Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кокоткин, О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 318–320

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:24:00

О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число

А. А. Кокоткин

1. Введение и формулировки геометрических результатов. *Хроматическое число* $\chi(\mathbb{R}^d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ – это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^d$, чтобы среди точек одного цвета не нашлось пары точек на расстоянии единицы, т.е.

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists V_1, \dots, V_k \ \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k, \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1\},$$

где ρ – обычное евклидово расстояние.

Легко показать, что для любого d величина $\chi(\mathbb{R}^d)$ конечна. Проблема отыскания хроматического числа пространства была впервые поставлена на рубеже 40–50-х годов XX века (см. [1]–[7]). Несмотря на значительный интерес, вызванный этой проблемой, она до сих пор, по существу, остается нерешенной. Конечно, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, однако уже для плоскости лучшее, что мы знаем, это оценка

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Для трехмерного пространства мы имеем

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$$

(см. [8], [9]), наконец для растущей размерности

$$(1.239 \dots + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{R}^d) \leq (3 + o(1))^d$$

(см. [2], [10]–[12]).

Поставленная задача может быть переформулирована в терминах теории графов. Прежде всего *дистанционным графом* (или *графом расстояний*) назовем конечный граф $G = (V, E)$, вершины которого суть точки евклидова пространства, а ребра соединяют только пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние единицы. Иными словами,

$$V \subset \mathbb{R}^d, \quad |V| < \infty, \quad E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G = (V, E)$ – это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы вершины одного цвета не соединялись ребром, т.е.

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists V_1, \dots, V_k \ V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k, \forall i \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

Эрдеш и де Брёйн фактически доказали (см. [13]), что $\chi(\mathbb{R}^d) = \max \chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, изучение хроматических чисел графов расстояний играет исключительную роль при исследовании проблемы отыскания хроматического числа пространства.

В настоящей работе мы рассматриваем только случай евклидовой плоскости. Тот факт, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$, означает, конечно, что для любого графа расстояний $G = (V, E)$ на плоскости $\chi(G) \leq 7$. Как следствие, $\alpha(G) \geq |V|/7$, коль скоро через $\alpha(G)$ мы обозначили *число*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683).

DOI: 10.4213/mzm5186

независимости графа G , т.е. наибольшее количество его вершин, никакие две из которых не соединены ребром:

$$\alpha(G) = \max\{|V'| : V' \subset V, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V' \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

Таким образом, в любом “двумерном” графе расстояний на n вершинах найдется индуцированный подграф, имеющий не менее $n/7$ вершин и хроматическое число 1. Это утверждение допускает ряд нетривиальных обобщений и уточнений. Нам удалось доказать следующий результат для графов расстояний на плоскости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что

$$|V'| \geq \left\lceil \frac{kn}{\kappa} \right\rceil \quad \text{и} \quad \chi(G') \leq k, \quad \text{где} \quad \kappa = 4.36 \dots$$

Наиболее интересным является случай $k = 4$. Фактически он означает, что в каждом графе расстояний на плоскости есть индуцированный подграф, который почти целиком совпадает с исходным графом (содержит не менее 91.7% его вершин) и допускает раскраску в 4 цвета. Если бы в этом утверждении величину 91.7 удалось заменить на 100, то ввиду теоремы Эрдеша–де Брёйна это бы означало, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

2. Постановка вероятностной задачи и формулировки соответствующих результатов. Зачастую задачи теории графов допускают нетривиальную интерпретацию в терминах *случайного графа*. Напомним, что одной из наиболее популярных моделей случайного графа является модель, предложенная Эрдемем и Реньи на рубеже 50–60-х годов XX века (см. [14]). Речь идет о вероятностном пространстве $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$. Здесь

$$\Omega_n = \{G = (V, E) : |V| = n\}$$

– множество всевозможных графов на n вершинах (без петель и кратных ребер), сигма-алгебра $\mathcal{B}_n$ представляет собой множество всех подмножеств Ω_n , а

$$P_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Иначе говоря, можно считать, что ребра случайного графа появляются независимо друг от друга с вероятностью p . Заметим, что в модели Эрдеша–Реньи величина p может зависеть от n .

Нас будет интересовать в дальнейшем, с какой вероятностью случайный граф в модели $G(n, p)$ допускает реализацию на плоскости в качестве графа расстояний. Как это часто бывает в науке о случайных графах, при одних значениях p эта вероятность будет стремиться к нулю, а при других – к единице. Определим некоторую критическую величину p , отвечающую за вышеупомянутый “фазовый переход”, следующим образом:

$$p^*(n) = \sup \left\{ p \in [0, 1] : P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Такая величина называется *пороговой вероятностью*, и она определена корректно ввиду классических результатов о существовании пороговых вероятностей для монотонных свойств случайных графов (см. [14]).

Мы можем доказать следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. При $p = c/n$, где $c < 1$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 3. При $p = c/n$, где $c > t_0 = 14.797\dots$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теоремы 2 и 3 означают что

$$\frac{1 - \varepsilon}{n} \leq p^*(n) \leq \frac{t_0 + \varepsilon}{n}$$

со сколь угодно малым положительным ε и $n \geq n_0(\varepsilon)$. Тем самым, мы знаем порядок роста пороговой вероятности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*, Springer, New York, 2009. [2] А. М. Райгородский, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146. [3] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005. [4] А. М. Райгородский, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2013, 429–460. [5] А. М. Райгородский, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156. [6] А. М. Райгородский, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123. [7] Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, **454**:3 (2014), 268–269. [8] O. Nechushtan, *Discrete Math.*, **256**:1-2 (2002), 499–507. [9] D. Coulson, *Discrete Math.*, **256** (2002), 83–90. [10] А. М. Райгородский, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148. [11] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2007. [12] D. G. Larman, C. A. Rogers, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24. [13] N. G. de Bruijn, P. Erdős, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, **54**:5 (1951), 371–373. [14] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Stud. Adv. Math., **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

А. А. Кокоткин

Московский физико-технический
институт (государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: kokocan@yandex.ru

Поступило

10.02.2014