Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 3, 417–428

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:51:11

О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик

А. М. Райгородский, О. И. Рубанов

Настоящая работа посвящена изучению свойств дистанционных графов в евклидовом пространстве. Удастся доказать, в частности, существование графов расстояний с экспоненциально большим по величине размерности хроматическим числом и без клик размера 6. Кроме того, при заданном ограничении на мощность максимальной клики ищутся графы расстояний с экстремально большим хроматическим числом. Полученные оценки неумлучшаемы в рамках предложенного метода, в котором вероятностная техника сочетается с линейно-алгебраическим подходом.

Библиография: 19 названий.

1. Введение

Назовем *графом расстояний* или *дистанционным графом* в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольный граф $G = (V, E)$, у которого множество вершин V таково, что $V \subseteq \mathbb{R}^n$, а множество ребер E таково, что

$$E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}.$$

Здесь a – любое фиксированное положительное число. Подчеркнем, что дистанционный граф не обязан быть конечным, и что если расстояние между какими-либо его вершинами равно a , то это вовсе не означает, что такие вершины соединены ребром. В тех случаях, когда

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\},$$

будем говорить о *полных дистанционных графах*.

Наука о графах расстояний возникла в связи с классической задачей комбинаторной геометрии о хроматическом числе пространства (см. [1]–[6]). Напомним, что

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-691.2008.1), гранта МД-5414.2008.1 и гранта фонда “Династия”.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383).

хроматическое число графа G – величина $\chi(G)$ – это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы концы любого его ребра были разного цвета (см. [7]).

Известно (см. [8]), что у любого дистанционного графа в $\mathbb{R}^n$ хроматическое число ограничено сверху величиной $(3 + \delta(n))^n$ с некоторым $\delta(n) = o(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Этот факт вкупе с принципом компактности Эрдеша–де Брёйна (см. [9]) свидетельствует о том, что существует “ n -мерный” граф расстояний с максимальным хроматическим числом и этот граф конечный. Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать именно хроматические числа дистанционных графов, мы ограничимся рассмотрением лишь тех $G = (V, E)$, у которых $|V| < \infty$.

Известны следующие нижние оценки:

- 1) существует такой граф расстояний G на плоскости, что $\chi(G) \geq 4$ (см. [1]–[6]);
- 2) существует такой граф расстояний G в $\mathbb{R}^3$, что $\chi(G) \geq 6$ (см. [10]);
- 3) существует такой граф расстояний G в $\mathbb{R}^4$, что $\chi(G) \geq 7$ (см. [11]);
- 4) существует такая функция $\delta(n) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, что для любого n найдется граф расстояний G в $\mathbb{R}^n$, у которого $\chi(G) \geq (\xi + \delta(n))^n$, где $\xi = 1.239 \dots$ (см. [12]).

Проблема уточнения любой из этих оценок крайне трудна. В связи с этим в 1976 г. Эрдеш поставил вопрос: существует ли граф на плоскости с $\chi(G) \geq 4$ и без треугольников (см. [13])? На этот вопрос был получен положительный ответ в [14], [15].

В настоящей работе мы исследуем аналогичную задачу в случае пространства произвольной размерности. Нас интересуют графы расстояний в $\mathbb{R}^n$ с как можно большим хроматическим числом и без клик (симплексов) как можно меньшего размера. (Очевидно, что если дистанционный граф не содержит симплексов размерности k , то он не содержит и симплексов размерности $k + 1$.)

В следующем разделе мы сформулируем полученные результаты. Для удобства введем понятие *кликкового числа* графа $G = (V, E)$ – величину

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \quad (x, y) \in E\},$$

которая представляет собой размер максимальной клики в графе (т.е. множества его вершин, попарно соединенных ребрами), и его *числа независимости* – величину

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \quad (x, y) \notin E\},$$

которая выражает размер максимального независимого множества вершин в нем (т.е. множества его вершин, попарно не соединенных ребрами).

2. Формулировки результатов

В 2007 г. Рубанов доказал следующую теорему (см. [16]).

ТЕОРЕМА 1. *Существует такой (полный) граф расстояний G в $\mathbb{R}^3$, что $\chi(G) \geq 5$ и $\omega(G) \leq 3$.*

Эту теорему можно пытаться уточнять сразу в двух направлениях. Во-первых, пятерку в оценке хроматического числа хотелось бы заменить шестеркой (ср. оценка 2) раздела 1), а во-вторых, тройку в оценке кликового числа представляется

возможным поменять на двойку. Однако пока это самый лучший результат в размерности 3.

В случае растущей размерности нам удалось показать, в частности, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая функция $\delta(n) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, что для любого n найдется граф расстояний G в $\mathbb{R}^n$, у которого $\chi(G) \geq (\zeta_1 + \delta(n))^n$, где $\zeta_1 = 1.00297 \dots$, но $\omega(G) \leq 5$.*

Теорема 2 довольно неожиданна. Оказывается, существуют графы расстояний с экспоненциально большим хроматическим числом и без клик размера 6 (без симплексов размерности 5). Иными словами, по сравнению с утверждением 4) раздела 1, мы теряем лишь в величине константы, стоящей в основании экспоненциальной оценки хроматического числа, коль скоро требуем дополнительно, чтобы граф не содержал плотных подмножеств даже фиксированной величины.

С точки зрения того метода, с помощью которого мы докажем теорему 2, константа ζ_1 оптимальна. Добиться ее уточнения с сохранением ограничения $\omega(G) \leq 5$ нам не удалось. В то же время оценка $\omega(G) \leq 5$ также в некотором смысле не подлежит уточнению в рамках метода. А именно, мы не можем доказать утверждение следующего вида.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существуют такая функция $\delta(n) = o(1)$, $n \rightarrow \infty$, и такая константа $\zeta > 1$, что для любого n найдется граф расстояний G в $\mathbb{R}^n$, у которого $\chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n$, но $\omega(G) \leq 4$.*

Иначе говоря, на множестве дистанционных графов с $\omega(G) \leq 4$ пока не удалось найти таких G , чьи хроматические числа росли бы экспоненциально.

Сделанные замечания свидетельствуют о том, что осмысленно попытаться для каждого $k \geq 5$ найти графы расстояний, у которых $\omega(G) \leq k$, $\chi(G) \geq (\zeta(k) + o(1))^n$ и величина $\zeta(k)$, по возможности, наибольшая. Строго говоря, положим

$$\zeta(k) = \sup\{\zeta : \exists \delta(n) = o(1) \forall n \exists G \text{ в } \mathbb{R}^n \quad \omega(G) \leq k, \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\}.$$

Ввиду теоремы 2 выполнено $\zeta(5) \geq \zeta_1$, а приведенные выше замечания означают, что лучшей оценки мы не знаем и что при $k \leq 4$ у нас есть лишь неравенство $\zeta(k) \geq 1$.

Следующие две теоремы дают общий рецепт получения “оптимальных” оценок для величин $\zeta(k)$. В частности, теорема 2 является следствием первой из них.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $k \geq 5$ – произвольное натуральное число, а $b_0 \in (0, 1/2)$ – произвольное вещественное число. Положим*

$$\tau_0 = \tau_0(b_0) = \left(\frac{b_0}{2}\right)^{-b_0/2} \left(1 - \frac{b_0}{2}\right)^{-(1-b_0/2)}, \quad \tau_1 = \tau_1(b_0) = b_0^{-b_0} (1 - b_0)^{-(1-b_0)}.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_0, k) = \left\{ c' \in [\tau_0, \tau_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим

$$c = \begin{cases} c(b_0, k) = \inf \mathcal{C}, & \text{если } \mathcal{C} \neq \emptyset, \\ \tau_1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\zeta(k) \geq \tau_1/c$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $k \geq 5$ – произвольное натуральное число, а b_{-1}, b_1 – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие ограничениям

$$b_{-1}, b_1 \in (0, 1), \quad b_{-1} + b_1 \leq \frac{1}{2}, \quad b_{-1} \leq b_1.$$

Положим

$$A = \frac{2 + 9b_{-1} + 3b_1 - \sqrt{(2 + 9b_{-1} + 3b_1)^2 - 12(3b_{-1} + b_1)^2}}{12},$$

$$B = \frac{3b_{-1} + b_1}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3b_{-1} + b_1}{2}.$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \rho_0(b_{-1}, b_1) = A^{-A} B^{-B} C^{-C},$$

$$\rho_1 = \rho_1(b_{-1}, b_1) = b_{-1}^{-b_{-1}} b_1^{-b_1} (1 - b_{-1} - b_1)^{-(1-b_{-1}-b_1)}.$$

Рассмотрим

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(b_{-1}, b_1, k) = \left\{ c' \in [\rho_0, \rho_1] : k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \rho_1}{\ln c' - \ln \rho_0} \right\rceil \right\}.$$

Положим

$$c = \begin{cases} c(b_{-1}, b_1, k) = \inf \mathcal{C}, & \text{если } \mathcal{C} \neq \emptyset, \\ \rho_1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $\zeta(k) \geq \rho_1/c$.

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы 3 величина τ_0 всегда меньше величины τ_1 , а потому множество $\mathcal{C}$ определено корректно. В конечном счете имеем

$$\zeta(k) \geq \max_{b_0 \in (0, 1/2)} \frac{\tau_1(b_0)}{c(b_0, k)}.$$

Например, при $b_0 = 0.02825 \dots$ получаем $\zeta(5) \geq \zeta_1$.

Аналогичный комментарий верен и относительно теоремы 4. Правда, там не столь очевидно неравенство $\rho_0 < \rho_1$; доказательство этого неравенства можно найти в [3]. В итоге

$$\zeta(k) \geq \max_{b_{-1}, b_1} \frac{\rho_1(b_{-1}, b_1)}{c(b_{-1}, b_1, k)}.$$

Например, при

$$b_{-1} = 0.0000173439 \dots, \quad b_1 = 0.0254437893 \dots$$

имеем $\zeta(5) \geq 1.0028 \dots$. Это оптимальный результат, даваемый теоремой 4 при $k = 5$, и он слегка слабее результата теоремы 3 при том же значении k : $1.0028 \dots < \zeta_1 = 1.0029 \dots$. Оказывается, теорема 3 точнее теоремы 4, коль скоро $k \leq 10$; при всех остальных k теорема 4 преобладает над теоремой 3. Мы собрали оптимальные результаты в таблице, которую приводим ниже. В первом столбце указано k , во втором и третьем – b_{-1}, b_1 (параметры из теоремы 4), в четвертом – наилучшая оценка в теореме 4, в пятом – b_0 (параметр из теоремы 3), в шестом – наилучшая оценка в теореме 3, в седьмом – лучшая из оценок теорем 3 и 4; при этом в четвертом и шестом столбцах жирным шрифтом выделена та оценка, которая попала в седьмой столбец. Все оценки даны с восемью точными знаками после запятой.

ТАБЛИЦА

k	Теорема 4			Теорема 3		$\zeta(k) \geq$
	b_{-1}	b_1	$\zeta(k) \geq$	b_0	$\zeta(k) \geq$	
5	0.00001734	0.02544379	1.00280720	0.02825291	1.00297305	1.00297305
6	0.00071800	0.08438940	1.01694361	0.09659179	1.01838640	1.01838640
7	0.00270696	0.12703569	1.03395854	0.14157882	1.03626539	1.03626539
8	0.00553133	0.15711445	1.05011426	0.17051644	1.05242870	1.05242870
9	0.00869977	0.17904575	1.06460594	0.19035277	1.06632451	1.06632451
10	0.01190629	0.19555639	1.07739346	0.20472195	1.07816823	1.07816823
11	0.01498920	0.20833110	1.08864080	0.21558694	1.08829570	1.08864080
12	0.01787410	0.21844807	1.09855184	0.22408139	1.09701591	1.09855184
13	0.02053497	0.22662152	1.10731983	0.23090096	1.10458387	1.10731983
14	0.02297102	0.23333932	1.11511348	0.23649470	1.11120346	1.11511348
15	0.02519380	0.23894375	1.12207552	0.24116490	1.11703654	1.12207552
16	0.02722013	0.24368069	1.12832523	0.24512232	1.12221184	1.12832523
17	0.02906839	0.24773059	1.13396195	0.24851823	1.12683247	1.13396195
18	0.03075664	0.25122837	1.13906849	0.25146404	1.13098160	1.13906849
19	0.03230179	0.25427658	1.14371408	0.25404355	1.13472693	1.14371408
20	0.03371912	0.25695447	1.14795689	0.25632099	1.13812400	1.14795689
21	0.03502235	0.25932405	1.15184599	0.25834646	1.14121876	1.15184599
22	0.03622359	0.26143449	1.15542301	0.26015953	1.14404950	1.15542301
23	0.03733353	0.26332523	1.15872343	0.26179191	1.14664838	1.15872343
24	0.03836159	0.26502821	1.16177769	0.26326931	1.14904259	1.16177769
25	0.03931602	0.26656957	1.16461196	0.26461281	1.15125524	1.16461196
26	0.04020410	0.26797090	1.16724890	0.26583979	1.15330614	1.16724890
27	0.04103223	0.26925014	1.16970822	0.26696479	1.15521230	1.16970822
28	0.04180606	0.27042235	1.17200709	0.26799998	1.15698847	1.17200709
29	0.04253059	0.27150023	1.17416059	0.26895573	1.15864746	1.17416059
30	0.04321023	0.27249456	1.17618197	0.26984084	1.16020045	1.17618197
31	0.04384892	0.27341461	1.17808294	0.27066283	1.16165725	1.17808294
32	0.04445016	0.27426826	1.17987386	0.27142825	1.16302651	1.17987386
33	0.04501708	0.27506239	1.18156397	0.27214272	1.16431586	1.18156397
34	0.04555247	0.27580295	1.18316150	0.27281118	1.16553209	1.18316150
35	0.04605883	0.27649512	1.18467380	0.27343793	1.16668123	1.18467380
36	0.04653844	0.27714345	1.18610749	0.27402675	1.16776867	1.18610749
37	0.04699331	0.27775194	1.18746850	0.27458097	1.16879924	1.18746850
38	0.04742527	0.27832412	1.18876221	0.27510359	1.16977727	1.18876221
39	0.04783600	0.27886312	1.18999347	0.27559718	1.17070669	1.18999347
40	0.04822699	0.27937171	1.19116666	0.27606415	1.17159101	1.19116666
41	0.04859963	0.27985239	1.19228580	0.27650657	1.17243345	1.19228580
42	0.04895515	0.28030737	1.19335451	0.27692632	1.17323690	1.19335451
43	0.04929470	0.28073866	1.19437612	0.27732511	1.17400400	1.19437612
44	0.04961932	0.28114801	1.19535367	0.27770447	1.17473716	1.19535367
45	0.04992995	0.28153709	1.19628994	0.27806578	1.17543859	1.19628994
46	0.05022749	0.28190732	1.19718748	0.27841030	1.17611029	1.19718748
47	0.05051272	0.28226005	1.19804863	0.27873918	1.17675412	1.19804863
48	0.05078639	0.28259649	1.19887557	0.27905346	1.17737177	1.19887557
49	0.05104919	0.28291772	1.19967029	0.27935408	1.17796481	1.19967029
50	0.05130175	0.28322476	1.20043462	0.27964192	1.17853468	1.20043462
51	0.05154464	0.28351851	1.20117028	0.27991778	1.17908271	1.20117028
52	0.05177840	0.28379982	1.20187884	0.28018238	1.17961012	1.20187884
53	0.05200355	0.28406946	1.20256178	0.28043643	1.18011807	1.20256178
54	0.05222053	0.28432813	1.20322045	0.28068050	1.18060760	1.20322045
55	0.05242980	0.28457649	1.20385612	0.28091520	1.18107971	1.20385612
56	0.05263175	0.28481513	1.20446998	0.28114105	1.18153529	1.20446998
57	0.05282674	0.28504462	1.20506312	0.28135855	1.18197522	1.20506312
58	0.05301514	0.28526548	1.20563658	0.28156814	1.18240027	1.20563658

ТАБЛИЦА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

100	0.05755871	0.29034354	1.21959032	0.28647009	1.19266305	1.21959032
1000	0.06326998	0.29611686	1.23753236	0.29226811	1.20564840	1.23753236
10000	0.06384354	0.29666283	1.23936294	0.29283085	1.20696080	1.23936294
100000	0.06390091	0.29671712	1.23954636	0.29288697	1.20709218	1.23954636
1e+006	0.06390665	0.29672255	1.23956470	0.29289258	1.20710532	1.23956470
1e+007	0.06390722	0.29672309	1.23956654	0.29289314	1.20710664	1.23956654
1e+008	0.06390728	0.29672315	1.23956672	0.29289319	1.20710677	1.23956672
1e+009	0.06390728	0.29672315	1.23956674	0.29289320	1.20710678	1.23956674

Видно, что с ростом k оптимальная оценка приближается к величине $\xi = 1.239 \dots$ (см. утверждение 4) в разделе 1). Это и неудивительно, ведь при $k \rightarrow \infty$ практически исчезает ограничение, наложенное нами на кликовое число искомого дистанционно-графа.

В следующем разделе мы докажем теоремы. Результаты оптимизации, приведенные в таблице, были получены с помощью компьютерного счета, и мы не станем воспроизводить здесь несложные выкладки.

3. Доказательства результатов

3.1. Доказательство теоремы 3. Зафиксируем k, b_0 , а стало быть, и $\tau_0, \tau_1, \mathcal{C}, c$. Легко видеть, что либо $\mathcal{C} = \emptyset$, либо $\mathcal{C} = \{\tau_1\}$, либо $\mathcal{C} = [c, \tau_1]$, $c \geq \tau_0$. В первых двух случаях утверждение теоремы тривиально. Рассмотрим ситуацию, когда $\tau_0 \leq c < \tau_1$.

Возьмем произвольное $c' \in (c, \tau_1)$. Здесь важно, что c' строго больше c , хотя и сколь угодно близко к c . Если мы покажем, что $\zeta(k) \geq \tau_1/c'$, то, беря инфимум обеих частей неравенства по c' , мы получим искомое утверждение $\zeta(k) \geq \tau_1/c$.

Итак, нам нужно убедиться в существовании такой функции $\delta(n) = o(1)$, что при всех n найдется граф расстояний $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^n$, у которого одновременно $\omega(G) \leq k$ и $\chi(G) \geq (\tau_1/c' + \delta(n))^n$.

Положим для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, |\{i : x_i = 1\}| = [b_0 n]\}.$$

Пусть p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию $[b_0 n] - 2p < 0$. Положим

$$\mathcal{E}_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

С помощью формулы Стирлинга легко показать, что $|\mathcal{V}_n| = (\tau_1 + o(1))^n$. В то же время известно, что для $\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n)$ выполнена оценка $\alpha \leq C_n^{p-1}$ (см. [3]). При $n \rightarrow \infty$ имеем $p \sim (b_0/2)n$ (см. [17]), и, значит, за счет все той же формулы Стирлинга $\alpha \leq (\tau_0 + \delta_1)^n$ с некоторой $\delta_1 = o(1)$.

Конечно, если вспомнить простую оценку $\chi(G) \geq |V|/\alpha(G)$, справедливую для любого графа $G = (V, E)$, то окажется, что $\chi(\mathcal{G}_n) \geq (\tau_1/\tau_0 + \delta_2(n))^n$ с некоторой $\delta_2 = o(1)$, и это, на первый взгляд, даже лучше заявленного в теореме результата. Неприятность в том, что граф расстояний $\mathcal{G}_n$ вполне может содержать (и содержит) клики размера больше k .

Воспользуемся вероятностным методом (см. [18], [19]). Рассмотрим произвольное число $\gamma \in (\tau_0/c', 1)$. Такое γ существует, поскольку $c' > c \geq \tau_0$. Положим $q = \gamma^n$,

где n по-прежнему достаточно велико. Построим случайный подграф $G = (\mathcal{V}_n, E)$ графа $\mathcal{G}_n$, “кладя” в E каждое ребро из $\mathcal{E}_n$ с вероятностью q независимо от остальных ребер. Образуется вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$, в котором

$$\begin{aligned}\Omega_n &= \{G = (\mathcal{V}_n, E), E \subseteq \mathcal{E}_n\}, & \mathcal{B}_n &= 2^{\Omega_n}, \\ P_n(G) &= q^{|E|}(1-q)^{|\mathcal{E}_n|-|E|} & \text{для } G &= (\mathcal{V}_n, E).\end{aligned}$$

Определим на Ω_n два семейства случайных величин. Во-первых, при каждом $l \in \mathbb{N}$ и при каждом $G \in \Omega_n$ положим $X_l(G)$ равной числу независимых множеств вершин размера l в графе G . Во-вторых, при аналогичных условиях $Y_m(G)$ – это число клик размера m в G .

Пусть $l = [(c')^n]$. Ясно, что за счет неравенства $c' < \tau_1$ при больших n выполнено $l < |\mathcal{V}_n|$, а стало быть, величина X_l корректно определена.

Допустим, мы показали, что

$$P_n(X_l = 0) > \frac{1}{2}, \quad P_n(Y_{k+1} = 0) > \frac{1}{2}.$$

Тогда существует граф G в $\mathbb{R}^n$ с $\omega(G) \leq k$ и $\alpha(G) \leq l$. Последняя оценка означает, что

$$\chi(G) \geq \frac{|\mathcal{V}_n|}{\alpha(G)} = \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta(n)\right)^n,$$

и теорема доказана. (Следует только заметить, что при малых n доказывать нечего, ведь мы вольны на начальном отрезке натурального ряда выбрать значения $\delta(n)$ сколь угодно большими по модулю.) Что ж, будем оценивать вероятности.

Поскольку X_l и Y_m принимают неотрицательные целые значения, очевидно, что достаточно проверить неравенства $MX_l < 1/2$, $MY_{k+1} < 1/2$ для математических ожиданий наших случайных величин.

Начнем с MX_l . За счет линейности математического ожидания, имеем

$$MX_l = \sum_{W \subset \mathcal{V}_n, |W|=l} (1-q)^{r(W)}, \quad r(W) = |\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}_n : \mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in W\}|.$$

Ясно, что, поскольку $c' > \tau_0$, то $l > \alpha = \alpha(\mathcal{G}_n)$ при всех достаточно больших n , и, стало быть, для каждого $W \subset \mathcal{V}_n$, $|W| = l$, выполнено $r(W) > 0$. Нетрудно, однако, установить и гораздо более точное неравенство $r(W) \geq l^2/(4\alpha)$ (при $l > \alpha$). В разделе 4 мы обсудим неравенства такого типа и там же приведем необходимые доказательства. Теперь же лишь применим данный результат к оценке интересующего нас математического ожидания.

Заметим сначала, что

$$\begin{aligned}\frac{l^2}{4\alpha} &\geq \frac{((c')^2 + \delta_3(n))^n}{(\tau_0 + \delta_4(n))^n} = \left(\frac{(c')^2}{\tau_0} + \delta_5(n)\right)^n, \\ \delta_3(n) &= o(1), \quad \delta_4(n) = o(1), \quad \delta_5(n) = o(1).\end{aligned}$$

Таким образом, полагая

$$A_l = \frac{l^2}{4\alpha}, \quad N = |\mathcal{V}_n|,$$

имеем (с некоторыми $\delta_i(n) = o(1)$)

$$\begin{aligned} MX_l &\leq C_N^l \cdot (1-q)^{A_l} \leq \left(\frac{eN}{l}\right)^l \cdot (1-q)^{A_l} \\ &\leq \left(\frac{\tau_1}{c'} + \delta_6(n)\right)^{(c'+\delta_7(n))^n} \cdot e^{-q((c')^2/\tau_0+\delta_5(n))^n} = e^{(c'+\delta_8(n))^n - (\gamma \cdot (c')^2/\tau_0+\delta_9(n))^n}. \end{aligned}$$

У нас $\gamma > \tau_0/c'$. Значит, $\gamma \cdot (c')^2/\tau_0 > c'$, т.е.

$$(c' + \delta_8(n))^n - \left(\frac{\gamma \cdot (c')^2}{\tau_0} + \delta_9(n)\right)^n \rightarrow -\infty,$$

откуда

$$e^{(c'+\delta_8(n))^n - (\gamma \cdot (c')^2/\tau_0+\delta_9(n))^n} \rightarrow 0.$$

Следовательно, при всех достаточно больших n выполнено $MX_l < 1/2$, и нам остается обосновать оценку $MY_{k+1} < 1/2$.

За счет линейности математического ожидания имеем $MY_{k+1} \leq C_N^{k+1} q^{C_{k+1}^2}$. Далее, поскольку k – константа (т.е. k не зависит от n),

$$MY_{k+1} \leq N^{k+1} \cdot (\gamma^n)^{C_{k+1}^2} = (\tau_1 + \delta_{10}(n))^{n(k+1)} \gamma^{nk(k+1)/2} = e^{n(k+1)(\ln \tau_1 + k/2 \ln \gamma + \delta_{11}(n))}.$$

Из определения c и из условия $c < c'$ видно, что

$$k \geq \left\lceil \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} \right\rceil \geq \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c - \ln \tau_0} > \frac{2 \ln \tau_1}{\ln c' - \ln \tau_0}.$$

Все наши прежние выкладки верны при любом $\gamma > \tau_0/c'$. Возьмем γ настолько близким к своей нижней границе, чтобы оказалась справедливой оценка $k > 2 \ln \tau_1 / (-\ln \gamma)$. Тогда с учетом отрицательности величины $\ln \gamma$

$$\ln \tau_1 + \frac{k}{2} \ln \gamma < \ln \tau_1 - \ln \tau_1 = 0.$$

Таким образом, $MY_{k+1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и нужное нам неравенство при больших n имеет место.

Теорема доказана.

3.2. Доказательство теоремы 4. Схема действий практически полностью повторяет свой аналог из предыдущего раздела. По существу, разница только в построении графа $\mathcal{G}_n$.

Пусть

$$\mathcal{V}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = -1\}| = [b_{-1}n], |\{i : x_i = 1\}| = [b_1n]\}.$$

Пусть, далее, p – минимальное простое число, удовлетворяющее условию

$$[b_{-1}n] + [b_1n] - 2p < -2[b_{-1}n].$$

Положим

$$\mathcal{E}_n = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2p}\}, \quad \mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n).$$

По Стирлингу $|\mathcal{V}_n| = (\rho_1 + o(1))^n$. Кроме того, известно (см. [3]), что $\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n) \leq (\rho_0 + o(1))^n$. Наконец, неравенство типа $r(W) \geq l^2/(4\alpha)$ верно и здесь. Дальнейшие рассуждения ясны, и теорема доказана.

4. Об оценках величины $r(W)$

В предыдущем разделе мы определили некоторую величину $r(W)$. Для этой величины существуют нижние оценки разной степени точности. Сейчас мы их сформируем в виде леммы.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$ – один из двух графов расстояний, описанных в пп. 3.1 и 3.2. Пусть, далее, $W \subset \mathcal{V}_n$, $|W| = l$, и

$$F = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E}_n : \mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in W\}.$$

Положим $\alpha = \alpha(\mathcal{G}_n)$. Справедливы следующие оценки:

- 1) если $l > \alpha$, то $r(W) = |F| \geq l^2/(4\alpha)$;
- 2) если $l > \alpha$, то существует такая функция $\delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что

$$|F| > \frac{l^2}{2\alpha}(1 + \delta(n));$$

- 3) если $l \geq (n+1)\alpha$, то существует такая функция $\sigma(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, что

$$|F| > \frac{l^2 - nl\alpha + n^2\alpha^2/2}{\alpha}(1 + \sigma(n)).$$

Самая нетривиальная среди перечисленных оценок, конечно, третья. Правда, верна она лишь при некотором ограничении. На самом деле, из ее доказательства будет видно, что нужно делать в остальных случаях. Более того, доказывать ее можно, фактически не ограничивая общности, лишь для случая из п. 3.1. Докажем, стало быть, только ее, причем для “первого” графа $\mathcal{G}_n$. Заметим, что при $l \sim n\alpha$ она превращается во вторую оценку, а при $n\alpha = o(l)$ она становится асимптотически вдвое точнее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Начнем с того, что в W есть независимое множество A вершин графа $G = (W, F)$, имеющее максимальную мощность. Положим $\beta = |A|$. Ясно, что $\beta \leq \alpha$. Кроме того, ввиду максимальной A , каждая вершина из $W \setminus A$ соединена ребром (принадлежащим F) хотя бы с одной вершиной из A .

Разобьем $W \setminus A$ на две непересекающиеся части L и K . Здесь K – это такое множество вершин, что для любой вершины $x \in K$ существует ровно одна вершина $y \in A$ со свойством $(x, y) \in F$. Формально,

$$K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : (x, y) \in F\}| = 1\},$$

$$L = (W \setminus A) \setminus K = \{x \in W \setminus A : |\{y \in A : (x, y) \in F\}| \geq 2\}.$$

Покажем, что $|K| \leq n\beta$. Предположим противное. Тогда по принципу Дирихле найдется такая вершина $x \in A$, что

$$|\{y \in K : (x, y) \in F\}| \geq n + 1.$$

Рассмотрим произвольные

$$y_1, \dots, y_{n+1} \in \{y \in K : (x, y) \in F\}.$$

Выберем из них любые две различные вершины y_i, y_j . Положим $M = (A \setminus \{x\}) \cup \{y_i, y_j\}$. Поскольку $|M| > |A|$, в M есть ребра графа G . Наша конструкция устроена так, что с необходимостью $(y_i, y_j) \in F$. Значит, вершины $y_1, \dots, y_{n+1}$ *дистанционного* графа в $\mathbb{R}^n$ попарно соединены ребрами, т.е. образуют правильный n -мерный симплекс. Однако $(0, 1)$ -векторы, с которыми мы имеем дело, полномерных симплексов, очевидно, образовывать не могут. Противоречие.

Итак, $|K| \leq n\beta \leq n\alpha$. Ясно, далее, что

$$F = \{(x, y) : x \in K, y \in A\} \cup \{(x, y) : x \in L, y \in A\} \cup \{(x, y) : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\}.$$

Иными словами, полагая

$$F_1 = \{(x, y) : x \in W \setminus A, y \in W \setminus A\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F| &= |\{(x, y) : x \in K, y \in A\}| + |\{(x, y) : x \in L, y \in A\}| + |F_1| \\ &\geq 2(l - \beta) - |K| + |F_1| \geq 2(l - \beta) - n\beta + |F_1| \\ &\geq 2(l - \alpha) - n\alpha + |F_1| = 2l - \alpha(n + 2) + |F_1|. \end{aligned}$$

Теперь осуществим ту же схему действий, заменяя W на $W_1 = W \setminus A$, A на A_1 (независимое множество вершин в W_1 , имеющее максимальную мощность), β на $\beta_1 = |A_1| \leq \alpha$, L и K на L_1 и K_1 , так что $W_1 \setminus A_1 = L_1 \cup K_1$, и т.д. Полагая $l_1 = |W_1| \geq l - \alpha$ и

$$F_2 = \{(x, y) : x \in W_1 \setminus A_1, y \in W_1 \setminus A_1\},$$

имеем

$$\begin{aligned} |F_1| &= |\{(x, y) : x \in K_1, y \in A_1\}| + |\{(x, y) : x \in L_1, y \in A_1\}| + |F_2| \\ &\geq 2(l_1 - \beta_1) - |K_1| + |F_2| \geq 2(l_1 - \beta_1) - n\beta_1 + |F_2| \\ &\geq 2(l - 2\alpha) - n\alpha + |F_2| = 2l - \alpha(n + 4) + |F_2|. \end{aligned}$$

Описанную процедуру мы итерируем $k = [(l - n\alpha)/\alpha]$ раз. В результате получаем оценку

$$|F| \geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + |F_k|,$$

где

$$F_k = \{(x, y) : x \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}, y \in W_{k-1} \setminus A_{k-1}\}.$$

Все шаги процедуры корректны, так как для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ выполнено

$$|W_i| = |W_{i-1} \setminus A_{i-1}| \geq l - i\alpha \geq l - k\alpha \geq n\alpha,$$

а значит, всякий раз рассмотрение множества L_i , дающего “удвоенный вклад” в оценку числа ребер графа G , оправдано с учетом неравенства $|K_i| \leq n\beta_i \leq n\alpha$. При этом, формально, $W_0 = W$, $A_0 = A$ и т.д. Более того, за счет условия $l \geq (n + 1)\alpha$ получаем $k \geq 1$, вследствие чего хотя бы один шаг процедуры мы непременно осуществим и тем подтвердим корректность суммирования по i от 1 до k .

Остается оценить величину $|F_k|$. Это, по сути, количество ребер графа G на множестве вершин W_k . Как и прежде, выделим в W_k подмножество A_k , имеющее

максимальную мощность среди всех подмножеств в W_k , свободных от ребер G . Ясно, опять-таки, что каждая вершина из $W_k \setminus A_k$ соединена ребром хотя бы с одной вершиной в A_k . Таким образом, рассмотрение A_k дает вклад размера не меньше $|W_k| - |A_k| \geq l - k\alpha - \alpha$ в величину $|F_k|$.

Снова итерируем описанную процедуру. Каждый раз мы удаляем не более α вершин из W_k . И каждый раз мы добавляем не менее $l - k\alpha - i\alpha$ (i – номер итерации) в оценку величины $|F_k|$. Вспоминая о том, что $|W_k| \geq n\alpha$, приходим к выводу, что итераций можно провести, как минимум, n . В итоге

$$|F_k| \geq \sum_{i=1}^n (l - k\alpha - i\alpha),$$

а стало быть,

$$\begin{aligned} |F| &\geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (l - k\alpha - i\alpha) \\ &\geq \sum_{i=1}^k (2l - \alpha(n + 2i)) + \sum_{i=1}^n (n\alpha - i\alpha) = k(2l - n\alpha) - k(k+1)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \\ &\geq \left(\frac{l - n\alpha}{\alpha} - 1\right)(2l - n\alpha) - \frac{l - n\alpha}{\alpha} \left(\frac{l - n\alpha}{\alpha} + 1\right)\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \\ &= \frac{2l^2 - 3ln\alpha + n^2\alpha^2}{\alpha} - (2l - n\alpha) - \frac{(l - n\alpha)^2 + (l - n\alpha)\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha^2(n^2 - n)}{2\alpha} \\ &= \frac{l^2 - nl\alpha + (1/2)n^2\alpha^2 + (1/2)n\alpha^2 - l\alpha}{\alpha} - (2l - n\alpha) \\ &= \frac{l^2 - nl\alpha + (1/2)n^2\alpha^2}{\alpha} (1 + \sigma(n)). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146.
- [2] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, Матем. просвещение, **8**, МЦНМО, М., 2004, 185–221.
- [3] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [4] А. М. Райгородский, *Хроматические числа*, МЦНМО, М., 2003.
- [5] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics, II* (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [6] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York, NY, 2005.
- [7] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973.
- [8] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [9] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54:5** (1951), 371–373.

- [10] О. Nechushtan, “On the space chromatic number”, *Discrete Math.*, **256**:1–2 (2002), 499–507.
- [11] Л. Л. Иванов, “Оценка хроматического числа пространства $\mathbb{R}^4$ ”, *УМН*, **61**:5 (2006), 181–182.
- [12] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148.
- [13] “Unsolved problems”, *Congr. Numer.*, **15** (1976), 678–691.
- [14] N. Wormald, “A 4-chromatic graph with a special plane drawing”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **28**:1 (1979), 1–8.
- [15] R. Hochberg, P. O’Donnel, “Some 4-chromatic unit-distance graphs without small cycles”, *Geombinatorics*, **5**:4 (1996), 137–141.
- [16] О. И. Рубанов, “Хроматические числа трехмерных графов расстояний, не содержащих тетраэдров”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 797–800.
- [17] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [18] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [19] А. М. Райгородский, *Вероятность и алгебра в комбинаторике*, МЦНМО, Москва, 2008.

А. М. Райгородский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mraigor@yandex.ru

Поступило

04.06.2008

О. И. Рубанов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: leg@pisem.net