Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Купавский, А. М. Райгородский, О разбиении
трехмерных множеств на пять частей меньшего диамет-
ра, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 233–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:39:08

О разбиении трехмерных множеств на пять частей меньшего диаметра

А. Б. Купавский, А. М. Райгородский

Настоящая работа связана с классической проблемой Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра. Для величины

$$d_5^3 = \sup_{\Phi \subset \mathbb{R}^3, \text{diam } \Phi = 1} \inf \{x \geq 0 : \Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_5, \text{diam } \Phi_i \leq x\}$$

получена новая верхняя оценка, улучшающая прежнюю оценку Лассака 1982 г.

Библиография: 20 названий.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Настоящее исследование связано с классической проблемой К. Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1]–[8]). В той постановке, о которой речь пойдет ниже, задача рассматривалась в [9]–[11] и др.

Итак, пусть k, n – натуральные числа, а Φ – произвольное (ограниченное, неотточечное) множество точек в $\mathbb{R}^n$. Полагая

$$\text{diam } \Phi = \sup_{X, Y \in \Phi} \rho(X, Y),$$

где $\rho(X, Y)$ – стандартная евклидова метрика, определяем функции

$$d_k^n(\Phi) = \inf \{x \geq 0 : \Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \dots \cup \Phi_k, \text{diam } \Phi_i \leq x\}, \quad d_k^n = \sup_{\Phi, \text{diam } \Phi = 1} d_k^n(\Phi).$$

Поведение функций $d_k^n(\Phi)$ и d_k^n достаточно хорошо изучено при $n \leq 2$ (см. [9]–[11]), и в настоящей работе мы не станем обсуждать указанные случаи. В то же время имеется ряд глубоких результатов при достаточно больших n , а также в асимптотике по $n \rightarrow \infty$ (см. [1]–[6]). Однако даже про $n = 3$ практически ничего не известно.

Довольно легко понять (см., например, [8]), что

$$d_1^3 = d_2^3 = d_3^3 = 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-691.2008.1), грантов Президента РФ (грант № МД-5414.2008.1) и фонда “Династия”.

Несколько сложнее устанавливается неравенство (см. [8])

$$d_4^3 \geq \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}.$$

В 1953 г. Гейл предположил, что это неравенство неулучшаемо (см. [12]). Однако по сей день гипотеза Гейла не доказана и не опровергнута. Известно лишь, что $d_4^3 \leq 0.98$ (см. [8], [13]–[15]).

Тем более, далека от своего решения проблема отыскания величины d_5^3 .

В 1982 г. Лассак (см. [16]) доказал, что

$$d_{2^{n-1}+1}^n \leq \sqrt{\frac{4n^2 + \sqrt{8n^2 + 1} - 1}{4n^2 + 4n}}.$$

Как следствие, при $n = 3$ имеем

$$d_5^3 \leq \sqrt{\frac{35 + \sqrt{73}}{48}} = 0.9524 \dots$$

Основной результат этой статьи состоит в улучшении оценки Лассака. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство*

$$d_5^3 \leq 0.9425.$$

В следующем разделе мы опишем общий подход к получению оценок, подобных лассаковской и оценке из теоремы 1.

2. Общий подход

Назовем множество U *универсальной покрывшкой* в $\mathbb{R}^n$, если для любого $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, $\text{diam } \Phi = 1$, найдется некоторое движение пространства O такое, что

$$O(U) \supseteq \Phi.$$

Например, еще в 1901 г. Х. Юнг доказал, что в $\mathbb{R}^n$ универсальной покрывшкой является шар радиуса $r = \sqrt{n/(2n+2)}$. Такой шар мы будем в дальнейшем называть *шаром Юнга* (см. [17]).

Для доказательства оценки, приведенной в разделе 1, Лассак использовал универсальную покрывшку U в $\mathbb{R}^n$, образованную пересечением двух шаров – шара Юнга

$$B = \{X = (x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$$

и шара радиуса 1 с центром в произвольной точке на границе B :

$$U = B \cap \{X = (x_1, \dots, x_n) : (x_1 - r)^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

Назовем систему множеств $\mathcal{U}$ *универсальной покрывающей системой* (УПС) в $\mathbb{R}^n$, если для любого $\Phi \subset \mathbb{R}^n$, $\text{diam } \Phi = 1$, найдется $U \in \mathcal{U}$ и некоторое движение пространства O такое, что

$$O(U) \supseteq \Phi.$$

Понятно, что универсальная покрывка есть частный случай УПС. В то же время УПС вполне может быть и бесконечной (см. [18]). В любом случае легко показать, что, какова бы ни была УПС $\mathcal{U}$, выполнено неравенство (см. [11])

$$d_k^n \leq \sup_{U \in \mathcal{U}} d_k^n(U). \quad (1)$$

В следующем разделе мы опишем УПС, с помощью которой мы затем докажем теорему 1. Отметим напоследок, что подробнее с теорией УПС можно ознакомиться по работам [19], [20].

3. Построение УПС

Пусть

$$r = \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 3 + 2}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = 0.612 \dots$$

– радиус шара Юнга в $\mathbb{R}^3$. Зафиксируем произвольное число d на отрезке $[0.5, r]$. Рассмотрим шар

$$D = D(d) = \{X = (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq d^2\}$$

и шар

$$D_1 = \{X = (x, y, z) : (x - d)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Обозначим через S и S_1 сферы, отвечающие D и D_1 .

Зафиксируем, далее, произвольную точку $\mathcal{O} = (a, 0, c)$, принадлежащую множеству

$$S \cap D_1 \cap \{X = (x, y, z) : x \leq 0\} \cap \{X = (x, y, z) : y = 0\} \cap \{X = (x, y, z) : z \leq 0\}.$$

Иными словами, точка $\mathcal{O}$ лежит на замкнутой дуге $L = L(d)$ большого круга

$$S \cap \{X = (x, y, z) : y = 0\},$$

у которой “правый” конец расположен на отрицательной части оси z , а “левый” отстоит от центра шара D_1 – точки $(d, 0, 0)$ – на расстояние 1 (см. рис. 1). Положим

$$D_2 = D_2(\mathcal{O}) = \{X = (x, y, z) : (x - a)^2 + y^2 + (z - c)^2 \leq 1\}.$$

Таким образом, D_2 – это шар радиуса 1 с центром в $\mathcal{O}$. Положим также $S_2 = \partial D_2$.

Пусть, наконец,

$$\mathcal{U} = \{U(d, \mathcal{O}) : d \in [0.5, r], \mathcal{O} \in L(d)\} = \bigcup_{d \in [0.5, r]} \bigcup_{\mathcal{O} \in L(d)} \{U(d, \mathcal{O})\}$$

– это семейство множеств мощности континуум, в котором

$$U(d, \mathcal{O}) = D \cap D_1 \cap D_2.$$

Понятно, что в некотором смысле предложенная конструкция обобщает конструкции Юнга и Лассака (см. раздел 2). Однако теперь речь идет не об универсальной покрывке.

Рис. 1

ЛЕММА 1. Семейство множеств $\mathcal{U}$ образует УПС в $\mathbb{R}^3$.

Похожее утверждение было сформулировано в кратком сообщении [18]. Ниже мы докажем лемму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть Φ – произвольное множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^3$. Без ограничения общности можно считать, конечно, что Φ замкнуто. Обозначим через d минимальное число, при котором Φ покрывается копией шара $D = D(d)$ ($\Phi \subseteq O(D)$ с подходящим O). В дальнейшем будем писать просто “ D покрывает Φ ”, подразумевая наличие соответствующего движения. Заметим, что шар D определен корректно, так как, разумеется, $d \in [0.5, r]$ для любого Φ .

Ввиду известной теоремы Хелли (см. [17]) и замкнутости Φ , найдется множество $\{z_1, \dots, z_i\} \subseteq \Phi$, состоящее из не более четырех точек и такое, что $\{z_1, \dots, z_i\}$ нельзя покрыть шаром радиуса меньше d . При этом D данное множество покрывает. Иными словами, D – наименьший шар, который содержит $z_1, \dots, z_i$, и ясно, стало быть, что $|\{z_1, \dots, z_i\} \cap S| \geq 2$.

Без ограничения общности (применяем движение) можно считать, что точка $z_1 = (d, 0, 0) \in S$. Поскольку любая точка множества Φ удалена от z_1 на расстояние, не превосходящее единицы, шар D_1 покрывает Φ .

Понятно, что хотя бы одна точка из $\{z_1, \dots, z_i\} \cap S$ должна лежать в полупространстве $\{X = (x, y, z) : x \leq 0\}$ (иначе шар D для $\{z_1, \dots, z_i\}$ не наименьший). Опять-таки без ограничения общности, эта точка совпадает с некоторым $\theta \in L(d)$. А значит, $D_2 = D_2(\theta)$ покрывает Φ .

В итоге, существует движение O , число $d \in [0.5, r]$ и точка $\theta \in L(d)$, при которых

$$O(\Phi) \subseteq D(d) \cap D_1 \cap D_2(\theta) = U(d, \theta) \in \mathcal{U}.$$

Лемма доказана.

4. Построение разбиения

Мы хотим воспользоваться теперь неравенством (1) и леммой 1. Построим, стало быть, разбиение произвольного $U \in \mathcal{U}$ на пять частей. Зафиксируем U (а значит, d и $\mathcal{O}$) и возьмем любые $\varepsilon, \delta \in (0, d)$. Назовем искомые части

$$P_1 = P_1(U, \varepsilon, \delta), \quad \dots, \quad P_5 = P_5(U, \varepsilon, \delta)$$

и положим

$$P_1 = U \cap \{X = (x, y, z) : x \geq d - \varepsilon\},$$

$$P_2 = U \cap \{X = (x, y, z) : x \leq d - \varepsilon\} \cap \{X = (x, y, z) : z \geq -\delta\} \cap \{X = (x, y, z) : y \leq 0\},$$

$$P_3 = U \cap \{X = (x, y, z) : x \leq d - \varepsilon\} \cap \{X = (x, y, z) : z \leq -\delta\} \cap \{X = (x, y, z) : y \leq 0\},$$

при этом P_4 симметрична P_2 , а P_5 симметрична P_3 относительно плоскости

$$\{X = (x, y, z) : y = 0\}.$$

Заметим, что, строго говоря, мы имеем не разбиение, а покрытие $U = P_1 \cup \dots \cup P_5$ (P_i может иметь общую границу с P_j); однако это для нас не принципиально.

В последующих разделах мы найдем диаметры множеств $P_1, \dots, P_5$ в зависимости от всех параметров, которыми они задаются, и в конце осуществим оптимизацию, приводящую к оценке, заявленной в теореме 1.

5. Отыскание диаметров частей при $d \geq 0.592$

5.1. Простейшие наблюдения. Сразу понятно, что диаметр P_1 равен диаметру окружности

$$S \cap \{X = (x, y, z) : x = d - \varepsilon\},$$

т.е.

$$\text{diam } P_1 = 2\sqrt{d^2 - (d - \varepsilon)^2} = 2\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

Теперь заметим, что P_2 и P_3 являются выпуклыми компактными телами с кусочно-гладкой границей, состоящей из (открытых) областей плоскости и сферы (обозначим их через $\partial^2 P_i$, $i = 2, 3$), открытых дуг окружностей и интервалов (обозначим их через $\partial^1 P_i$, $i = 2, 3$) и точек (обозначим их через $\partial^0 P_i$, $i = 2, 3$). Проще всего было бы найти значения $\text{diam } P_2$, $\text{diam } P_3$, коль скоро они бы достигались на $\partial^0 P_2$ и $\partial^0 P_3$ соответственно. К счастью, так оно и будет. В следующих двух пунктах мы убедимся в этом.

Для технического удобства будем предполагать, что $\varepsilon < 0.25$, $\delta < 0.025$. Все равно искомый оптимум достигнется именно при таких ограничениях. В этом случае покрывка и ее разбиение принципиально устроены так, как показано на рис. 2.

5.2. Редукция к одномерным составляющим границ. Справедлива

ЛЕММА 2. Диаметр P_2 достигается на точках из $\partial^1 P_2 \cup \partial^0 P_2$. Аналогичный факт верен для P_3 .

Ниже мы докажем лемму 2 в случае P_2 . Случай P_3 полностью аналогичен.

содержится в шаре D' , ограниченном сферой S' . Но тогда любая точка Z , находящаяся в достаточно малой окрестности Y на сфере, такова, что одновременно $Z \in T$ и $\rho(Z, X) > \rho(Y, X)$. Снова противоречие.

Остается лишь одна возможность: точка X расположена “за центром” O' (или совпадает с ним). Но это нелепо, поскольку центры сфер S_1, S_2 части P_2 не принадлежат ($\varepsilon > 0$, δ мало, а d велико), а центр сферы S лежит на *плоской составляющей* границы этой части ($\delta > 0$), так что, даже если X совпадает с центром S , мы все равно имеем противоречие в соответствии с логикой случая 1.

Как в случае 1, так и в случае 2 мы пришли к противоречию с изначальным допущением $Y \in \partial^2 P_2$. Лемма доказана.

5.3. Редукция к нульмерным составляющим границ. Справедлива

ЛЕММА 3. Диаметр P_2 достигается на точках из $\partial^0 P_2$. Аналогичный факт верен для P_3 .

Ниже мы докажем лемму 3 в случае P_2 . Случай P_3 полностью аналогичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Прежде всего заметим, что непустое пересечение двух сфер – это окружность или точка, и то же самое верно для сферы и плоскости. Будем обозначать (открытую) дугу, соединяющую точки X, Y на сфере, через $\widetilde{XY}$. Такая дуга, разумеется, отнюдь не является единственной; однако из контекста всегда будет ясно, о какой дуге идет речь.

Исходя из леммы 2, мы знаем, что если точки $X, Y \in P_2$ таковы, что $\rho(X, Y) = \text{diam } P_2$, то обе эти точки лежат в объединении $\partial^1 P_2 \cup \partial^0 P_2$. Предположим, что точка Y вопреки утверждению леммы 3 принадлежит одномерной составляющей границы, т.е. $Y \in \partial^1 P_2$.

Сделанное предположение означает, что Y находится либо внутри одной из следующих девяти дуг:

$$\widetilde{AB}, \widetilde{AE}, \widetilde{ME}, \widetilde{MN}, \widetilde{RN}, \widetilde{RB}, \quad \widetilde{PM}, \widetilde{PA}, \widetilde{PR}, \quad (2)$$

либо внутри одного из следующих трех отрезков: BF, NF, EF (см. рис. 2). При этом первые шесть из перечисленных дуг образованы пересечением той или иной плоскости разбиения с той или иной сферой, тогда как последние три дуги получены без участия плоскостей. В результате возникают три принципиально различных случая.

Случай 1. Здесь $Y \in BF, Y \in NF$ или $Y \in EF$. Действуя в точности так же, как и в одноименном случае из доказательства леммы 2, приходим к противоречию с максимальностью величины $\rho(X, Y)$ на множестве P_2 .

Случай 2. Пусть теперь Y лежит на одной из первых шести дуг среди перечисленных в (2). Для начала рассмотрим подробно ситуацию, когда $Y \in \widetilde{AB}$.

Понятно, что точка Y является одной из наиболее удаленных от точки X среди точек множества P_2 . Иными словами, на Y достигается максимум функции $\rho(X, Y')$, взятый по всем $Y' \in P_2$.

Обозначим через P'_2 ортогональную проекцию множества P_2 на плоскость

$$\Pi = \{Z = (x, y, z) : z = -\delta\} \supset \widetilde{AB}.$$

Пусть X' – это образ точки X при такой проекции. Положим $P_2'' = P_2 \cap \Pi \subset P_2'$. Поскольку, как мы заметили выше, на Y достигается максимум функции $\rho(X, Y')$, взятый по всем $Y' \in P_2$, на Y также реализуется максимум функции $\rho(X', Y')$, взятый по всем $Y' \in P_2''$.

Пусть S' – окружность, лежащая в Π и содержащая $\widetilde{AB}$. Обозначим через O' ее центр, а через π_Y – касательную прямую к S' в точке Y ($\pi_Y \subset \Pi$). Тогда, в принципе, возможны два варианта: либо точки X', O' лежат по разные стороны от прямой π_Y , либо они находятся в одной полуплоскости. Однако первый вариант отпадает сразу, ввиду упомянутой максимальности значения $\rho(X', Y)$. Если принять во внимание ту же максимальность, то в рамках второго варианта сработают рассуждения, полностью аналогичные тем, что были проделаны в начале рассмотрения случая 2 в доказательстве леммы 2 (см. п. 5.2). Эти рассуждения показывают, что $\overrightarrow{YX'} \perp \pi_Y$. Как следствие, X' лежит на прямой YO' .

Снова действуем, как и в рамках случая 2 из доказательства леммы 2. Получается, что X' не может лежать ближе к Y , нежели O' . Значит, остается лишь вариант, при котором $X' = O'$. Но тогда $X = G$ и $\rho(X, Y) = \rho(G, Y) = \rho(G, B)$ (см. рис. 2). Нетрудно проверить, что если G' – это любая точка дуги $\widetilde{GM}$ из достаточно малой окрестности точки G , то $\rho(G', B) > \rho(G, B)$. Противоречие с максимальностью величины $\rho(X, Y)$, и, следовательно, $Y \notin \widetilde{AB}$.

Пусть отныне $Y \in \widetilde{RB}$. Осуществляем тот же трюк с проекцией P_2 на некоторую плоскость Π . Здесь в роли Π выступит

$$\{Z = (x, y, z) : x = d - \varepsilon\} \supset \widetilde{RB}.$$

На сей раз приходим к выводу, что $X = H$ и $\rho(X, Y) = \rho(H, Y) = \rho(H, R)$ (см. рис. 2). Смещаясь по дуге $\widetilde{HE}$ в сторону E , имеем точки H' , на каждой из которых $\rho(H', R) > \rho(H, R)$. Опять-таки, противоречие с максимальностью величины $\rho(X, Y)$, и $Y \notin \widetilde{RB}$.

Теперь уже полностью ясна общая схема рассуждений, позволяющих доказать, что $Y \notin \widetilde{I}$ при всех

$$\widetilde{I} \in \{\widetilde{AE}, \widetilde{ME}, \widetilde{MN}, \widetilde{RN}\}.$$

Действительно, за Π обозначаем ту плоскость, на которой расположена $\widetilde{I}$. Полагаем P_2' – ортогональная проекция множества P_2 на Π , тогда как $P_2'' = P_2 \cap \Pi$. Далее, X' – образ точки X при указанной проекции, S' – окружность, лежащая в Π и содержащая $\widetilde{I}$, O' – ее центр. Показываем, что X' обязана находиться на прямой YO' , причем не ближе к Y , нежели O' . Если в ситуациях $\widetilde{I} \in \{\widetilde{AB}, \widetilde{RB}\}$ могло получиться $X' = O'$, то в любом из четырех нынешних случаев $O' \notin P_2$, и противоречие получается сразу.

Случай 2 разобран.

Случай 3. Пусть, наконец, Y лежит на одной из последних трех дуг среди перечисленных в (2). Рассмотрим сперва ситуацию, когда $Y \in \widetilde{PA}$.

Тут легко проходит схема действий, описанная в конце разбора предыдущего случая. Конечно, $\widetilde{PA}$ не лежит ни в одной из плоскостей, которые порождают P_2 , но она все же расположена в плоскости

$$\Pi = \{Z = (x, y, z) : x = \text{const}\}.$$

Проецируя множество P_2 на плоскость Π и пересекая его с ней, стандартными рассуждениями доказываем, что точка X , реализующая максимум величины $\rho(X, Y)$, обязана совпадать либо с H , либо с H_0 . Но это невозможно, так как первые два случая показывают, в частности, что $X \notin \widetilde{ME}$, $X \notin \widetilde{NF}$.

Итак, обеим точкам X, Y ничего не остается, как расположиться на дугах $\widetilde{PM}$, $\widetilde{PR}$.

В принципе, практически очевидно, что диаметр P_2 не может достигаться на точках из дуг $\widetilde{PM}$, $\widetilde{PR}$. Можно, однако, воспользоваться обычной техникой проецирования на плоскость. В данном случае проще работать с дугой $\widetilde{PM}$. Плоскость, в которой лежит эта дуга, перпендикулярна прямой, соединяющей центры сфер S_1, S_2 . Дальнейшие рассуждения стандартны.

Лемма доказана.

5.4. Окончательная локализация диаметров.

ЛЕММА 4. Диаметр P_3 достигается на одном из отрезков BE, AD, BC .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. В силу лемм из предыдущих пунктов диаметр может достигаться только на одном из $C_6^2 = 15$ отрезков

$$AE, AB, AF, EF, BF, AC, BD, CD, CE, CF, DF, \\ DE, BE, AD, BC.$$

Первая группа отрезков отпадает сразу. Например, AE не реализует диаметр, так как можно взять любую точку $A' \in \widetilde{AB}$, достаточно близкую к A , и тогда $\rho(A', E) > \rho(A, E)$. Аналогично поступаем в остальных случаях.

С отрезком DE надо разбираться более аккуратно. Рассмотрим множество Π точек в пространстве, равноудаленных от A и E . Оно образует плоскость, которая проходит через середину дуги $\widetilde{AE}$ перпендикулярно этой дуге. Поскольку точки A и E лежат на сфере S_1 , центр этой сферы равноудален от них и, стало быть, находится в плоскости Π . В то же время абсцисса точки D , разумеется, меньше абсциссы центра S_1 . Следовательно, A и D лежат по разные стороны от Π , а E и D находятся в одном полупространстве. Это доказывает неравенство $\rho(D, E) < \rho(D, A)$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В конечном счете нас будет интересовать максимум диаметров частей $P_1, \dots, P_5$. Однако ясно, что отрезок BE имеет длину, меньшую диаметра P_2 . Это значит, что отрезок BE можно спокойно исключить из рассмотрения, несмотря на то что он принадлежит множеству отрезков, которые ввиду леммы 4 имеют шанс реализовать диаметр P_3 . Итак, в дальнейшем измерим только AD и BC .

ЛЕММА 5. Диаметр P_2 достигается на одном из отрезков PF, RE, BM, AN .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Действуем в точности так же, как и в предыдущей лемме. Всего имеется $C_8^2 = 28$ пар точек, на которых мог бы достигаться диаметр. Двадцать три из них отпадают по очевидным соображениям, четыре – это те, что фигурируют в формулировке леммы, а одна “сомнительная” – это EN . Берем ту же плоскость Π , что и в доказательстве леммы 4. Нетрудно видеть, что A, N лежат по разные стороны от нее, тогда как E, N – в одном полупространстве. Значит, $\rho(E, N) < \rho(A, N)$, и лемма доказана.

5.5. Сводка вычислений. Нам осталось вычислить

$$\rho(A, D), \quad \rho(B, C), \quad \rho(P, F), \quad \rho(R, E), \quad \rho(B, M), \quad \rho(A, N).$$

Разумеется, указанные величины будут зависеть и от $U \in \mathcal{U}$ (т.е. в конечном счете от d и $\mathcal{O}$), и от ε, δ . Отметим, однако, что при фиксированном d расположение точки $\mathcal{O}$ на величины $\rho(A, D)$ и $\rho(B, C)$ не влияет. В то же время максимум значений $\rho(P, F), \rho(B, M)$, очевидно, достигается в случае, когда $\mathcal{O} = C$, а максимум значений $\rho(A, N), \rho(R, E)$ реализуется, напротив, при $\mathcal{O} = (0, 0, -d)$. Найдем, стало быть, “крайние” положения M, P и R, N и лишь для них определим нужные нам расстояния. Таким образом, мы избавимся от необходимости перебора по $\mathcal{O}$.

Легко проверить, что при сделанных оговорках

$$\begin{aligned} A &= \left(d - \frac{1}{2d}, -\sqrt{1 - \frac{1}{4d^2} - \delta^2}, -\delta \right), & B &= (d - \varepsilon, -\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2 - \delta^2}, -\delta), \\ C &= \left(d - \frac{1}{2d}, 0, -\sqrt{1 - \frac{1}{4d^2}} \right), & D &= (d - \varepsilon, 0, -\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}), \\ M &= \left(d - \frac{1 + \sqrt{3(4d^2 - 1)}}{4d}, 0, -\frac{\sqrt{4d^2 - 1} - \sqrt{3}}{4d} \right), \\ N &= (d - \varepsilon, 0, -d + \sqrt{1 - (d - \varepsilon)^2}), \\ E &= (d - \sqrt{1 - \delta^2}, 0, -\delta), & F &= (d - \varepsilon, 0, -\delta), \\ P &= \left(d - \frac{1}{2d}, -\sqrt{\frac{3 - 1/d^2}{4 - 1/d^2}}, \frac{1/2d^2 - 1}{\sqrt{4 - 1/d^2}} \right), \\ R &= \left(d - \varepsilon, -\sqrt{1 - \frac{1}{4d^2} - (d - \varepsilon)^2}, \frac{1}{2d} - d \right). \end{aligned}$$

Теперь найдем длины интересующих нас отрезков:

$$\begin{aligned} \rho^2(A, D) &= 1 + 2d\varepsilon - \frac{\varepsilon}{d} - 2\delta\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}, \\ \rho^2(B, C) &= 1 + 2d\varepsilon - \frac{\varepsilon}{d} - 2\delta\sqrt{1 - \frac{1}{4d^2}}, \\ \rho^2(A, N) &= 2 + 2d\varepsilon - 2d\delta - \frac{\varepsilon}{d} - 2(d - \delta)\sqrt{1 - (d - \varepsilon)^2}, \\ \rho^2(B, M) &= 1 + 2d\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2d}(1 + \sqrt{3(4d^2 - 1)}) - \frac{\delta}{2d}(\sqrt{4d^2 - 1} - \sqrt{3}), \\ \rho^2(P, F) &= 1 + \varepsilon^2 + \delta^2 - \frac{\varepsilon}{d} + \frac{1 - 2d^2}{d\sqrt{4d^2 - 1}}\delta, \\ \rho^2(R, E) &= 1 - \delta\left(2d - \frac{1}{d}\right) + 2\varepsilon(d - \sqrt{1 - \delta^2}). \end{aligned}$$

5.6. Выбор параметров и завершение вычислений. Положим при каждом $d \geq 0.592$

$$\delta = 0.0228 - \frac{3}{5}\left(\sqrt{\frac{3}{8}} - d\right), \quad \varepsilon = 0.2212 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{3}{8}} - d\right).$$

Нетрудно видеть, что тогда

$$0.592 \leq d \leq 0.613, \quad 0.22 \leq \varepsilon \leq 0.23, \quad 0.01 \leq \delta \leq 0.023. \quad (3)$$

В частности, ε и δ удовлетворяют неравенствам из п. 5.1.

Теперь покажем, что при всех допустимых значениях d даже из (3) вытекают оценки

$$\rho(A, N) < 0.94, \quad \rho(R, E) < 0.94, \quad \rho(P, F) < 0.94.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho^2(A, N) &\leq 2 + 2 \cdot 0.613 \cdot 0.23 - 2 \cdot 0.592 \cdot 0.01 - \frac{0.22}{0.613} \\ &\quad - 2 \cdot (0.592 - 0.023) \cdot \sqrt{1 - (0.613 - 0.22)^2} < 0.87, \\ \rho(A, N) &< \sqrt{0.87} < 0.94, \\ \rho^2(R, E) &\leq 1 + 0.023 \cdot \left(\frac{1}{0.592} - 2 \cdot 0.592 \right) + 2 \cdot 0.23 \cdot \left(0.613 - \sqrt{1 - (0.023)^2} \right) < 0.84, \\ \rho(R, E) &< \sqrt{0.84} < 0.94, \\ \rho^2(P, F) &\leq 1 + (0.23)^2 + (0.023)^2 - \frac{0.22}{0.613} + 0.023 \cdot \frac{1 - 2 \cdot (0.592)^2}{0.592 \sqrt{4 \cdot (0.592)^2 - 1}} < 0.8, \\ \rho(P, F) &< \sqrt{0.8} < 0.94. \end{aligned}$$

Полученная серия неравенств означает, что нам осталось разобраться с величинами $\rho^2(A, D)$, $\rho^2(B, C)$, $\rho^2(B, M)$. Убедимся в том, что $\rho^2(A, D) > \rho^2(B, C)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2(A, D) - \rho^2(B, C)}{2\delta} &= \sqrt{1 - \frac{1}{4d^2}} - \sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2} \\ &> \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot (0.592)^2}} - \sqrt{2 \cdot 0.613 \cdot 0.23} > 0. \end{aligned}$$

Отныне у нас есть три величины, с которыми нам предстоит работать:

$$f_1 = \rho^2(A, D), \quad f_2 = \rho^2(B, M), \quad f_3 = \text{diam } P_1 = 2\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

Ввиду параметризации, сделанной нами в начале пункта, $f_i = f_i(d)$, $i = 1, 2, 3$. Покажем, что f_i — функции, возрастающие по $d \in [0.592, r]$. Для этого просто оценим их производные.

Итак,

$$\begin{aligned} ((f_3/2)^2)' &= 2\varepsilon - \frac{4}{5}d + \frac{4}{5}\varepsilon \geq 0.44 - \frac{4}{5} \cdot 0.613 + \frac{4}{5} \cdot 0.23 > 0, \\ f_1' &= 2\varepsilon - \frac{4}{5}d + \frac{(2/5)d + \varepsilon}{d^2} - \delta \frac{(2\varepsilon - (4/5)d + (4/5)\varepsilon)}{\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}} - \frac{6}{5}\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2} \\ &\geq 2 \cdot 0.22 - \frac{4}{5} \cdot 0.613 + \frac{2}{5 \cdot 0.613} + \frac{0.22}{(0.613)^2} - \frac{(14/5) \cdot 0.023 \cdot 0.23}{\sqrt{2 \cdot 0.592 \cdot 0.22 - (0.23)^2}} \\ &\quad + \frac{(4/5) \cdot 0.592 \cdot 0.01}{\sqrt{2 \cdot 0.613 \cdot 0.23 - (0.22)^2}} - \frac{6}{5}\sqrt{2 \cdot 0.613 \cdot 0.23 - (0.22)^2} > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'_2 &= 2\varepsilon - \frac{4}{5}d - \frac{\varepsilon}{2d} \frac{12d}{\sqrt{3(4d^2 - 1)}} + (1 + \sqrt{3(4d^2 - 1)}) \frac{(4/5)d + 2\varepsilon}{4d^2} \\
&\quad - \frac{\delta}{2d} \frac{4d}{\sqrt{4d^2 - 1}} + (\sqrt{3} - \sqrt{4d^2 - 1}) \frac{(6/5)d - 2\delta}{4d^2} \\
&\geq 2 \cdot 0.22 - \frac{4}{5} \cdot 0.613 - \frac{0.23 \cdot 6}{\sqrt{3(4(0.592)^2 - 1)}} \\
&\quad + (1 + \sqrt{3(4(0.592)^2 - 1)}) \frac{(4/5) \cdot 0.592 + 2 \cdot 0.22}{4(0.613)^2} - \frac{2 \cdot 0.023}{\sqrt{4(0.592)^2 - 1}} \\
&\quad + (\sqrt{3} - \sqrt{4(0.613)^2 - 1}) \frac{(6/5) \cdot 0.592 - 2 \cdot 0.023}{4(0.613)^2} > 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, максимумы величин f_1 , f_2 , f_3 при наших ограничениях и при нашей параметризации достигаются на

$$d = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \varepsilon = 0.2212, \quad \delta = 0.0228.$$

Подставляя указанные значения параметров в выражения для f_1 , f_2 , f_3 , получаем

$$\begin{aligned}
\rho(A, D) &= 0.94244 \dots < 0.9425, & \rho(B, M) &= 0.94243 \dots < 0.9425, \\
\text{diam } P_1 &= 0.9423 \dots < 0.9425.
\end{aligned}$$

Рассмотрение случая $d \geq 0.592$, тем самым, завершено. Отметим, что мы не стремились к абсолютно аккуратному выбору параметров, поскольку улучшение оценки в четвертом или пятом знаке после запятой не представляет особого интереса.

6. Отыскание диаметров частей при $d < 0.592$

Будем оценивать диаметры интересующих нас частей так, как если бы не было сферы S_2 в крышке и на рисунке. По существу, получится нечто подобное крышке Лассака. Если устремить δ к нулю, то отличие P_2 от P_3 станет бесконечно малым. Можно считать, стало быть, что все части $P_2, \dots, P_5$ “почти одинаковы”, и что диаметры их практически неотличимы от максимума из двух величин — $\rho(A, D)$ и $\rho(B, C)$. Имеем ($\delta \sim 0$)

$$\begin{aligned}
\rho^2(A, D) &\sim \rho^2(B, C) \sim 1 + 2d\varepsilon - \frac{\varepsilon}{d}, \\
\text{diam } P_1 &= 2\sqrt{2d\varepsilon - \varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что с ростом d величины, стоящие после знаков “ $\sim$ ” и “ $=$ ”, возрастают при любом фиксированном ε . Положим $\varepsilon = 0.232$. Тогда простой расчет показывает, что даже при $d = 0.592$ первые две из упомянутых величин не превосходят $(0.9399)^2$, а последняя не превышает 0.9399. Значит, при достаточно малом δ выполнено

$$\begin{aligned}
\rho(A, D) &\leq 0.94, & \rho(B, C) &\leq 0.94, \\
\text{diam } P_1 &\leq 0.94.
\end{aligned}$$

Разбор случая $d < 0.592$ завершен, и теорема полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [2] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.
- [3] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247.
- [4] A. M. Raigorodskii, “The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary”, *Math. Intelligencer*, **26**:3 (2004), 4–12.
- [5] А. М. Райгородский, *Проблема Борсука*, МЦНМО, М., 2006.
- [6] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [7] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [8] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965.
- [9] H. Lenz, “Zerlegung ebener Bereiche in konvexe Zellen von möglichst kleinem Durchmesser”, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, **58** (1956), 87–97.
- [10] H. Lenz, “Über die Bedeckung ebener Punktmengen durch solche kleineren Durchmessers”, *Arch. Math. (Basel)*, **7** (1956), 34–40.
- [11] В. П. Филимонов, “О покрытии плоских множеств”, *Матем. сб.* (в печати).
- [12] D. Gale, “On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:2 (1953), 222–225.
- [13] B. Grünbaum, “A simple proof of Borsuk’s conjecture in three dimensions”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 776–778.
- [14] A. Heppes, “On the partitioning of three-dimensional point-sets into sets of smaller diameter”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), 413–416.
- [15] В. В. Макеев, “Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела”, *Геометрия и топология*. 2, Зап. научн. сем. ПОМИ, **246**, ПОМИ, СПб., 1997, 191–195.
- [16] M. Lassak, “An estimate concerning Borsuk partition problem”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, **30**:9–10 (1982), 449–451.
- [17] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*, Мир, М., 1968.
- [18] А. М. Райгородский, Ю. А. Калнишкан, “О проблеме Борсука в $\mathbb{R}^3$ ”, *Матем. заметки*, **74**:1 (2003), 149–151.
- [19] B. Weissbach, “Polyhedral covers”, *Intuitive Geometry* (Siófok, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **48**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 639–646.
- [20] В. В. Макеев, “Универсальные покрывающие и проекции тел постоянной ширины”, *Укр. геом. сб.*, **32** (1989), 84–88.

А. Б. Купавский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: kupavskii@yandex.ru

Поступило

04.06.2008

А. М. Райгородский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mraigor@yandex.ru