Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Семёнова, Условия на определяющие функционалы для подмножеств пространства Соболева, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 892–902

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:41:11

Условия на определяющие функционалы для подмножеств пространства Соболева

Т. Ю. Семёнова

В работе рассматриваются условия для множества определяющих функционалов и дается приложение этих результатов при исследовании единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка.

Библиография: 12 названий.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Напомним, что *пространство Соболева* $W_2^1(\Omega)$ состоит из элементов $f \in L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_2(\Omega), \quad j = 1, \dots, n,$$

и снабжено нормой $\|f\| = (\|f\|_2^2 + \|\nabla f\|_2^2)^{1/2}$. Пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием по данной норме множества бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω (см. также [1; гл. 2] или [2; гл. 10]).

Определим множество функций

$$\mathcal{U}_C = \{u \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \|\nabla u\|_2^2 \leq C \cdot \|u\|_2^2\}.$$

Набор линейно независимых функционалов $P^1, \dots, P^N$ будем называть *множеством определяющих функционалов* для $\mathcal{U}_C$ (см. [3], [4]), если из равенств $P^1(u) = \dots = P^N(u) = 0$ для $u \in \mathcal{U}_C$ следует, что $u \equiv 0$ в области Ω .

В работе рассмотрены линейные непрерывные функционалы вида

$$P(u) = \int_{\Omega} u(x) \cdot p(x) dx = \langle u, p \rangle, \quad \text{где } p \in L_2(\Omega),$$

доказаны необходимое условие, критерий и достаточное условие для множества определяющих функционалов.

Заметим, что множество функций $\mathcal{U}_C$ выбрано неслучайным образом. Ему принадлежат функции вида $u = v_1 - v_2$, где v_1, v_2 – два обобщенных решения дифференциального уравнения специального вида, постоянная C в данном случае зависит

от рассматриваемого уравнения. И если некоторый набор функционалов является определяющим для $\mathcal{U}_C$, то он различает два решения, т.е. из условий

$$P^n(v_1) = P^n(v_2), \quad n = 1, \dots, N,$$

следует, что $v_1 = v_2$ в области Ω (подробнее см. п. 3 работы).

Ранее задачи нахождения конечного множества функционалов, различающих решения уравнений, рассматривались в целом ряде работ (см., например, [3]–[10]).

Сформулируем основные результаты данной работы.

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ – собственные значения задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda \cdot u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ – соответствующие им собственные функции (собственное значение λ_k пишется столько раз, сколько линейно независимых собственных функций ему соответствует). Заметим, что если $C < \lambda_1$, то $\mathcal{U}_C$ содержит только функцию, равную нулю в области Ω .

Пусть даны функционалы $\{P^n\}_{n=1, \dots, N}$. Определим матрицу

$$\mathcal{P}_{N \times S} = (p_k^n)_{k=1, \dots, S}^{n=1, \dots, N},$$

составленную из элементов $p_k^n = \langle p^n, \varphi_k \rangle$ – коэффициентов Фурье функций p^n по системе собственных функций задачи (1).

При $C \neq \lambda_k$ определим матрицы $\mathcal{H}^r$ размера $N \times N$ следующим образом:

$$h_{ij}^r = \sum_{k=1}^r \frac{p_k^i p_k^j}{\lambda_k - C}.$$

Положим $\mathcal{H} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^r$ (определение корректно, так как $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а $p^i, p^j \in L_2(\Omega)$).

ТЕОРЕМА 1 (НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ). Пусть $\lambda_S \leq C < \lambda_{S+1}$. Если множество $\{P^n\}_{n=1, \dots, N}$ является определяющим набором функционалов для $\mathcal{U}_C$, то ранг матрицы $\mathcal{P}_{N \times S}$ равен S .

Из теоремы 1 следует, что $N \geq S$. Нижняя оценка числа функционалов достигается на наборе $\langle u, \varphi_k \rangle$, $k = 1, \dots, S$, – первые S коэффициентов Фурье функции u (см. также [5]). Однако для вычисления коэффициентов Фурье нам необходимо знать функцию во всей области, что не всегда на практике бывает возможно, поэтому имеет смысл рассматривать другие наборы функционалов, в том числе такие, где функции p^n имеют малый носитель.

ТЕОРЕМА 2 (КРИТЕРИЙ). Пусть $\lambda_S < C < \lambda_{S+1}$. Множество $\{P^n\}_{n=1, \dots, N}$ является множеством определяющих функционалов тогда и только тогда, когда число отрицательных собственных значений матрицы $\mathcal{H}$ равно S .

ТЕОРЕМА 3 (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ). Пусть $\lambda_S < C < \lambda_{S+1}$. Дано множество функционалов $\{P^n\}_{n=1, \dots, N}$ и $\max_n |p_k^n| = b_k$. Если для некоторого $r_0 \geq N + 1$ для собственных значений матрицы $\mathcal{H}^{r_0}$ выполнено

$$\kappa_1^{r_0} \leq \dots \leq \kappa_S^{r_0} < 0 < \kappa_{S+1}^{r_0} \leq \dots \leq \kappa_N^{r_0}$$

и при этом

$$\min\{|\kappa_S^{r_0}|, \kappa_{S+1}^{r_0}\} > N^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k - C},$$

то $\{P^n\}_{n=1,\dots,N}$ – множество определяющих функционалов для $\mathcal{U}_C$. Если $N = S$, то достаточным условием будет

$$\kappa_S^{r_0} < -S^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \frac{b_k^2}{\lambda_k - C}.$$

2. Доказательство теорем 1–3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если функция $u \in \mathcal{U}_C$, то для коэффициентов u_k разложения функции u по собственным функциям задачи 1 имеем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2 \leq C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2.$$

Обозначим $a_k = \lambda_k - C$. При этом

$$a_1 \leq \dots \leq a_S \leq 0 < a_{S+1} \leq \dots$$

Предположим противное – ранг матрицы $\mathcal{P}_{N \times S}$ меньше S ; тогда система линейных уравнений $\mathcal{P}_{N \times S} \cdot (u_1, \dots, u_S)^t = 0$ имеет ненулевое решение $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_S)$. Получили, что

$$\sum_{k=1}^S \hat{u}_k^2 > 0, \quad \sum_{k=1}^S a_k \hat{u}_k^2 \leq 0, \quad \sum_{k=1}^S p_k^n \hat{u}_k = 0, \quad n = 1, \dots, N.$$

То есть функция $u = \hat{u}_1 \varphi_1 + \dots + \hat{u}_S \varphi_S \neq 0$ принадлежит $\mathcal{U}_C$, $P^n(u) = 0$, $n = 1, \dots, N$. Противоречие с тем, что множество функционалов $\{P^n\}_{n=1,\dots,N}$ является определяющим. Значит, ранг матрицы $\mathcal{P}_{N \times S}$ равен S . Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для доказательства введем следующие обозначения. Так же, как и раньше, $a_k = \lambda_k - C$, z_k – k -й коэффициент Фурье разложения z по системе собственных функций задачи (1). Каждый элемент $z \in L_2$ будем отождествлять с набором его коэффициентов Фурье $(z_1, z_2, \dots) \in \ell_2$. Будем писать

$$\langle Az, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k y_k = \langle z, Ay \rangle,$$

причем $Az = (a_1 z_1, a_2 z_2, \dots)$ и $Ay = (a_1 y_1, a_2 y_2, \dots)$ не обязательно элементы из ℓ_2 , а значение $\langle Az, y \rangle$ может не существовать,

$$\langle A^{-1}z, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k y_k}{a_k} = \langle z, A^{-1}y \rangle.$$

Определим матрицы

$$H^r(z^1, \dots, z^M) = \left(\sum_{k=1}^r \frac{z_k^i z_k^j}{\lambda_k - C} \right)_{i=1,\dots,M}^{j=1,\dots,M}.$$

При таком определении $H^r(p^1, \dots, p^N) = \mathcal{H}^r$. Так же введем обозначение для матрицы

$$\mathcal{P} = (p_k^i)_{k=1, \dots, N}^{i=1, \dots, N}.$$

Задача сводится к следующей: нужно найти необходимые и достаточные условия на $p^1, \dots, p^N$, чтобы из условий $z \in \ell_2$, $\langle z, p^n \rangle = 0$ для $n = 1, \dots, N$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k^2 \leq 0$ следовало бы, что $z = 0$. Последнее равносильно тому, что для всех $z \in \ell_2 \setminus \{0\}$, ортогональных линейной оболочке $\text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle$, выполняется неравенство $\langle Az, z \rangle > 0$ (сюда включаем случай $\langle Az, z \rangle = +\infty$).

Сначала разберем случай, когда определитель $|\mathcal{P}| \neq 0$. Схема доказательства такова: построим последовательность $x^1, x^2, \dots \in \ell_2$, ортогональных $\text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle$ и таких, что

$$\text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle \oplus \overline{\text{Lin}\langle x^1, x^2, \dots \rangle} = \ell_2 \quad (2)$$

(замыкание берется по норме ℓ_2). Найдем необходимые и достаточные условия того, чтобы $\langle Ax^i, x^i \rangle > 0$ для любого i , из них последуют необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства $\langle Az, z \rangle > 0$ для $z \in \text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle^\perp$.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_{N+1}, 0, 0, 0, \dots)$. Тогда система линейных уравнений

$$\langle x, p^n \rangle = 0 \quad \text{при} \quad n = 1, \dots, N$$

имеет решение: для $n = 1, \dots, N$ число x_n — определитель матрицы, получаемой заменой n -го столбца в матрице $\mathcal{P}$ на столбец $(p_{N+1}^1, p_{N+1}^2, \dots, p_{N+1}^N)^t$, т.е.

$$x_1 = \begin{vmatrix} p_{N+1}^1 & p_2^1 & \dots & p_N^1 \\ p_{N+1}^2 & p_2^2 & \dots & p_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N+1}^N & p_2^N & \dots & p_N^N \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad x_N = \begin{vmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \dots & p_{N+1}^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \dots & p_{N+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^N & p_2^N & \dots & p_{N+1}^N \end{vmatrix},$$

а $x_{N+1} = -|\mathcal{P}|$.

Запишем выражение

$$|\mathcal{H}^{N+1}| = \left| \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{p_k^i p_k^j}{a_k} \right)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} \right| = \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_N\}} \left| \left(\frac{p_{k_j}^i p_{k_j}^j}{a_{k_j}} \right)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N} \right|,$$

где последняя сумма берется по наборам $\{k_1, k_2, \dots, k_N\} \subset \{1, \dots, N+1\}$ таким, что среди k_j нет совпадающих. Преобразуя равенство далее, мы получим, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}^{N+1}| &= \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_N\}} \frac{p_{k_1}^1 p_{k_2}^2 \dots p_{k_N}^N}{a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_N}} |(p_{k_j}^i)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}| \\ &= \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_N} \frac{|(p_{k_j}^i)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}|^2}{a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N+1} a_i x_i^2}{a_1 a_2 \dots a_{N+1}} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{a_1 a_2 \dots a_{N+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие $\langle Ax, x \rangle > 0$ равносильно условию

$$\text{sign} |\mathcal{H}^{N+1}| = \text{sign}(a_1 \dots a_{N+1}) = (-1)^S.$$

Положим $x^1 = x$. Пусть построены $x^1, x^2, \dots, x^{m-1}$ и выполнены условия

$$\langle Ax^i, x^i \rangle > 0, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Определим x^m по $p^1, \dots, p^N, Ax^1, \dots, Ax^{m-1}$ так же, как определяли x по $p^1, \dots, p^N$, т.е. следующим образом: $x^m = (x_1^m, \dots, x_{N+m}^m, 0, 0, 0, \dots)$ и выполнены равенства $\langle x^m, p^n \rangle = 0$ при $n = 1, \dots, N$ и $\langle x^m, Ax^i \rangle = 0$ при $i = 1, \dots, m-1$. Нетрудно доказать, что вектора $p^{1*}, \dots, p^{N*}, Ax^1, \dots, Ax^{m-1}$, где $p^{i*} = (p_1^i, \dots, p_{N+m-1}^i, 0, \dots)$ — $(N+m-1)$ -срезка, линейно независимы. Поэтому x^m можно взять таким, чтобы

$$x_{N+m}^m = -|(p_k^1, \dots, p_k^N, (Ax^1)_k, \dots, (Ax^{m-1})_k)_{k=1, \dots, N+m-1}| \neq 0.$$

В этом случае также, как и при определении x , получаем

$$\langle Ax^m, x^m \rangle = a_1 \cdots a_{N+m} |H^{N+m}(p^1, \dots, p^N, Ax^1, \dots, Ax^{m-1})|.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \langle A^{-1}(Ax^i), p^n \rangle &= \langle x^i, p^n \rangle = 0 & \text{при } n = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \langle A^{-1}(Ax^i), Ax^j \rangle &= \langle x^i, Ax^j \rangle = 0 & \text{при } i \neq j, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \langle Ax^m, x^m \rangle &= a_1 \cdots a_{N+m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \langle Ax^i, x^i \rangle \cdot |H^{N+m}(p^1, \dots, p^N)| \\ &= a_1, \dots, a_{N+m} \cdot \prod_{i=1}^{m-1} \langle Ax^i, x^i \rangle \cdot |\mathcal{H}^{N+m}|. \end{aligned}$$

Тогда условие $\langle Ax^m, x^m \rangle > 0$ равносильно условию

$$\text{sign} |\mathcal{H}^{N+m}| = (-1)^S. \quad (3)$$

Поскольку коразмерность $\overline{\text{Lin}\langle x^1, x^2, \dots \rangle}$ равна N , для доказательства равенства (2) достаточно показать линейную независимость векторов $p^1, \dots, p^N, x^1, x^2, \dots$. Но это ясно, поскольку по построению $x^1, x^2, \dots$ линейно независимы, $x^i \perp \text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle$ для любого i , а $p^1, \dots, p^N$ линейно независимы по условию.

В итоге мы получили следующее необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\langle Ax^i, x^i \rangle > 0$:

$$\text{sign} |\mathcal{H}^r| = (-1)^S \quad \text{для любого } r \geq N+1.$$

Знак определителя $\mathcal{H}^r$ зависит от числа s_0 нулевых и числа s_- отрицательных собственных значений матрицы. Рассмотрим поведение собственных значений при переходе от матрицы $\mathcal{H}^r$ к $\mathcal{H}^{r+1}$. Обозначим

$$D = \left(\frac{p_{r+1}^i p_{r+1}^j}{a_{r+1}} \right)_{i=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}.$$

Тогда $\mathcal{H}^{r+1} = \mathcal{H}^r + D$. Поскольку $\mathcal{H}^r$ симметрическая, существует ортогональное преобразование, приводящее эту матрицу к диагональному виду

$$O^t \cdot \mathcal{H}^r \cdot O = \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N), \quad \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_N.$$

Тогда ее характеристический многочлен имеет вид

$$\mathcal{X}_{\mathcal{H}^r}(\lambda) = (\kappa_1 - \lambda) \cdots (\kappa_N - \lambda).$$

Найдем

$$\mathcal{X}_{\mathcal{H}^{r+1}}(\lambda) = |O^t \cdot (\mathcal{H}^r + D - \lambda E) \cdot O| = \mathcal{X}_{\mathcal{H}^r}(\lambda) + \sum_{n=1}^N \varepsilon_{nn} \frac{\mathcal{X}_{\mathcal{H}^r}(\lambda)}{\kappa_n - \lambda},$$

где ε_{nn} — диагональные элементы матрицы $O^t \cdot D \cdot O$. Последнее равенство получается, если применить известные свойства определителей и вид матрицы D . Поскольку

$$O^t \cdot D \cdot O = \frac{1}{a_{r+1}} O^t (p_{r+1}^1, \dots, p_{r+1}^N)^t (p_{r+1}^1, \dots, p_{r+1}^N) O,$$

то $\varepsilon_{nn} \geq 0$. Тогда

$$\mathcal{X}_{\mathcal{H}^{r+1}}(\kappa_1) \geq 0, \quad \mathcal{X}_{\mathcal{H}^{r+1}}(\kappa_2) \leq 0, \quad \mathcal{X}_{\mathcal{H}^{r+1}}(\kappa_3) \geq 0$$

и т.д. Значит, у $\mathcal{X}_{\mathcal{H}^{r+1}}$ число отрицательных корней (с учетом кратности) либо совпадает с числом отрицательных корней $\mathcal{X}_{\mathcal{H}^r}$, либо меньше на единицу, число положительных корней остается тем же или возрастает на единицу (корни “двигаются вправо”). Таким образом, условие

$$\text{sign} |\mathcal{H}^r| = (-1)^S \quad \text{для любого } r \geq N+1$$

равносильно условию отсутствия нулевых собственных значений и постоянству числа отрицательных собственных значений матриц $\mathcal{H}^r$ (причем это число той же кратности, что и S). Поскольку

$$\mathcal{H}^N = \mathcal{P} \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}\right) \cdot \mathcal{P}^t$$

и $|\mathcal{P}| \neq 0$, то

$$s_-(\mathcal{H}^N) = s_-\left(\text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}\right)\right) = S, \quad s_0(\mathcal{H}^N) = s_0\left(\text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_N}\right)\right) = 0, \\ s_+(\mathcal{H}^N) = N - S.$$

По доказанному выше для $\mathcal{H}^{N+1}$ выполнен один из вариантов:

$$s_-(\mathcal{H}^{N+1}) = S \quad \text{или} \quad s_-(\mathcal{H}^{N+1}) = S - 1.$$

Для выполнения условия (3) нам подходит первый вариант. Так мы получили необходимое и достаточное для $\langle Ax^i, x^i \rangle > 0$ условие:

$$s_-(\mathcal{H}^r) = S \quad \text{при } r \geq N+1.$$

При этом автоматически выполняется $s_0(\mathcal{H}^r) = 0$ (поскольку $s_+(\mathcal{H}^r)$ — неубывающая по r функция, она окажется тождественной $N - S$). Отсюда для выполнения $\langle Az, z \rangle > 0$, $z \in \overline{\text{Lin}}\langle x^1, x^2, \dots \rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$s_-(\mathcal{H}^r) = S \quad \text{при } r \geq N+1 \quad \text{и} \quad s_0(\mathcal{H}) = 0.$$

Так как $s_+(\mathcal{H}) \geq N - S$, в силу доказанных свойств для корней характеристических многочленов $\mathcal{H}_{\mathcal{H}^r}$ легко показать, что система этих условий эквивалентна $s_-(\mathcal{H}) = S$.

Теперь рассмотрим случай, когда определитель $|\mathcal{P}| = 0$. Если $s_-(\mathcal{H}) = S$, то существуют $q^1, \dots, q^S \in \text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle$ такие, что $s_-(H^\infty(q^1, \dots, q^S)) = S$. Значит, для любого $z \in \text{Lin}\langle q^1, \dots, q^S \rangle^\perp$ верно $\langle Az, z \rangle > 0$. Обратно, пусть $\langle Az, z \rangle > 0$ для $z \in \text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle^\perp$. По необходимому условию ранг $\mathcal{P}_{N \times S}$ равен S . От $p^1, \dots, p^N$ можно перейти к $q^1, \dots, q^N$, так что $\text{Lin}\langle p^1, \dots, p^N \rangle = \text{Lin}\langle q^1, \dots, q^N \rangle$, и к тому же $q_m^i = 0$ при $m < i$. Так как $\text{rank } \mathcal{P}_{N \times S} = S$, то выполнено $q_i^i \neq 0$ для $i = 1, \dots, S$. Положим

$$\tilde{q}^i = q^i + \sum_{j=S+1}^N \alpha_j^i q^j, \quad i = 1, \dots, S,$$

причем α_j^i подбираем такими, чтобы $\langle \tilde{q}^i, q^j \rangle = 0$ (это можно сделать, матрица системы для α_j^i есть матрица Грама с определителем, не равным нулю). Получили

$$\text{Lin}\langle p^1, p^2, \dots, p^N \rangle = \text{Lin}\langle \tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^S \rangle \oplus \text{Lin}\langle q^{S+1}, \dots, q^N \rangle.$$

Так как $q_m^i = 0$ при $m < i$, то выполнено

$$\langle Aq^i, q^i \rangle > 0, \quad i = S+1, \dots, N.$$

Значит, $\langle Az, z \rangle > 0$ для $z \in \text{Lin}\langle \tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^S \rangle^\perp$, и $s_-(H^\infty(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^S)) = S$. Тогда $s_-(\mathcal{H}) = S$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Для доказательства нам понадобится теорема Гершгорина: для всякой матрицы $A_{N \times N}$ множество ее собственных значений содержится в

$$\bigcup_{i=1}^N \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\},$$

кроме того, если объединение любых n , $1 \leq n \leq N$, из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными $N - n$ кругами, то в ней находится ровно n собственных значений матрицы A .

Посмотрим, насколько могут измениться собственные значения при переходе от $\mathcal{H}^r$ к $\mathcal{H}^{r+1}$. Так же, как в доказательстве теоремы 2, представим

$$\mathcal{H}^{r+1} = \mathcal{H}^r + D, \quad \text{где} \quad D = \left(\frac{p_{r+1}^i p_{r+1}^j}{a_{r+1}} \right)_{i,j=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N},$$

и воспользуемся ортогональным преобразованием для приведения $\mathcal{H}^r$ к диагональному виду:

$$O^t \cdot \mathcal{H}^r \cdot O = \text{diag}(\kappa_1^r, \dots, \kappa_N^r).$$

Тогда

$$O^t \cdot \mathcal{H}^{r+1} \cdot O = \text{diag}(\kappa_1^r, \dots, \kappa_N^r) + O^t \cdot D \cdot O = \text{diag}(\kappa_1^r, \dots, \kappa_N^r) + D'.$$

Элемент d_{ij} матрицы D можно оценить как

$$|d_{ij}| \leq \frac{b_{r+1}^2}{a_{r+1}} = \varepsilon_{r+1}.$$

Далее, $\|(d_{i1}, \dots, d_{iN})\|_2 \leq \sqrt{N} \varepsilon_{r+1}$. Для вектора-строки матрицы $D \cdot O$ его ℓ_2 -норма также не превосходит значения $\sqrt{N} \varepsilon_{r+1}$. Значит, и каждая координата этого вектора по модулю не больше $\sqrt{N} \varepsilon_{r+1}$. Для вектора-столбца матрицы $D \cdot O$ его ℓ_2 -норма не больше $N \varepsilon_{r+1}$. Отсюда для элементов d'_{ij} матрицы D' верно, что

$$\sup_j \sum_{i=1}^N |d'_{ij}| \leq N^{3/2} \varepsilon_{r+1}.$$

Применяя теорему Гершгорина, получаем, что собственные значения матрицы $\mathcal{H}^{r+1}$ лежат в кругах

$$\left\{ |z - \kappa_j^r - d'_{jj}| \leq \sum_{i \neq j} |d'_{ij}| \right\} \subset \{ |z - \kappa_j^r| \leq N^{3/2} \varepsilon_{r+1} \}.$$

Используя показанное в доказательстве теоремы 2 поведение собственных значений, получаем для матрицы $\mathcal{H}$: ее собственные значения лежат в кругах

$$\left\{ |z - \kappa_j^{r_0}| \leq N^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \varepsilon_k \right\}$$

для любого $r_0 \geq N + 1$. Из этого получается достаточное условие для выполнения равенства $s_-(\mathcal{H}) = S$. Для некоторого $r_0 \geq N + 1$ должно выполняться

$$\kappa_S^{r_0} < -N^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \varepsilon_k \quad \text{и} \quad \kappa_{S+1}^{r_0} > N^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Тогда $\{\kappa_1, \dots, \kappa_S\} \subset \mathbb{R}^-$ и $\{\kappa_{S+1}, \dots, \kappa_N\} \subset \mathbb{R}^+$.

Если $N = S$, то достаточным условием будет выполнение только одного неравенства

$$\kappa_S^{r_0} < -S^{3/2} \cdot \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Теорема доказана.

3. Приложения. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma(x) \nabla v) = Q(x, v) + F(x, v, \nabla v), & x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = \tau, \end{cases} \quad (4)$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Решение этой задачи будем рассматривать в классе $W_2^1(\Omega)$. При этом функция $\tau \in L_q(\partial\Omega)$, где $q \leq 2(n-1)/(n-2)$ при $n > 2$ и $q < \infty$ при $n = 2$ (см. [1; гл. 2]).

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 1) $Q(x, v)$ – неубывающая по v функция;
- 2) F принадлежит классу $c_1 \operatorname{Lip} 1$ по v и классу $c_2 \operatorname{Lip} 1$ по ∇v ;
- 3) $\gamma(x)$ – симметричная матрица размера $n \times n$ с элементами из $L_1(\Omega)$, положительно определенная для $x \in \Omega$; ее собственные числа отделены от нуля числом $\gamma_0 > 0$.

Если $\gamma(x) = E$, то $\gamma_0 = 1$, а $\operatorname{div}(\gamma(x)\nabla)$ – оператор Лапласа.

В зависимости от того, каковы функции Q , F и τ , задача (4) может иметь или не иметь решение из рассматриваемого класса (см., например, [1; гл. 4], [2; гл. 10–15], [11]). Единственности решения в общем случае тоже нет (см., например, [12; гл. 3]). В предположении, что задача разрешима, исследуем возможность совпадения двух решений при совпадении значений непрерывных линейных функционалов $P^1, \dots, P^N$, определенных на решениях.

ТЕОРЕМА 4. *Функция $u = v_1 - v_2$, являющаяся разностью двух решений задачи, принадлежит множеству $\mathcal{U}_C$, где*

$$C = C(c_1, c_2, \gamma_0) = \left(\frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 + 4\gamma_0 c_1}}{2\gamma_0} \right)^2$$

зависит от исходного уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы см. в работе автора [10].

Если рассматривать задачу в одномерном случае при $F = F(x, v)$, $\Omega = [0; 1]$, то для правой части уравнения можно рассматривать и другие условия:

- *случай равномерной устойчивости:*

существует B такое, что для всех $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ из $|v| > B$ следует

$$(Q(x, v) + F(x, v)) \cdot \operatorname{sign} v > 0;$$

F'_v ограничена на компакте $\Omega \times [-(B + 2M), (B + 2M)]$, где M – максимум значений решений на границе отрезка;

- *случай степенного роста:*

существует r такое, что для всех $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ если $|v| \geq r$, то

$$|Q(x, v) + F(x, v)| \leq \alpha(x)|v|^\delta + \beta(x),$$

где $\alpha, \beta \in L_1(\Omega)$, $\delta > 0$;

$$(Q(x, v) + F(x, v)) \cdot \operatorname{sign} v \geq -D|v| + \lambda(x),$$

где $D \in [0, \pi^{-2})$, $\lambda \in L_1(\Omega)$; для всех $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$ верно

$$|F'_v(x, v)| \leq \eta(x)|v|^\omega + \mu(x),$$

где $\eta \in L_p(\Omega)$, $\mu \in L_q(\Omega)$, $p, q \in [1, \infty]$, $\omega > 0$.

Тогда для разности решений задачи верна оценка теоремы 4 с константой C , зависящей от параметров уравнения и максимума значений решений на границе. Доказательство этого факта при $\gamma(x) \equiv 1$ изложено в работе [9] автора. Оно легко переносится на случай любой другой функции $\gamma(x)$ с заданными выше условиями.

В заключение приведем примеры использования теорем 1–3 для области $\Omega = [0; 1]^2$ и функционалов вида

$$P(u) = \frac{1}{h} \langle u, \chi_\theta^h \rangle,$$

где χ_θ^h – характеристическая функция квадрата, содержащегося в области Ω , со стороной h и центром в точке $\theta = (x, y)$. Собственными числами задачи Штурма–Лиувилля являются

$$\lambda_{k,m} = \pi^2(k^2 + m^2), \quad k = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

Рис. 1

Рис. 2

а собственными функциями – $\varphi_{k,m} = 2 \cdot \sin \pi k x \cdot \sin \pi m y$. При упорядочивании собственных значений получаем

$$\lambda_1 = 2\pi^2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 5\pi^2, \quad \lambda_4 = 8\pi^2, \quad \lambda_5 = 10\pi^2 \quad \text{и т.д.}$$

При

$$\lambda_1 < C < \lambda_2, \quad N = 1 \quad \text{и} \quad \theta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

при помощи теоремы 2 численным путем можно получить изображенную на рис. 1 область, в которой для пары (h, C) функционал $P(u) = \langle u, \chi_\theta^h \rangle / h$ будет являться определяющим.

Рассмотрим случай

$$\lambda_2 = \lambda_3 < C < \lambda_5, \quad N = 4.$$

Пусть

$$\theta_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \theta_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \theta_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \theta_4 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

при этом $h \leq 2/3$. Область, где набор $\{P^1, P^2, P^3, P^4\}$ является определяющим, изображена на рис. 2. Как видно из рисунков, функционалы рассматриваемого вида в определяющем наборе могут иметь очень малые носители. Подобные результаты можно получать при другом выборе центров и числа функционалов.

При правильном выборе h и центров квадратов θ_n число функционалов рассматриваемого вида по порядку совпадает с минимальным (т.е. порядка S) (см. [10]).

Используя теорему 3, можно исключить из рассмотрения наборы функционалов, которые не удовлетворяют необходимому условию. Соответствующий пример приведен в [10].

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Г. Царькову и всем участникам руководимого им спецсеминара по теории приближений за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.
- [2] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [3] И. Д. Чуешов, “Замечание о множествах определяющих элементов для систем реакции-диффузии”, *Матем. заметки*, **63**:5 (1998), 774–784.
- [4] И. Д. Чуешов, “Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем”, *УМН*, **53**:4 (1998), 77–124.
- [5] О. А. Ладыженская, “Об оценках фрактальной размерности и числа определяющих мод для инвариантных множеств динамических систем”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 19, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **163**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1987, 105–129.
- [6] D. A. Jones, E. S. Titi, “Upper bounds on the number of determining modes, nodes, and volume elements for the Navier–Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42**:3 (1993), 875–887.
- [7] D. A. Jones, E. S. Titi, “Determining finite volume elements for the 2D Navier–Stokes equations”, *Phys. D.*, **60**:1–4 (1992), 165–174.
- [8] И. Г. Царьков, “Устойчивость однозначной разрешимости в некорректной задаче Дирихле”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 294–308.
- [9] Т. Ю. Семёнова, “Приближение функций пространств Соболева ступенчатыми функциями и единственность решений дифференциальных уравнений вида $u'' = F(x, u, u')$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:1 (2007), 155–186.
- [10] Т. Ю. Семёнова, “Об одном классе определяющих функционалов для квазилинейных эллиптических задач”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 1, 11–15.
- [11] S. I. Pokhozhaev, “Nonlinear variational problems via the fibering method”, *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, Vol. V, Handb. Differ. Equ., Elsevier, Amsterdam, 2008, 49–209.
- [12] Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Математика. Новое в зарубежной науке, **5**, Мир, М., 1977.

Т. Ю. Семёнова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: station@list.su

Поступило

09.04.2008

Исправленный вариант

02.03.2009