы достаточно доказать, что строгое неравенство в (13) невозможно. Более того, можно показать (при $m = 1$ см. раздел 2), что для доказательства гипотезы достаточно иметь следующее утверждение: *строгое неравенство*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{m+1,n}|^{1/n} < (\rho_0(F) \cdots \rho_m(F))^{-1}$$

влечет за собой существование предела $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_{m,n}|^{1/n}$. Доказательству этого утверждения при $m = 1$ посвящен следующий раздел.

1. Лемма Адамара и ее аналог. При доказательстве формул (2) Адамар использовал следующую лемму.

ЛЕММА АДАМАРА. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2|^{1/n} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{2/n} < \infty.$$

Тогда существует предел отношения $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}/f_n$.

Доказательство формулы (10) будет опираться на утверждение, близкое к лемме Адамара.

ЛЕММА. Пусть последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют пределы, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \neq 0$, а последовательность $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n|^{1/n} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{2/n} < 1, \quad (14)$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} F_n & A_n F_{n-1} + B_n F_n + C_n F_{n+1} \\ F_{n+1} & A_{n+1} F_n + B_{n+1} F_{n+1} + C_{n+1} F_{n+2} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Тогда существует предел отношения $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n$.

Доказательство второй части теоремы (аналога критерия Кронекера) будет использовать следующее дополнение к лемме, касающееся случая $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} = 0$.

ДОПОЛНЕНИЕ К ЛЕММЕ. Пусть последовательности $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ такие же, как и в лемме, а последовательность $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ такова, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} = 0 \quad \text{и} \quad \Delta_n = 0 \quad \text{при всех } n \geq n_0.$$

Тогда $F_n = 0$ при всех $n \geq n_1$.

В процессе доказательства леммы будет использована теорема Пуанкаре о рекуррентных соотношениях с предельно постоянными коэффициентами [4] и полученный автором в [5] ее усиленный вариант.

ТЕОРЕМА ПУАНКАРЕ (в усиленной формулировке). Пусть последовательность $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ является решением разностного уравнения

$$F_{n+k} + \alpha_{1,n} F_{n+k-1} + \dots + \alpha_{k,n} F_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

с предельно постоянными коэффициентами $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$, $j = 1, \dots, k$. Тогда либо $F_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, либо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n}$ равен модулю одного из корней характеристического многочлена $z^k + \alpha_1 z^{k-1} + \dots + \alpha_k$ и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+l} + \beta_1 F_{n+l-1} + \dots + \beta_l F_n}{|F_{n+l-1}| + \dots + |F_n|} = 0, \quad (17)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_l$ — коэффициенты многочлена $z^l + \beta_1 z^{l-1} + \dots + \beta_l = \prod_{j=1}^l (z - \lambda_j)$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — корни характеристического многочлена, равные по модулю значению $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n}$.

Если все корни характеристического многочлена различны по модулю (а именно такое условие присутствует в предположениях классической теоремы Пуанкаре), то в этом случае число l не может быть строго больше 1 и, следовательно, $l = 1$ и равенство (17) означает, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n$ и этот предел равен одному из корней характеристического многочлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Положим $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n}$. Из неравенства (14) следует, во-первых, что $0 < r < 1$ и, во-вторых, что найдется положительное число δ_0 и индекс n_0 такие, что при всех $n \geq n_0$ имеют место неравенства

$$|\Delta_n| \leq r^{2n} e^{-11\delta_0 n}. \quad (18)$$

Фиксируем положительное число $\delta \leq \delta_0$ столь малым, чтобы наряду с неравенством (18) выполнялось также и неравенство

$$4\delta + r e^{6\delta} \leq 1. \quad (19)$$

Легко видеть, что, не теряя в общности, можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0. \quad (20)$$

Имея в наличии равенства (19) и (20), фиксируем также индекс $n_1 \geq n_0$ такой, чтобы при всех $n \geq n_1$ выполнялись неравенства

$$\left| 1 - \frac{A_n}{C_n} \right| + \left| \frac{B_n}{C_n} \right| + 2 \left| 1 - \frac{1}{C_n} \right| < \frac{\delta^2}{4}, \quad (21)$$

$$e^{-n_1 \delta} \leq 8^{-1} e^{-7\delta} \min\{r^2 \delta^2 (1 - e^{-\delta}), 1 - r^{1/2} e^{3\delta}\}. \quad (22)$$

Положим

$$\Lambda = \{n \geq n_1 : |F_n| \geq r^n e^{-5\delta n}\}, \quad \Lambda^* = \mathbb{N} \setminus \Lambda. \quad (23)$$

Так как $\overline{\lim}_{n \in \Lambda^*} |F_n|^{1/n} \leq r e^{-5\delta}$, то

$$\overline{\lim}_{n \in \Lambda} |F_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} = r. \quad (24)$$

Положим

$$\tau_n = \frac{A_n F_{n-1} + B_n F_n + C_n F_{n+1}}{F_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (25)$$

и выделим в дальнейшем доказательстве леммы некоторые узловые моменты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $n, n+1 \in \Lambda$. Тогда

$$|\tau_{n+1} - \tau_n| \leq r^{-1} e^{(5-n)\delta}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, заметим, что с учетом определений (15) и (25) имеет место равенство

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \begin{vmatrix} 1 & \tau_n \\ 1 & \tau_{n+1} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_n}{F_n F_{n+1}}.$$

Из этого равенства, неравенства (18) и определения (23) последовательности Λ получаем неравенство

$$|\tau_{n+1} - \tau_n| \leq \frac{r^{2n} e^{-11\delta n}}{r^{(2n+1)} e^{-5(2n+1)\delta}} = r^{-1} e^{(5-n)\delta},$$

совпадающее с неравенством (26).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть множество Λ^* конечно. Тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть N – максимальное из чисел конечного множества Λ^* . Тогда $n \in \Lambda$ при всех $n > N$. Поэтому по предложению 1 при всех $n > N$ имеют место неравенства (26). Это означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\tau_{n+1} - \tau_n)$ сходится. Следовательно, последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$. Перепишем равенства (25) в виде соотношений

$$C_n F_{n+1} + (B_n - \tau_n) F_n + A_n F_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

и заметим, учитывая равенства (20), что коэффициенты C_n , $B_n - \tau_n$, A_n в этих соотношениях имеют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (B_n - \tau_n) = -\tau. \quad (28)$$

Из равенств (28) следует, что характеристический многочлен соотношений (27) с предельно постоянными коэффициентами равен $z^2 - \tau z + 1$. Пусть α и β – корни этого многочлена, упорядоченные таким образом, что $|\alpha| \geq 1 \geq |\beta|$. Из теоремы Пуанкаре (в усиленной формулировке) следует, что либо $r = 0$, либо $r = |\alpha|$, либо $r = |\beta|$. Так как $0 < r < 1 \leq |\alpha|$, то $r = |\beta| < 1$ и $|\alpha| > |\beta|$. Таким образом, корни характеристического многочлена соотношений (27) различны по модулю. Поэтому из теоремы Пуанкаре получаем требуемое утверждение о существовании предела $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n$.

Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что предположение о бесконечности множества Λ^* приводит к противоречию. Предположим, что множество Λ^* бесконечно. Фиксируем индекс $n_2 > n_1$ такой, что $n_2 \in \Lambda$, $n_2 - 1 \in \Lambda^*$. Представим множество $\Lambda \cap \{n \geq n_2\}$ в виде бесконечного объединения $\bigsqcup_{k=2}^{\infty} I_k$ непесекающихся множеств $I_k = \{n_k, n_k + 1, \dots, m_k\}$ таких, что $n_k - 1 \in \Lambda^*$, $m_k + 1 \in \Lambda^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для всякого $n \in I_k$, где $k = 2, 3, \dots$, имеет место неравенство

$$|\tau_n - \tau_{n_k}| \leq \frac{\delta^2}{8}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как все индексы $n, n - 1, \dots, n_k$ принадлежат $I_k \subset \Lambda$, то из предложения 1 (неравенства (26)) и выбора индекса $n_1 \leq n_k$ (см. неравенство (22)) следует неравенство

$$\begin{aligned} |\tau_n - \tau_{n_k}| &= |(\tau_n - \tau_{n-1}) + \dots + (\tau_{n_k+1} - \tau_{n_k})| \\ &\leq r^{-1} e^{(5-n_k)\delta} (1 + e^{-\delta} + \dots) = r^{-1} e^{(5-n_k)\delta} \frac{1}{1 - e^{-\delta}} \leq \frac{\delta^2}{8}, \end{aligned}$$

совпадающее с неравенством (29).

Далее, через α_n и β_n будем обозначать корни многочлена $z^2 - \tau_n z + 1$, где τ_n определены равенством (25). По формулам Виета

$$\alpha_n + \beta_n = \tau_n \quad \text{и} \quad \alpha_n \beta_n = 1. \quad (30)$$

Будем считать, что α_n и β_n упорядочены таким образом, что $|\alpha_n| \geq 1 \geq |\beta_n|$.

Положим $I_k^* = I_k \cup \{m_k + 1\}$. При $n \in I_k^*$ введем в рассмотрение следующие величины:

$$u_n = \alpha_{n_k} F_n - F_{n-1}, \quad (31)$$

$$v_n = \beta_{n_k} F_n - F_{n-1}, \quad (32)$$

$$\omega_n = \max\{|u_n|, |v_n|\}, \quad \gamma_n = \max\{|u_n|, |v_n|, \delta|F_{n-1}|\}, \quad (33)$$

$$\theta_n = \left(1 - \frac{A_n}{C_n}\right) F_{n-1} + \left(\frac{\tau_n - B_n}{C_n} - \tau_{n_k}\right) F_n. \quad (34)$$

Заметим, что множества I_k^* не пересекаются между собой и, следовательно, введенные величины однозначно определены при всех $n \in \bigsqcup_{k=2}^{\infty} I_k^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $n \in I_k^*$ для введенных величин u_n , v_n , θ_n и γ_n имеют место следующие равенства:

$$(\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}) F_n = u_n - v_n, \quad (35)$$

$$(\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}) F_{n-1} = \beta_{n_k} u_n - \alpha_{n_k} v_n, \quad (36)$$

$$F_n = \beta_{n_k} (u_n + F_{n-1}) = \alpha_{n_k} (v_n + F_{n-1}), \quad (37)$$

а при $n \in I_k$ — равенства

$$u_{n+1} = \alpha_{n_k} (u_n + \theta_n), \quad v_{n+1} = \beta_{n_k} (v_n + \theta_n) \quad (38)$$

и неравенство

$$|\theta_n| \leq \delta \gamma_n. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенства (35)–(37) являются очевидными следствиями равенств (31)–(32) и равенства $\alpha_{n_k}\beta_{n_k} = 1$.

Из равенства (27) следует, что

$$F_{n+1} = \frac{\tau_n - B_n}{C_n} F_n - \frac{A_n}{C_n} F_{n-1}.$$

Поэтому из определений (31) и (34) величин u_n и θ_n с учетом формул Виета (30) имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \beta_{n_k} u_{n+1} - u_n &= (F_{n+1} - \beta_{n_k} F_n) - (\alpha_{n_k} F_n - F_{n-1}) \\ &= \left(\frac{\tau_n - B_n}{C_n} F_n - \frac{A_n}{C_n} F_{n-1} - \beta_{n_k} F_n \right) + (F_{n-1} - \alpha_{n_k} F_n) \\ &= \left(1 - \frac{A_n}{C_n} \right) F_{n-1} + \left(\frac{\tau_n - B_n}{C_n} - \beta_{n_k} - \alpha_{n_k} \right) F_n = \theta_n, \end{aligned}$$

доказывающую первое из равенств (38). Второе из равенств (38) доказывается аналогично (в полученной цепочке равенств буквы α , β и u меняются соответственно на β , α и v).

Докажем неравенство (39). С учетом первого из равенств (37) и из определения (33) величины γ_n имеем неравенство

$$\max\{|F_{n-1}|, |\alpha_{n_k} F_n|\} \leq \max\{|F_{n-1}|, |u_n| + |F_{n-1}|\} \leq \gamma_n(1 + \delta^{-1}) \leq 2\delta^{-1}\gamma_n.$$

Поэтому непосредственно из определения (34) величины θ_n с учетом неравенств $|\tau_{n_k}| = |\alpha_{n_k} + \beta_{n_k}| \leq 2|\alpha_{n_k}|$, (29) и (21) получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\theta_n| &\leq \left| \left(1 - \frac{A_n}{C_n} \right) F_{n-1} \right| + \left(\frac{|B_n| + |\tau_n - \tau_{n_k}|}{|C_n|} + \left| \frac{\tau_{n_k}}{C_n} - \tau_{n_k} \right| \right) |F_n| \\ &\leq \max\{|F_{n-1}|, |\alpha_{n_k} F_n|\} \left(\left| 1 - \frac{A_n}{C_n} \right| + \frac{|B_n| + \delta^2/8}{|C_n|} + 2 \left| \frac{1}{C_n} - 1 \right| \right) \\ &\leq 2\delta^{-1}\gamma_n \left(\frac{\delta^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} \right) = \delta\gamma_n, \end{aligned}$$

совпадающее с неравенством (39).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При всех $n, l \in I_k^*$, $n \leq l$, имеют место неравенства

$$\gamma_l \geq (|\beta_{n_k}| e^{-2\delta})^{l-n} \gamma_n. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения (33) величины γ_n , равенств (38) и (37) и неравенств $|\beta_{n_k}| \leq 1 \leq |\alpha_{n_k}|$, (39) и (19) при $n \in I_k$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \max\{|u_{n+1}|, |v_{n+1}|, \delta|F_n|\} \geq |\beta_{n_k}| \max\{|u_n| - |\theta_n|, |v_n| - |\theta_n|, \delta(|F_{n-1}| - |u_n|)\} \\ &\geq |\beta_{n_k}| (\max\{|u_n|, |v_n|, \delta|F_{n-1}|\} - \max\{|\theta_n|, \delta|u_n|\}) \\ &\geq |\beta_{n_k}| (\gamma_n - \delta\gamma_n) \geq |\beta_{n_k}| e^{-2\delta} \gamma_n. \end{aligned}$$

Последовательно пользуясь этим неравенством при индексах $n, n+1, \dots, l-1$, получим требуемое неравенство (40).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $|\beta_{n_k}| \leq re^{3\delta}$, то

$$\frac{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}| + |\beta_{n_k}|} \geq 2\delta \quad (41)$$

и $\gamma_n = \omega_n$ при всех $n \in I_k^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, с учетом равенства $\alpha_{n_k}\beta_{n_k} = 1$ и неравенства (19) при указанном условии на β_{n_k} имеем неравенство

$$2 \frac{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}| + |\beta_{n_k}|} \geq \frac{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}|} = 1 - |\beta_{n_k}|^2 \geq 1 - r^2 e^{6\delta} \geq 4\delta, \quad (42)$$

совпадающее с неравенством (41). Из равенства (36), определения (33) величины ω_n и неравенства (41) при $n \in I_k^*$ получаем неравенство

$$|F_{n-1}| \leq \frac{|\beta_{n_k} u_n| + |\alpha_{n_k} v_n|}{|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}|} \leq \frac{|\beta_{n_k}| + |\alpha_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|} \omega_n \leq \frac{1}{2\delta} \omega_n.$$

Отсюда и из определения (33) величин ω_n и γ_n следует равенство $\gamma_n = \omega_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть для некоторого индекса $n^* \in I_k$ имеют место неравенства

$$|v_{n^*}| \leq |u_{n^*}| \quad \text{и} \quad \gamma_{n^*} \geq (re^{-4\delta})^{n^*}. \quad (43)$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\beta_{n_k}| \geq re^{3\delta}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим противное, а именно, предположим, что $|\beta_{n_k}| < re^{3\delta}$. Тогда применимо предложение 6. Поэтому неравенства (43) можно записать в виде неравенств

$$|v_{n^*}| \leq |u_{n^*}| = \omega_{n^*} \quad \text{и} \quad \omega_{n^*} \geq (re^{-4\delta})^{n^*}, \quad (45)$$

а неравенства (39) – в виде неравенств

$$|\theta_n| < \delta \omega_n, \quad n \in I_k. \quad (46)$$

Из равенств (38), первого из неравенств (45), неравенства (46), предположения $|\beta_{n_k}| < re^{3\delta}$ и неравенства (19) получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |v_{n^*+1}| &= |\beta_{n_k}(v_{n^*} + \theta_{n^*})| \leq |\beta_{n_k}|(1 + \delta)\omega_{n^*} \leq re^{4\delta}\omega_{n^*} \\ &\leq \omega_{n^*} \leq r^{-1}e^{-5\delta}\omega_{n^*} \leq |\alpha_{n_k}|(1 - \delta)\omega_{n^*} \leq |\alpha_{n_k}|(u_{n^*} + \theta_{n^*}) = |u_{n^*+1}|. \end{aligned}$$

Из этой цепочки неравенств имеем неравенство $|v_{n^*+1}| \leq |u_{n^*+1}| = \omega_{n^*+1}$, а также неравенство $\omega_{n^*}^* \leq \omega_{n^*+1}$. Из последнего неравенства и второго из неравенств (45) следует, что $\omega_{n^*+1} \geq (re^{-4\delta})^{n^*+1}$. Таким образом, пара неравенств (45) выполняется и для индекса n^*+1 . Последовательно пользуясь приведенным рассуждением, получим, что при всех индексах $n = n^*, n^*+1, \dots, m_k$ выполняется пара неравенств (45).

В частности, это верно для индекса $n = m_k$. Поэтому из равенств (35), (38) и неравенства (45) следует неравенство

$$\begin{aligned} |F_{m_k+1}| &= \left| \frac{u_{m_k+1} - v_{m_k+1}}{\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}} \right| = \left| \frac{\alpha_{n_k}(u_{m_k} + \theta_{m_k}) - \beta_{n_k}(v_{m_k} + \theta_{m_k})}{\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}} \right| \\ &\geq \frac{|\alpha_{n_k}|(1 - \delta) - |\beta_{n_k}|(1 + \delta)}{|\alpha_{n_k}| + |\beta_{n_k}|} \omega_{m_k} = \left(\frac{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}| + |\beta_{n_k}|} - \delta \right) (re^{-4\delta})^{m_k}. \end{aligned}$$

Отсюда, из неравенства (41) и из неравенства (22), фиксирующего индекс $n_1 \leq m_k$, получаем неравенство

$$|F_{m_k+1}| \geq \delta(re^{-4\delta})^{m_k} \geq (re^{-5\delta})^{(m_k+1)}.$$

По определению (23) множеств Λ и Λ^* это означает, что $m_k+1 \in \Lambda$, что противоречит условию $m_k+1 \in \Lambda^*$. Полученное противоречие доказывает неравенство (44).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть при некотором $k \geq 2$ имеют место неравенства

$$|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}, \quad (47)$$

$$\gamma_{m_k+1} \geq (re^{-4\delta})^{m_k+1}. \quad (48)$$

Тогда

$$|F_{m_k}| \geq e^{-\delta} \gamma_{m_k+1}, \quad (49)$$

$$n_{k+1} = m_k + 2, \quad (50)$$

$$\gamma_{n_{k+1}} \geq re^{\delta} \gamma_{m_k+1}, \quad (51)$$

$$|\beta_{n_{k+1}}| \geq re^{3\delta}. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из определения (23) множеств Λ и Λ^* и условия $m_k+1 \in \Lambda^*$ имеем неравенство $|F_{m_k+1}| \leq (re^{-5\delta})^{m_k+1}$. Из этого неравенства и неравенства (48) имеем неравенство

$$|F_{m_k+1}| \leq e^{-\delta(m_k+1)} \gamma_{m_k+1}. \quad (53)$$

Из равенств (37) и определения (33) величины γ_{m_k+1} имеем неравенство

$$\begin{aligned} |F_{m_k}| &= \max\{|u_{m_k+1} - \alpha_{n_k} F_{m_k+1}|, |v_{m_k+1} - \beta_{n_k} F_{m_k+1}|, \delta |F_{m_k}|\} \\ &\geq \gamma_{m_k+1} - |\alpha_{n_k} F_{m_k+1}|. \end{aligned} \quad (54)$$

Из этого неравенства, неравенств (47), (53) и неравенства (22), фиксирующего индекс $n_1 \leq m_k$, получаем неравенство

$$|F_{m_k}| \geq \gamma_{m_k+1}(1 - r^{-1}e^{2\delta}e^{-\delta(m_k+1)}) \geq \gamma_{m_k+1}e^{-\delta},$$

совпадающее с неравенством (49).

Из неравенств (18), (48) и (49) получаем неравенство

$$\left| \frac{\Delta_{m_k}}{F_{m_k}} \right| \leq \frac{r^{2m_k} e^{-11\delta m_k}}{e^{-\delta} \gamma_{m_k+1}} \leq r^{-2} e^{9\delta} e^{-3\delta m_k} \gamma_{m_k+1}. \quad (55)$$

Оценим снизу величину $|F_{m_k+2}|$, используя равенство

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_n}{F_n} &= \left| \frac{1}{F_{n+1}} \quad \frac{\tau_n}{A_{n+1}F_n + B_{n+1}F_{n+1} + C_{n+1}F_{n+2}} \right| \\ &= A_{n+1}F_n + (B_{n+1} - \tau_n)F_{n+1} + C_{n+1}F_{n+2}, \end{aligned}$$

являющееся следствием определений (15) и (25) величин Δ_n и τ_n . Из этого равенства при $n = m_k$ получаем равенство

$$F_{m_k+2} = -\frac{A_{m_k+1}}{C_{m_k+1}}F_{m_k} + \frac{\tau_{m_k} - B_{m_k+1}}{C_{m_k+1}}F_{m_k+1} + \frac{\Delta_{m_k}}{C_{m_k+1}F_{m_k}}. \quad (56)$$

Так как

$$|\tau_{m_k}| \leq |\tau_{n_k}| + |\tau_{m_k} - \tau_{n_k}| \leq 2|\alpha_{n_k}| + |\tau_{m_k} - \tau_{n_k}|,$$

то из неравенств (47) и (29) имеем неравенство

$$|\tau_{m_k}| \leq 2r^{-1}e^{2\delta} + \frac{\delta^2}{8} \leq 3r^{-1}e^{2\delta}.$$

Поэтому, учитывая неравенства (21), из равенства (56) и неравенств (49), (53) и (55) получаем следующую оценку снизу величины $|F_{m_k+2}|$:

$$|F_{m_k+2}| \geq (e^{-2\delta} - 4r^{-1}e^{3\delta}e^{-\delta(m_k+1)} - r^{-2}e^{10\delta}e^{-3\delta m_k})\gamma_{m_k+1}. \quad (57)$$

Отсюда и из неравенства (22), фиксирующего индекс $n_1 \leq m_k$, получаем неравенство

$$|F_{m_k+2}| \geq e^{-3\delta}\gamma_{m_k+1}. \quad (58)$$

Отсюда и из неравенства (48) имеем неравенство

$$|F_{m_k+2}| \geq e^{-3\delta}(re^{-4\delta})^{m_k+1} \geq (re^{-5\delta})^{m_k+2},$$

означающее, в частности, что $m_k + 2 \in \Lambda$. Таким образом равенство (50) доказано.

С учетом равенства (50) из неравенств (53) и (58) получаем неравенство

$$|F_{n_{k+1}-1}| = |F_{m_k+1}| = \frac{|F_{m_k+1}|}{\gamma_{m_k+1}} \frac{\gamma_{m_k+1}}{|F_{m_k+2}|} |F_{n_{k+1}}| \leq e^{\delta(2-m_k)} |F_{n_{k+1}}|. \quad (59)$$

Поэтому из определений (31) и (32) величин u_n и v_n имеем неравенства

$$|u_{n_{k+1}}| = |\alpha_{n_{k+1}}F_{n_{k+1}} - F_{n_{k+1}-1}| \geq |\alpha_{n_{k+1}}F_{n_{k+1}}|(1 - e^{\delta(2-m_k)}), \quad (60)$$

$$|v_{n_{k+1}}| = |\beta_{n_{k+1}}F_{n_{k+1}} - F_{n_{k+1}-1}| \leq |F_{n_{k+1}}| + |F_{n_{k+1}-1}| \leq |F_{n_{k+1}}|(1 + e^{\delta(2-m_k)}). \quad (61)$$

Из неравенств (60), (58) (с учетом равенства (50)) и (22) получаем неравенство

$$|u_{n_{k+1}}| \geq |F_{n_{k+1}}|(1 - e^{\delta(2-m_k)}) \geq \gamma_{m_k+1}e^{-3\delta}(1 - e^{\delta(2-m_k)}) \geq \gamma_{m_k+1}e^{-4\delta}. \quad (62)$$

Отсюда, из определения (33) величины $\gamma_{n_{k+1}}$ и из неравенства (19) получаем неравенство

$$\gamma_{n_{k+1}} \geq |u_{n_{k+1}}| \geq \gamma_{m_k+1}e^{-4\delta} \geq re^{\delta}\gamma_{m_k+1},$$

совпадающее с неравенством (51).

Предположим, что неравенство (52) не выполняется, а именно, предположим, что $|\beta_{n_{k+1}}| < re^{3\delta}$. Тогда из неравенств (60), (19), (22) и (61) получаем неравенство

$$|u_{n_{k+1}}| \geq r^{-1}e^{-3\delta}|F_{n_{k+1}}|(1 - e^{\delta(2-m_k)}) \geq |F_{n_{k+1}}|(1 + e^{\delta(2-m_k)}) \geq |v_{n_{k+1}}|.$$

Кроме того, из неравенства (51), неравенства (48) и равенства (50) следует неравенство

$$\gamma_{n_{k+1}} \geq re^{\delta}(re^{-4\delta})^{m_k+1} \geq (re^{-4\delta})^{m_k+2} = (re^{-4\delta})^{n_{k+1}}.$$

Таким образом, для индекса $n^* = n_{k+1}$ выполняется пара неравенств (43). Поэтому по предложению 7 отсюда следует неравенство $|\beta_{n_{k+1}}| \geq re^{3\delta}$. Таким образом, предположение $|\beta_{n_{k+1}}| < re^{3\delta}$ приводит к противоречию. Следовательно, неравенство (52) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ (ПРОДОЛЖЕНИЕ). Из определений (33) и (31) величин γ_n и u_n при всех $n \in \Lambda$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} 2\gamma_n &\geq 2 \max\{|\alpha_{n_k}F_n - F_{n-1}|, \delta|F_{n-1}|\} \\ &\geq |\alpha_{n_k}F_n - F_{n-1}| + \delta|F_{n-1}| \geq \delta|\alpha_{n_k}F_n| \geq \delta|F_n|. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (24) следует неравенство

$$\overline{\lim}_{n \in \Lambda} \gamma_n^{1/n} \geq \overline{\lim}_{n \in \Lambda} |F_n|^{1/n} = r.$$

Поэтому найдется индекс $n^* \in I_k$, для которого имеет место неравенство

$$\gamma_{n^*} \geq (re^{-\delta})^{n^*}. \quad (63)$$

Докажем неравенство $|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}$. Рассмотрим два случая $|v_{n^*}| \leq |u_{n^*}|$ и $|v_{n^*}| > |u_{n^*}|$. В первом случае с учетом неравенства (63) имеем пару неравенств (43). В этом случае все доказано, так как по предложению 7 (см. неравенство (44)) имеем неравенство $|\beta_{n_k}| \geq re^{3\delta} \geq re^{-2\delta}$. Рассмотрим теперь второй случай $|u_{n^*}| < |v_{n^*}| = \omega_{n^*}$ и предположим, что $|\beta_{n_k}| < re^{-2\delta}$. Тогда применимо предложение 6 и, следовательно, $\gamma_n = \omega_n$ при всех $n \in I_k$, неравенства (39) можно записать в виде неравенств

$$|\theta_n| \leq \delta\omega_n, \quad n \in I_k, \quad (64)$$

а неравенство (63) – в виде неравенства

$$\omega_{n^*} \geq (re^{-\delta})^{n^*}. \quad (65)$$

Если $n^* > n_k$, то из определения (33) величины ω_n , равенства (38), предположения $|\beta_{n_k}| < re^{-2\delta}$ и неравенства (64) следует неравенство

$$\omega_{n^*-1} \geq |v_{n^*-1}| = |\alpha_{n_k}v_{n^*} - \theta_{n^*-1}| \geq r^{-1}e^{2\delta}\omega_{n^*} - \delta\omega_{n^*-1},$$

из которого получаем неравенство

$$\omega_{n^*-1} \geq (1 + \delta)^{-1}r^{-1}e^{2\delta}\omega_{n^*} \geq r^{-1}e^{\delta}\omega_{n^*}.$$

Отсюда и из неравенства (65) имеем неравенство $\omega_{n^*-1} \geq (re^{-\delta})^{n^*-1}$. Таким образом, неравенство (65), а следовательно, и неравенство (63) выполняются и для индекса $n^* - 1$. Поэтому приведенное рассуждение можно повторить для индекса $n^* - 1$

и т.д. Таким образом, либо имеет место доказываемое неравенство $|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}$, либо для всех индексов $n = n^*, n^* - 1, \dots, n_k$ выполняется неравенство $|u_n| < |v_n| = \omega_n$ и неравенство (65). В последнем случае при $n = n_k$ из равенства (36) и неравенств (41), (65) и (22) имеем неравенство

$$\begin{aligned} |F_{n_k-1}| &= \left| \frac{\alpha_{n_k} v_{n_k} - \beta_{n_k} u_{n_k}}{\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}} \right| \\ &\geq \frac{|\alpha_{n_k}| - |\beta_{n_k}|}{|\alpha_{n_k}| + |\beta_{n_k}|} \omega_{n_k} \geq 2\delta \omega_{n_k} \geq 2\delta (re^{-\delta})^{n_k} \geq (re^{-5\delta})^{(n_k-1)}, \end{aligned}$$

которое противоречит условию $n_k - 1 \in \Lambda^*$ и определению (23) множеств Λ и Λ^* . Полученное противоречие доказывает неравенство $|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}$.

Из предложения 5, примененного к индексам $n = n^*$ и $l = m_k + 1$, неравенства $|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}$ и неравенства (63) получаем неравенство

$$\gamma_{m_k+1} \geq (|\beta_{n_k}| e^{-2\delta})^{m_k+1-n^*} \gamma_{n^*} \geq (re^{-4\delta})^{m_k+1-n^*} \gamma_{n^*} \geq (re^{-4\delta})^{m_k+1}, \quad (66)$$

совпадающее с неравенством (48), которое наряду с уже доказанным неравенством $|\beta_{n_k}| \geq re^{-2\delta}$ (неравенством (47)) является условием предложения 8. Поэтому по предложению 8 имеют место неравенства (49), (51), (52) и равенство (50). Из неравенства (52) и предложения 5, примененного к индексам n_{k+1} и $m_{k+1} + 1$, получаем неравенство $\gamma_{m_{k+1}+1} \geq (re^{\delta})^{m_{k+1}+1-n_{k+1}} \gamma_{n_{k+1}}$. Отсюда, из неравенства (51) и равенства (50) получаем неравенство

$$\gamma_{m_{k+1}+1} \geq (re^{\delta})^{m_{k+1}+1-n_{k+1}+1} \gamma_{m_k+1} = (re^{\delta})^{m_{k+1}-m_k} \gamma_{m_k+1}. \quad (67)$$

Из неравенств (67) и (66) имеем неравенство $\gamma_{m_{k+1}+1} \geq (re^{-4\delta})^{m_{k+1}+1}$, совпадающее с неравенством (48) для индекса $k+1$. При этом вместо неравенства (47) для индекса $k+1$ имеем более сильное неравенство (52). Поэтому можно воспользоваться предложением 8 уже для индекса $k+1$. Последовательно пользуясь этим рассуждением, получим, что предложением 8 можно пользоваться при всех индексах $k, k+1, k+2, \dots$. Поэтому из совокупности неравенств (67) получаем неравенство

$$\gamma_{m_{k+p}+1} \geq (re^{\delta})^{m_{k+p}-m_k} \gamma_{m_k+1}, \quad p = 0, 1, \dots \quad (68)$$

Из неравенств (49) и (68) получаем неравенства

$$|F_{m_{k+p}}| \geq e^{-\delta} \gamma_{m_{k+p}+1} \geq e^{-\delta} (re^{\delta})^{m_{k+p}-m_k} \gamma_{m_k+1}, \quad p = 0, 1, \dots$$

Следовательно,

$$r = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \geq \varlimsup_{p \rightarrow \infty} |F_{m_{k+p}}|^{1/m_{k+p}} \geq re^{\delta}.$$

Так как $r > 0$, то полученное противоречие показывает, что сделанное предположение о бесконечности множества Λ^* невозможно. Тем самым, по предложению 2 лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОПОЛНЕНИЯ К ЛЕММЕ. Положим $\Lambda = \{n : F_n \neq 0\}$, $\Lambda^* = \mathbb{N} \setminus \Lambda$ и определим величины τ_n равенством (25). Немного видоизменяя вышеприведенную схему доказательства леммы, покажем, что случай, когда оба множества Λ

и Λ^* бесконечны, невозможен. Без изменения доказательства предложение 1 заменим на следующее предложение:

$$\text{если } n, n+1 \in \Lambda, \quad \text{то } \tau_{n+1} = \tau_n,$$

а предложение 3 – на предложение:

$$\text{если } n \in I_k, \quad \text{то } \tau_n = \tau_{n_k}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Фиксируем число $\delta \leq 1/6$ и индекс n_1 таким образом, чтобы выполнялись неравенства (21). Предложение 4 не меняем ни по формулировке, ни по доказательству. Без изменения доказательства предложение 6 меняем на предложение 6', в котором условие $|\beta_{n_k}| \leq re^{3\delta}$ заменяется условием $|\beta_{n_k}|^2 \leq 1 - 4\delta$. Предложение 7 заменим следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7'. При всех $k = 2, 3, \dots$ имеют место неравенства

$$|\beta_{n_k}|^2 \geq 1 - 4\delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим противное, а именно, предположим, что $|\beta_{n_k}|^2 < 1 - 4\delta$ при некотором $k \geq 2$. Тогда $|\beta_{n_k}|^2 < (1 - \delta)/(1 + \delta)$. Пользуясь предложением 6', из неравенства $|v_n| < |u_n| = \omega_n$, $n \in I_k$, получаем неравенство

$$|v_{n+1}| = |\beta_{n_k}(v_n + \theta_n)| \leq |\beta_{n_k}|(1 + \delta)\omega_n < |\alpha_{n_k}|(1 - \delta)\omega_n \leq |\alpha_{n_k}(u_n + \theta_n)| = |u_{n+1}|. \quad (69)$$

Из начального неравенства

$$|v_{n_k}| = |\beta_{n_k}F_{n_k} - F_{n_k-1}| = |\beta_{n_k}F_{n_k}| < |\alpha_{n_k}F_{n_k}| = |\alpha_{n_k}F_{n_k} - F_{n_k-1}| = |u_{n_k}|$$

и доказанного утверждения

$$|v_n| < |u_n|, \quad n \in I_k^*, \quad \Rightarrow \quad |v_{n+1}| < |u_{n+1}|$$

следует, что неравенства $|v_n| < |u_n|$ выполняются при всех $n \in I_k^*$. В частности, $|v_{m_k+1}| < |u_{m_k+1}|$. Отсюда и из равенства (35) получаем равенство

$$|F_{m_k+1}| = \left| \frac{u_{m_k+1} - v_{m_k+1}}{\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}} \right| > 0,$$

которое противоречит условию $m_k + 1 \in \Lambda^*$.

С учетом предложения 7' предложение 5 без изменения доказательства заменим следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5'. При всех $k = 2, 3, \dots$ и всех $n \in I_k$ имеют место неравенства

$$\gamma_{n+1} \geq (1 - 4\delta)e^{-2\delta}\gamma_n.$$

Предложение 8 заменим следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8'. При всех $k = 2, 3, \dots$ имеют место равенства

$$n_{k+1} = m_k + 2, \quad F_{n_{k+1}} = -\frac{A_{m_k+1}}{C_{m_k+1}}F_{m_k}, \quad |F_{m_k}| = \gamma_{m_k+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $F_{m_k+1} = \Delta_{m_k} = 0$, то из равенства (56) имеем равенство

$$F_{m_{k+2}} = -\frac{A_{m_k+1}}{C_{m_k+1}} F_{m_k} \neq 0.$$

Отсюда следуют первые два равенства предложения 8'. Третье равенство следует из неравенства (54), которое при $F_{m_k+1} = 0$ является точным равенством.

Из предложения 8' следует, что $\bigcup_{k=2}^{\infty} I_k^* = \{n \geq n_2\}$ и

$$\begin{aligned} \gamma_{n_{k+1}} &= \max\{|u_{n_{k+1}}|, |v_{n_{k+1}}|, \delta|F_{n_{k+1}-1}|\} \\ &= |\alpha_{n_{k+1}} F_{n_{k+1}}| \geq |F_{n_{k+1}}| = \left| \frac{A_{m_k+1}}{C_{m_k+1}} F_{m_k} \right| = \left| \frac{A_{m_k+1}}{C_{m_k+1}} \gamma_{m_k+1} \right| = \left| \frac{A_{n_{k+1}-1}}{C_{n_{k+1}-1}} \right| \gamma_{n_{k+1}-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, из равенств (20) и предложения 5' следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{1/n} \geq (1 - 4\delta)e^{-2\delta}.$$

Отсюда и из третьего равенства предложения 8' получаем, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n^{1/n} > 0$. Полученное противоречие показывает, что одно из множеств Λ или Λ^* конечно.

Предположим, что конечно множество Λ^* . Тогда по предложению 1, начиная с некоторого номера, имеют место равенства $\tau_n = \tau$. Пользуясь рассуждениями, приведенными при доказательстве предложения 2, получаем, что либо $F_n = 0$ при всех $n \geq n_0$, что противоречит предположению конечности множества Λ^* , либо $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n}$ равен модулю одного из корней многочлена $z^2 - \tau z + 1$, что противоречит условию $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} = 0$. Следовательно, конечным является множество Λ , что и требовалось доказать.

2. Доказательство теоремы. Положим

$$\rho_0 = \rho_0(F), \quad \rho_1 = \rho_1(F), \quad \Delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n|^{1/n}$$

и заметим, что с учетом равенства (9) (аналога формулы Коши–Адамара) равенство (10) эквивалентно равенству $\Delta = \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}$.

Покажем, что имеет место неравенство $\Delta \leq \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}$. Положим

$$E(z) = (z - a)F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_n - aF_n)P_n(z),$$

где $a = 0$, если $\rho_0 = \rho_1$, и a — единственный полюс функции F , лежащий в эллипсе D_{ρ_1} , если $\rho_0 < \rho_1$. Замечая, что $\rho_0(E) = \rho_1$, из равенства (9) для функций F и E получаем неравенство

$$\begin{aligned} \Delta &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n(G_{n+1} - aF_{n+1}) - F_{n+1}(G_n - aF_n)|^{1/n} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |G_n - aF_n|^{1/n} = \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство $\Delta \leq \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}$ доказано. Следовательно, для доказательства теоремы достаточно показать, что строгое неравенство $\Delta < \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}$ невозможно.

Хорошо известно [3], что для ортонормированных многочленов имеют место трехчленные соотношения

$$zP_n(z) = A_nP_{n-1}(z) + B_nP_n(z) + A_{n+1}P_{n+1}(z), \quad (70)$$

причем если весовая функция σ удовлетворяет условию Сегё (3), то коэффициенты A_n и B_n в соотношениях (70) имеют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0. \quad (71)$$

Из равенства (70) и определений (11) имеем равенства

$$G_n = A_nF_{n-1} + B_nF_n + A_{n+1}F_{n+1}. \quad (72)$$

Таким образом,

$$F_nG_{n+1} - F_{n+1}G_n = \Delta_n \quad \text{и} \quad \Delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n|^{1/n},$$

где Δ_n определены равенствами (15), в которых $C_n = A_{n+1}$.

Предположим, что $\Delta < \rho_0^{-1}\rho_1^{-1}$. Тогда $\Delta < \rho_0^{-2}$. Это неравенство в совокупности с неравенством $\rho_0 > 1$ (так как функция F голоморфна в окрестности отрезка $[-1, 1]$) и равенствами (71) означает, что имеют место все предположения доказанной леммы. Следовательно, по лемме существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n = \lambda$. Обозначим через a_n полюс ортогональной аппроксимации Паде типа $(n, 1)$ функции F . По определению ортогональных аппроксимаций это означает, что $(n+1)$ -й коэффициент разложения функции $(z - a_n)F(z)$ в ряд по ортонормированным многочленам равен нулю. Следовательно, $a_n = G_{n+1}/F_{n+1}$. Из существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n$ и равенства (9) имеем равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}|^{1/n} = \frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n|^{1/n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n F_{n+1}|^{1/n}} = \Delta \rho_0^2. \quad (73)$$

По неравенству (14) правая часть полученного равенства строго меньше 1. Поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n - a|^{1/n} = \Delta \rho_0^2 < 1$. Таким образом, полюсы a_n первой строки ортогональных аппроксимаций Паде стремятся к пределу a со скоростью геометрической прогрессии. В этом случае по теореме Суетина [7]

$$\rho_1 \geq |a| \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n+1}|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Поэтому с учетом равенства (73) и равенства $|a| = \rho_0$ имеем неравенство

$$\rho_1 \geq \rho_0 (\Delta \rho_0^2)^{-1} = (\Delta \rho_0)^{-1}, \quad \text{т.е.} \quad \Delta \geq \rho_0^{-1} \rho_1^{-1}.$$

Полученное противоречие со сделанным предположением $\Delta < \rho_0^{-1}\rho_1^{-1}$ доказывает равенство $\Delta = \rho_0^{-1}\rho_1^{-1}$. Таким образом утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем утверждение 2) теоремы (аналог критерия Кронекера). Пусть F – рациональная функция, имеющая не более одного полюса. Если F – многочлен, то $F_n = 0$ при всех достаточно больших n и, следовательно, $F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n = 0$ при

всех достаточно больших n . Если F имеет один полюс в точке a , то $(z - a)F(z)$ — многочлен. Следовательно, $G_n - aF_n = 0$ при всех достаточно больших n . Поэтому

$$F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n = F_n (G_{n+1} - aF_{n+1}) - F_{n+1} (G_n - aF_n) = 0$$

при всех достаточно больших n . Таким образом, в одну сторону аналог критерия Кронекера тривиален.

Наоборот, предположим, что $\Delta_n = F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n = 0$ при всех $n \geq n_0$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} = 0$, то по дополнению к лемме функция F является многочленом, и в этом случае все доказано. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n|^{1/n} > 0$, то по лемме существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n \neq 0$. Это означает, в частности, что $F_n \neq 0$ при всех $n \geq n_1$. Поэтому при всех $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ имеют место равенства

$$\frac{G_{n+1}}{F_{n+1}} - \frac{G_n}{F_n} = \frac{F_n G_{n+1} - F_{n+1} G_n}{F_n F_{n+1}} = 0.$$

Таким образом, отношение G_n/F_n принимает постоянное значение, которое обозначим через a , при всех $n \geq n_2$. Отсюда имеем равенства $G_n - aF_n = 0$ при всех $n \geq n_2$. Следовательно, $(z - a)F(z)$ — многочлен, а F — рациональная функция, имеющая единственный возможный полюс в точке a . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Hadamard, "Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor", *J. Math.* (4), **8**:4 (1892), 101–186.
- [2] L. Kronecker, "Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen", *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1881, 535–600.
- [3] Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
- [4] H. Poincaré, "Sur les equations linéaires aux différentielles et aux différences finies", *Amer. J. Math.*, **7**:3 (1885), 203–258.
- [5] В. И. Буслаев, "Соотношения для коэффициентов и особые точки функции", *Матем. сб.*, **131**:3 (1986), 357–384.
- [6] А. А. Гончар, "О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций", *Матем. сб.*, **97**:4 (1975), 607–629.
- [7] С. П. Суетин, "Обратные теоремы об обобщенных аппроксимациях Паде", *Матем. сб.*, **109**:4 (1979), 629–646.

В. И. Буслаев

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

17.06.2008

Исправленный вариант

04.09.2008