Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, Обобщенный критерий Стилтеса полной неопределенности интерполяционных задач, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 23–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:34:22

Обобщенный критерий Стильтьеса полной неопределенности интерполяционных задач

Ю. М. Дюкарев

Основным результатом этой статьи является обобщенный критерий Стильтьеса полной неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтьеса. Этот критерий является обобщением для предельных интерполяционных проблем классического критерия неопределенности проблемы моментов, принадлежащего Стильтьесу. Он сформулирован в терминах параметров Стильтьеса M_j и N_j . Мы получили явные формулы для параметров Стильтьеса. Общие построения проиллюстрированы на примерах проблемы моментов Стильтьеса и задачи Неванлинны–Пика в классе Стильтьеса.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть дана бесконечная последовательность положительных вещественных чисел $s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$ такая, что при всех $n \in \mathbb{N}$ матрицы Ганкеля $\{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n$ и $\{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{n-1}$ строго положительны. В проблеме моментов Стильтьеса требуется описать монотонно возрастающие функции $\sigma: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t+0) = \sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$, такие, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t) \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1)$$

При сделанных предположениях у проблемы моментов (1) существует либо одно решение $\sigma(t)$, либо бесконечно много решений. Если существует бесконечно много решений, то проблема моментов (1) называется неопределенной. В классических работах Стильтьеса [1] был получен критерий неопределенности проблемы моментов. А именно, по заданным моментам s_j с помощью определенной процедуры строятся две последовательности вещественных чисел $m_k > 0$, $l_k > 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (параметры Стильтьеса). Проблема моментов Стильтьеса неопределена тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} l_k. \quad (2)$$

На случай матричной проблемы моментов Стильтьеса критерий (2) впервые был обобщен в статье [2].

С помощью теоремы Гамбургера–Неванлинны проблема моментов (1) может быть сведена к некоторой задаче интерполяционного типа для стильтьесовских функций

(см. [3; теорема 3.2.1]). Но в классе стилтьесовских функций существует много других интерполяционных задач, аналогичных той, которая участвует в теореме Гамбургера–Неванлинны. Это задачи Неванлинны–Пика и Каратеодори, многоотечная проблема моментов Нудельмана и другие интерполяционные задачи для стилтьесовских функций (см., например, [4]–[6]). Естественно предположить, что для этих интерполяционных задач должен существовать аналог критерия Стильтеса (2). Однако до настоящего времени ни для одной интерполяционной задачи для стилтьесовских функций, отличной от проблемы моментов Стильтеса, критерии такого типа получены не были.

Основной результат статьи доказан в теореме 3. В этой теореме критерий Стильтеса (2) распространен на весьма общий случай предельной интерполяционной задачи (см. [7]) для стилтьесовских оператор-функций (ОФ). Предельная интерполяционная задача содержит в себе все основные интерполяционные задачи в классе Стильтеса. Тем самым, установлена универсальная роль критериев стилтьесовского типа неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтеса. Общие построения проиллюстрированы на примерах задачи Неванлинны–Пика в классе Стильтеса и проблемы моментов Стильтеса. Из этих примеров видно, что критерий Стильтеса в случае проблемы моментов является весьма простым частным случаем среди критериев стилтьесовского типа для других интерполяционных задач.

2. Предельная интерполяционная задача. В этом разделе приведены без доказательства необходимые для дальнейшего сведения о предельной интерполяционной задаче (подробное изложение и доказательства см. в [7]). Введем обозначения: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$, $\Pi_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Пусть $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – сепарабельные и $\mathcal{H}$ – конечномерное гильбертовы пространства. Символом $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\}$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{G}_1$ в $\mathcal{G}_2$, символом $\{\mathcal{G}_1\}$ обозначим множество $\{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_1\}$, а символом $\{\mathcal{G}_1\}_H$ – множество ограниченных эрмитовых операторов в $\mathcal{G}_1$. Оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_H$ называется *неотрицательным*, если $(f, Af) \geq 0 \quad \forall f \in \mathcal{G}_1$. Множество неотрицательных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$. Неотрицательный оператор $A \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$ называется *строго положительным*, если он обратим и $A^{-1} \in \{\mathcal{G}_1\}$. Множество строго положительных операторов в $\mathcal{G}_1$ обозначим символом $\{\mathcal{G}_1\}_{>}$. Пусть операторы $A, B \in \{\mathcal{G}_1\}_H$. Неравенство $A \geq B$ (соответственно $A > B$) означает, что $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$ (соответственно $A - B \in \{\mathcal{G}_1\}_{>}$).

Тожественный и нулевой операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_1$, обозначим символами $I_{\mathcal{G}_1}$ и $0_{\mathcal{G}_1}$. Нулевой оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{G}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{G}_2$, обозначим символом $0_{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2}$. Когда из контекста ясно, о каких пространствах идет речь, то нижние индексы у единичного и тождественного операторов будем опускать.

Пусть заданы операторы $K_1 \in \{\mathcal{G}_1\}_{\geq}$, $K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_{\geq}$, $L_1, L_2 \in \{\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1\}$, $v_1 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_1\}$, $u_2 \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2\}$. И пусть эти операторы удовлетворяют *основному тождеству* (ОТ)

$$K_1 L_1 - L_2 K_2 = -v_1 u_2^*. \quad (3)$$

Рассмотрим операторы

$$T_1 = L_2 L_1^*, \quad T_2 = L_1^* L_2, \quad u_1 = L_2 u_2, \quad v_2 = L_1^* v_1. \quad (4)$$

Пусть операторы T_r таковы, что ОФ $R_{T_r}(z) = (I_{\mathcal{G}_r} - zT_r)^{-1}$, $r = 1, 2$, мероморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Множество особых точек ОФ R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначим символом $\mathcal{Z}$. И пусть $\overline{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Голomorphicная ОФ $s: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ называется *стильтесовской*, если $\{s(z) - s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall z \in \mathbb{C}_{\pm}$ и $s(x) \geq 0_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-$.

Класс всех стилтьесовских ОФ обозначим символом $\mathcal{S}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Упорядоченный набор операторов

$$\mathcal{P} = \{K_1, L_1, v_1, K_2, L_2, u_2\}, \quad (5)$$

удовлетворяющих ОТ (3) и всем сформулированным выше условиям, называется *обобщенной интерполяционной задачей стилтьесовского типа*, а пространства $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{H}$ называются *масштабными пространствами*. При этом ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется *решением обобщенной интерполяционной задачи* (5), если она удовлетворяет следующей *системе основных матричных неравенств* (ОМН) *Потапова* ($r = 1, 2$):

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T_r}(z)\{v_r z^{r-1}s(z) - u_r\} \\ \hline * & \{z^{r-1}s(z) - \bar{z}^{r-1}s^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array} \right] \geq 0_{\mathcal{G}_r \oplus \mathcal{H}}, \quad z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{Z}. \quad (6)$$

Множество всех решений обобщенной интерполяционной задачи (5) обозначим символом $\mathcal{F}$.

Пусть заданы две обобщенные интерполяционные задачи

$$\mathcal{P}^{(r)} = \{K_1^{(r)}, L_1^{(r)}, v_1^{(r)}, K_2^{(r)}, L_2^{(r)}, u_2^{(r)}\}, \quad r = 1, 2. \quad (7)$$

В обозначения объектов, относящихся к интерполяционной задаче $\mathcal{P}^{(1)}$ (соответственно $\mathcal{P}^{(2)}$), будем добавлять верхний индекс (1) (соответственно (2)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$ называются *унитарно эквивалентными*, если существуют унитарные операторы

$$\mathcal{U}_1: \mathcal{G}_1^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}_1^{(2)}, \quad \mathcal{U}_2: \mathcal{G}_2^{(1)} \rightarrow \mathcal{G}_2^{(2)}$$

такие, что

$$K_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* K_1^{(2)} \mathcal{U}_1, \quad L_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* L_1^{(2)} \mathcal{U}_2, \quad v_1^{(1)} = \mathcal{U}_1^* v_1^{(2)}, \quad (8)$$

$$K_2^{(1)} = \mathcal{U}_2^* K_2^{(2)} \mathcal{U}_2, \quad L_2^{(1)} = \mathcal{U}_1^* L_2^{(2)} \mathcal{U}_2, \quad u_2^{(1)} = \mathcal{U}_2^* u_2^{(2)}. \quad (9)$$

Множества решений таких задач совпадают $\mathcal{F}^{(1)} = \mathcal{F}^{(2)}$.

Пусть дана обобщенная интерполяционная задача (5), и пусть пространства $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ представлены в виде ортогональной суммы своих подпространств (подпространства $\mathcal{G}_r$ предполагаются ненулевыми)

$$\mathcal{G}_r = \tilde{\mathcal{G}}_r \oplus \hat{\mathcal{G}}_r, \quad r = 1, 2. \quad (10)$$

Пусть $\tilde{P}_r$ обозначает оператор ортогонального проектирования на подпространство $\tilde{\mathcal{G}}_r$ и выполнены условия

$$L_1 \tilde{P}_2 = \tilde{P}_1 L_1 \tilde{P}_2, \quad \tilde{P}_1 L_2 = \tilde{P}_1 L_2 \tilde{P}_2. \quad (11)$$

В соответствии с (10), (11) введем матричные обозначения ($r = 1, 2$)

$$\begin{aligned} K_r &= \begin{bmatrix} \tilde{K}_r & B_r \\ B_r^* & C_r \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & D_1 \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1} & \hat{L}_1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 & \tilde{L}_2 \end{bmatrix}, \\ v_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{u}_2 \\ E_2 \tilde{u}_2 + \hat{L}_2 \tilde{u}_2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{v}_1 \\ D_1^* \tilde{v}_1 + \hat{L}_1^* \tilde{v}_1 \end{bmatrix}, \\ T_1 &= L_2 L_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_1 \tilde{\mathcal{G}}_1} \\ E_2 \tilde{L}_1^* + \hat{L}_2 D_1^* & \tilde{L}_2 \tilde{L}_1^* \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_r = \begin{bmatrix} I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}, \\ T_2 &= L_1^* L_2 = \begin{bmatrix} \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_2 \tilde{\mathcal{G}}_2} \\ D_1^* \tilde{L}_2 + \hat{L}_1^* E_2^* & \tilde{L}_1^* \tilde{L}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{P}_r = \begin{bmatrix} 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r} & 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} \\ 0_{\tilde{\mathcal{G}}_r \tilde{\mathcal{G}}_r} & I_{\tilde{\mathcal{G}}_r} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из ОТ (3) и представлений (12) следует *индуцированное* ОТ

$$\tilde{K}_1 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_2 \tilde{K}_2 = -\tilde{v}_1 \tilde{u}_2^*. \quad (13)$$

Непосредственно убеждаемся в том, что операторы

$$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{K}_1, \tilde{L}_1, \tilde{v}_1, \tilde{K}_2, \tilde{L}_2, \tilde{u}_2\} \quad (14)$$

и масштабные пространства $\{\tilde{\mathcal{G}}_1, \tilde{\mathcal{G}}_2, \mathcal{H}\}$ создают обобщенную интерполяционную задачу стилтесовского типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Интерполяционная задача (14) называется *сужением* интерполяционной задачи (5) на подпространства $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть даны две обобщенные интерполяционные задачи стилтесовского типа

$$\mathcal{P}^{(r)} = \{K_1^{(r)}, L_1^{(r)}, v_1^{(r)}, K_2^{(r)}, L_2^{(r)}, u_2^{(r)}\}, \quad r = 1, 2,$$

с масштабными подпространствами $\mathcal{G}_1^{(r)}, \mathcal{G}_2^{(r)}$. Говорят, что интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(1)}$ *содержится* в задаче $\mathcal{P}^{(2)}$, если $\mathcal{P}^{(1)}$ унитарно эквивалентна некоторому сужению $\tilde{\mathcal{P}}^{(2)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(2)}$ на пару подпространств $\tilde{\mathcal{G}}_1^{(2)} \subset \mathcal{G}_1^{(2)}$, $\tilde{\mathcal{G}}_2^{(2)} \subset \mathcal{G}_2^{(2)}$

Коротко это записывается так $\mathcal{P}^{(1)} \subset \mathcal{P}^{(2)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Обобщенная интерполяционная задача (5) называется *вполне неопределенной*, если

$$\begin{aligned} K_1 &\in \{\mathcal{G}_1\}_>, \quad K_2 \in \{\mathcal{G}_2\}_>, \\ v_r h &= 0 \in \mathcal{G}_r \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \in \mathcal{H}, \\ u_r h &= 0 \in \mathcal{G}_r \quad \forall h \in \mathcal{H} \quad \Leftrightarrow \quad h = 0 \in \mathcal{H}, \end{aligned} \quad r = 1, 2. \quad (15)$$

Далее в этой статье мы будем рассматривать только вполне неопределенные обобщенные интерполяционные задачи.

Рассмотрим резольвентную матрицу задачи (5)

$$U_1(z) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + z v_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & -z v_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \\ \hline u_2^* R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} u_2 & I_{\mathcal{H}} - z u_1^* R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} v_1 \end{array} \right]. \quad (16)$$

Введем операторы в пространстве $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$J = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & -iI_{\mathcal{H}} \\ iI_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad J_{\pi} = \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}.$$

Из (3) и (4) следует, что $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{Z}}\}$ выполнены равенства

$$J - U_1(z)JU_1^*(z) = i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(z)[v_1, u_1], \quad (17)$$

$$\begin{aligned} U_1(z)J_{\pi}U_1^*(z) - J_{\pi} = & -(z + \bar{z}) \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(z)[v_1, u_1] \\ & + 2 \begin{bmatrix} zv_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}R_{T_2^*}^*(z)[\bar{z}v_2, u_2]. \end{aligned} \quad (18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Символом $\mathcal{W}_s$ обозначим множество всех мероморфных ОФ $U: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ таких, что

$$\frac{U(z)JU^*(z) - J}{i(\bar{z} - z)} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_{\pm} \setminus \mathcal{D}, \quad U(z)J_{\pi}U^*(z) - J_{\pi} \geq 0 \quad \forall z \in \Pi_{-} \setminus \mathcal{D}.$$

Здесь $\mathcal{D}$ обозначает множество особых точек ОФ U в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Из (17) и (18) следует, что резольвентная матрица $U_1 \in \mathcal{W}_s$.

Пусть $A, B \in \{\mathcal{H}\}_{>}$ и выполнено условие $A \leq B$. *Операторным интервалом* $[A, B]$ называется

$$[A, B] = \{\kappa \in \{\mathcal{H}\}_{>} : A \leq \kappa \leq B\}.$$

Число $\text{rank}\{B - A\}$ называется *рангом* операторного интервала. Интервал $[A, B]$ называется *невыврожденным*, если $A < B$.

Через элементы резольвентной матрицы (16) записываются решения Фридрихса и Крейна обобщенной интерполяционной задачи (5)

$$s_F(z) = \gamma_1(z)\alpha_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}, \quad s_K(z) = \delta_1(z)\beta_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}. \quad (19)$$

Решения Фридрихса и Крейна можно записать в виде

$$s_F(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2, \quad s_K(z) = \{v_1^*(L_2K_2L_2^* - z^{-1}K_1)^{-1}v_1\}^{-1}.$$

Имеют место неравенства $s_F(x) < s_K(x)$, $x \in \mathbb{R}_{-} \setminus \mathcal{Z}$.

Для всех $x \in \mathbb{R}_{-} \setminus \mathcal{Z}$ имеем

$$U_1(x)J_{\pi}U_1^*(x) - J_{\pi} = 2 \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ s_F(x) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K(x) - s_F(x))^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & s_F(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F(x) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Невыврожденный операторный интервал

$$\mathcal{I}(x) = [s_F(x), s_K(x)], \quad x \in \mathbb{R}_{-} \setminus \mathcal{Z},$$

называется *интервалом Вейля* в точке x .

Пусть даны две обобщенные вполне неопределенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(1)}$ и $\mathcal{P}^{(2)}$, причем $\mathcal{P}^{(1)} \subset \mathcal{P}^{(2)}$. Пусть $\mathcal{Z}^{(k)}$, $\mathcal{F}^{(k)}$, $\mathcal{J}^{(k)}$ обозначают определенные выше объекты для интерполяционных задач $\mathcal{P}^{(k)}$, $k = 1, 2$. Тогда $\mathcal{F}^{(2)} \subset \mathcal{F}^{(1)}$ и $\mathcal{J}^{(2)}(x) \subset \mathcal{J}^{(1)}(x)$. Причем оба эти интервала невырождены во всех точках $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{Z}^{(1)} \cup \mathcal{Z}^{(2)}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Говорят, что задано *упорядоченное семейство интерполяционных задач стилтьесовского типа*, если каждому $l \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие вполне неопределенная обобщенная интерполяционная задача стилтьесовского типа $\mathcal{P}^{(l)}$ так, что для любых $l_1 \leq l_2$ выполнено условие $\mathcal{P}^{(l_1)} \subset \mathcal{P}^{(l_2)}$.

Обозначим символом $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ упорядоченное семейство интерполяционных задач. В этом контексте обобщенные интерполяционные задачи $\mathcal{P}^{(l)}$ называются *усеченными интерполяционными задачами*.

В обозначения объектов, связанных с семейством $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, введем верхний индекс (l) , который будет указывать, что соответствующие интервалы Вейля, резольвентные матрицы и т.д. связаны с l -й интерполяционной задачей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть дано упорядоченное семейство интерполяционных задач $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество всех решений интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. ОФ $s \in \mathcal{S}$ называется *решением предельной интерполяционной задачи*, если $s \in \mathcal{F}^{(l)} \quad \forall l \in \mathbb{N}$.

Множество решений предельной интерполяционной задачи обозначим символом $\mathcal{F}^{(\infty)}$, а саму предельную интерполяционную задачу – символом $\mathcal{P}^{(\infty)}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано упорядоченное семейство обобщенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, и пусть $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначает множество решений задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, а $\mathcal{F}^{(\infty)}$ – множество решений предельной интерполяционной задачи. И пусть, далее, $s_F^{(l)}$ и $s_K^{(l)}$ являются решениями Фридрихса и Крейна задачи $\mathcal{P}^{(l)}$. Тогда

1) существуют равномерные на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ пределы

$$s_K^{(\infty)}(z) := \lim_{l \rightarrow \infty} s_K^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}, \quad s_F^{(\infty)}(z) := \lim_{l \rightarrow \infty} s_F^{(l)}(z) \in \mathcal{F}^{(\infty)}; \quad (21)$$

2) для всех $s \in \mathcal{F}^{(\infty)}$ выполняются неравенства

$$0_{\mathcal{H}} < s_F^{(\infty)}(x) \leq s(x) \leq s_K^{(\infty)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (22)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Операторный интервал

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) := [s_F^{(\infty)}(x), s_K^{(\infty)}(x)], \quad x \in \mathbb{R}_-,$$

называется *предельным интервалом Вейля* в точке $x \in \mathbb{R}_-$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$. Напомним, что множество особых точек мероморфных ОФ $R_{T_1^{(l)}}$ и $R_{T_2^{(l)}}$ в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ мы обозначили символом $\mathcal{Z}^{(l)}$. Пусть $\mathcal{Z}^{(\infty)} := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}^{(l)}$. С этого места и до конца статьи будем считать, что все предельные точки $\mathcal{Z}^{(\infty)}$ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

ЛЕММА 1. Пусть дано $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ – упорядоченное семейство интерполяционных задач, и пусть $s_K^{(\infty)}, s_F^{(\infty)}$ обозначают решения Крейна и Фридрихса предельной интерполяционной задачи. Тогда для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ имеет место равенство

$$\text{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_1) - s_F^{(\infty)}(x_1)\} = \text{rank}\{s_K^{(\infty)}(x_2) - s_F^{(\infty)}(x_2)\}. \quad (23)$$

Другими словами, ранги предельных интервалов Вейля $\mathcal{J}^{(\infty)}(x)$ не зависят от выбора точки $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ называется вполне неопределенной, если все предельные интервалы Вейля

$$\mathcal{J}^{(\infty)}(x) = [s_F^{(\infty)}(x), s_K^{(\infty)}(x)] \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$$

являются невырожденными операторными интервалами.

3. Обобщенный критерий Стильтьеса.

ТЕОРЕМА 2. Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач стильтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, и пусть $\{U_1^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$ обозначает соответствующую последовательность резольвентных матриц. Тогда существует принадлежащая классу $\mathcal{W}_s$ последовательность ОФ $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$U_1^{(l)}(z) = b_1(z) \times b_2(z) \times \cdots \times b_l(z) \quad \forall l \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \overline{\mathcal{Z}^{(l)}}\}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему индукцией по l . При $l = 1$ утверждение теоремы очевидно, так как $b_1(z) = U_1^{(1)}(z)$. Пусть формула (24) справедлива при $l > 1$. По условию теоремы $\mathcal{P}^{(l)} \subset \mathcal{P}^{(l+1)}$. Поэтому интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(l)}$ унитарно эквивалентна сужению $\widetilde{\mathcal{P}}^{(l+1)}$ интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l+1)}$ на пару подпространств $\mathcal{G}_1^{(l+1)}$ и $\mathcal{G}_2^{(l+1)}$. Пусть $U_1^{(l)}$ обозначает резольвентную матрицу обобщенной интерполяционной задачи $\mathcal{P}^{(l)}$, а $\widetilde{U}_1^{(l+1)}$ обозначает резольвентную матрицу обобщенной интерполяционной задачи $\widetilde{\mathcal{P}}^{(l+1)}$. Как было доказано в [7], резольвентные матрицы унитарно эквивалентных интерполяционных задач совпадают $U_1^{(l)} = \widetilde{U}_1^{(l+1)}$. В [8] доказано, что существует ОФ $b_{l+1}(z) \in \mathcal{W}_s$ такая, что $U_1^{(l+1)}(z) = \widetilde{U}_1^{(l+1)}(z)b_{l+1}(z)$. Отсюда

$$U_1^{(l+1)}(z) = \widetilde{U}_1^{(l)}(z)b_{l+1}(z) = U_1^{(l)}(z)b_{l+1}(z) = b_1(z)b_2(z) \cdots b_l(z)b_{l+1}(z).$$

Отметим, что результаты из [8] нужно применить к ОФ $U_1^{(l+1)-1}(z) = JU_1^{(l+1)*}(\bar{z})J$, а затем вернуться к ОФ $U_1^{(l+1)}(z)$.

Оператор $Q \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$ называется J -унитарным и J_π -растягивающим, если

$$QJQ^* - J = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad \text{и} \quad QJ_\pi Q^* - J_\pi \geq 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} \quad (25)$$

соответственно. В [9] доказано, что условия (25) эквивалентны условиям

$$Q^*JQ - J = 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}, \quad Q^*J_\pi Q - J_\pi \geq 0_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}. \quad (26)$$

Легко видеть, что J -унитарный оператор обратим и что обратный оператор является J -унитарным. Кроме того, произведение J -унитарных операторов является J -унитарным оператором.

ЛЕММА 2. Пусть оператор $Q \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$ является J -унитарным и J_π -растягивающим. Тогда существует обратимый оператор $\tilde{P} \in \{\mathcal{H}\}$ и неотрицательные операторы $\tilde{M}, \tilde{L} \in \{\mathcal{H}\}_\geq$ такие, что

$$Q = \begin{bmatrix} I & \tilde{M} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}^* & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Это представление единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матричное представление оператора $Q \in \{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}\}$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

В [10] доказано, что оператор Q_{22} невырожден. Пусть

$$\tilde{P} = Q_{22}^{-1}, \quad \tilde{L} = Q_{21}Q_{22}^*, \quad \tilde{M} = Q_{12}Q_{22}^{-1}, \quad X = Q_{11}Q_{22}^*. \quad (28)$$

Тогда

$$Q = \begin{bmatrix} X & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}^* & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Оператор Q в левой части (29) является J -унитарным и последний оператор в правой части (29) является J -унитарным. Отсюда следует, что и первый оператор в правой части (29) является J -унитарным. Из (25) и (26) имеем

$$\begin{bmatrix} X & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} X & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix}^* = J, \quad \begin{bmatrix} X & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} X & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix} = J.$$

Далее

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -X\tilde{M}^* + \tilde{M}X^* & -X + \tilde{M}\tilde{L}^* \\ -\tilde{L}\tilde{M}^* + X^* & -\tilde{L} + \tilde{L}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} -X^*\tilde{L} + \tilde{L}^*X & -X^* + \tilde{L}^*\tilde{M} \\ -\tilde{M}^*\tilde{L} + X & -\tilde{M}^* + \tilde{M} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\tilde{M}^* = \tilde{M}, \quad \tilde{L}^* = \tilde{L}, \quad X = I + \tilde{M}\tilde{L}.$$

Теперь (29) можно записать в виде

$$Q = \begin{bmatrix} I + \tilde{M}\tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{L} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}^* & 0 \\ 0 & \tilde{P}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует (27). Единственность представления (27) очевидна.

Покажем, что $\widetilde{M}, \widetilde{L} \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$. Имеем

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{H}} &\leq QJ_{\pi}Q^* - J_{\pi} = \begin{bmatrix} I + \widetilde{M}\widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{L} & I \end{bmatrix} J_{\pi} \begin{bmatrix} I + \widetilde{L}\widetilde{M} & \widetilde{L} \\ \widetilde{M} & I \end{bmatrix} - J_{\pi} \\ &= 2 \begin{bmatrix} \widetilde{M} + \widetilde{M}\widetilde{L}\widetilde{M} & \widetilde{M}\widetilde{L} \\ \widetilde{L}\widetilde{M} & \widetilde{L} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{L} \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$. Аналогичным образом, из неравенства $0_{\mathcal{H}} \leq Q^*J_{\pi}Q - J_{\pi}$ следует, что $\widetilde{M} \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$.

Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач стилтьесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, и пусть все предельные точки множества $\mathcal{Z}^{(\infty)} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{Z}^{(l)}$ принадлежат $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Сомножители в правой части (24) принадлежат классу $\mathcal{W}_s$. Поэтому в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ операторы $\{b_k(x_0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям леммы 2 (см. определение 7). Следовательно, для всех $k \in \mathbb{N}$ существуют невырожденные операторы $\widetilde{P}^{(k)}(x_0) \in \{\mathcal{H}\}$ и операторы $\widetilde{M}^{(k)}(x_0), \widetilde{L}^{(k)}(x_0) \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ такие, что $(\forall l \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} U_1^{(l)}(x_0) &= \begin{bmatrix} I & \widetilde{M}^{(1)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widetilde{L}^{(1)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}^{(1)*}(x_0) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}^{(1)-1}(x_0) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} I & \widetilde{M}^{(2)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widetilde{L}^{(2)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}^{(2)*}(x_0) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}^{(2)-1}(x_0) \end{bmatrix} \times \dots \\ &\quad \times \begin{bmatrix} I & \widetilde{M}^{(l)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widetilde{L}^{(l)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}^{(l)*}(x_0) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}^{(l)-1}(x_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем три бесконечные последовательности операторов

$$\begin{aligned} M^{(1)}(x_0) &= \widetilde{M}^{(1)}(x_0), \\ M^{(2)}(x_0) &= \widetilde{P}^{(1)*}(x_0) \widetilde{M}^{(2)}(x_0) \widetilde{P}^{(1)}(x_0), \\ &\dots, \\ M^{(k)}(x_0) &= \widetilde{P}^{(1)*}(x_0) \dots \widetilde{P}^{(k-1)*}(x_0) \widetilde{M}^{(k)}(x_0) \widetilde{P}^{(k-1)}(x_0) \dots \widetilde{P}^{(1)}(x_0), \\ &\dots; \\ L^{(1)}(x_0) &= \widetilde{L}^{(1)}(x_0), \\ L^{(2)}(x_0) &= \{\widetilde{P}^{(1)-1}(x_0)\} \widetilde{L}^{(2)}(x_0) \{\widetilde{P}^{(1)-1}(x_0)\}^*, \\ &\dots, \\ L^{(k)}(x_0) &= \{\widetilde{P}^{(1)-1}(x_0) \dots \widetilde{P}^{(k-1)-1}(x_0)\} \widetilde{L}^{(k)}(x_0) \{\widetilde{P}^{(1)-1}(x_0) \dots \widetilde{P}^{(k-1)-1}(x_0)\}^*, \\ &\dots; \\ P^{(1)*}(x_0) &= \widetilde{P}^{(1)*}(x_0), \\ P^{(2)*}(x_0) &= \widetilde{P}^{(1)*}(x_0) \widetilde{P}^{(2)*}(x_0), \\ &\dots, \\ P^{(k)*}(x_0) &= \widetilde{P}^{(1)*}(x_0) \dots \widetilde{P}^{(k)*}(x_0), \\ &\dots \end{aligned} \quad (31)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Операторы $M^{(k)}(x_0)$ и $L^{(k)}(x_0)$ называются *обобщенными параметрами Стильеса*, ассоциированными с упорядоченной последовательностью обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач стилтесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$.

Последовательно переставляя в (30) блочно диагональные операторы слева направо и учитывая (31), получим $(\forall l \in \mathbb{N})$

$$U_1^{(l)}(x_0) = \begin{bmatrix} I & M^{(1)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(1)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M^{(2)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(2)}(x_0) & I \end{bmatrix} \times \dots \\ \times \begin{bmatrix} I & M^{(l)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(l)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{(l)*}(x_0) & 0 \\ 0 & P^{(l)-1}(x_0) \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Причем

$$M^{(k)}(x_0) \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}, \quad L^{(k)}(x_0) \in \{\mathcal{H}\}_{\geq} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (33)$$

Вместе с произведением (32) будем рассматривать еще и произведение

$$\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0) = \begin{bmatrix} I & M^{(1)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(1)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M^{(2)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(2)}(x_0) & I \end{bmatrix} \times \dots \\ \times \begin{bmatrix} I & M^{(l)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L^{(l)}(x_0) & I \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Из (32) и (34) следует, что

$$U_1^{(l)}(x_0) = \mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0) \begin{bmatrix} P^{(l)*}(x_0) & 0 \\ 0 & P^{(l)-1}(x_0) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Введем матрицы

$$H_{2k-1}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & M^{(k)}(x_0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{2k}(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L^{(k)}(x_0) & 0 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Легко видеть, что $\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)$ можно записать в виде

$$\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0) = \prod_{k=1}^{2l} e^{H_k(x_0)}. \quad (37)$$

В операторных произведениях считаем, что индексы сомножителей возрастают в порядке слева направо.

ТЕОРЕМА 3. Пусть дана упорядоченная последовательность обобщенных вполне неопределенных интерполяционных задач стилтесовского типа $\{\mathcal{P}^{(l)}\}_{l \in \mathbb{N}}$, и пусть через $\mathcal{P}^{(\infty)}$ обозначена соответствующая предельная интерполяционная задача. Пусть, далее, произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$ и операторы $M^{(k)}(x_0)$ и $L^{(k)}(x_0)$ являются ассоциированными параметрами Стильеса. Для того, чтобы предельная интерполяционная задача $\mathcal{P}^{(\infty)}$ была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} M^{(k)}(x_0) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} L^{(k)}(x_0). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть предельная интерполяционная задача является вполне неопределенной и произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}^{(\infty)}$. Покажем, что $\forall l, k \in \mathbb{N}$ выполнены следующие три соотношения:

$$\|\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)J_\pi\mathfrak{U}_1^{(l)*}(x_0) - J_\pi\| \leq C, \quad \det[\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)] = 1, \quad H_k(x_0)J_\pi \geq 0. \quad (39)$$

Здесь $C \in \mathbb{R}_+$ – некоторая константа. Действительно, из (35) следует, что J_π -формы ОФ $U_1^{(l)}$ и $\mathfrak{U}_1^{(l)}$ совпадают. Отсюда и из (20) имеем

$$\begin{aligned} & \mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)J_\pi\mathfrak{U}_1^{(l)*}(x_0) - J_\pi \\ &= U_1^{(l)}(x_0)J_\pi U_1^{(l)*}(x_0) - J_\pi \\ &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ s_F^{(l)}(x_0) & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s_K^{(l)}(x_0) - s_F^{(l)}(x_0))^{-1} & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & s_F^{(l)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & s_F^{(l)}(x_0) \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Из этой формулы и из (21), (23) и определения 12 следует сходимость J_π -формы $\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)J_\pi\mathfrak{U}_1^{(l)*}(x_0) - J_\pi$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда следует первое из соотношений (39). Равенство в (39) следует из (34). Из (36) и (33) имеем

$$H_{2k-1}(x_0)J_\pi = \begin{bmatrix} M^{(k)}(x_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad H_{2k}(x_0)J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L^{(k)}(x_0) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Доказаны все соотношения (39). По теореме Потапова [11] отсюда следует сходимость операторного произведения $\prod_{k=0}^{\infty} e^{H_k(x_0)}$ и ряда $\sum_{k=0}^{\infty} H_k(x_0)$. Из сходимости последнего ряда и из вида $H_k(x_0)$ следует сходимость рядов (38).

Наоборот, пусть сходятся ряды (38). Отсюда и из (36) следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(x_0)$. Поэтому (см. [11]) существует предел бесконечного операторного произведения

$$\mathfrak{U}_1^{(\infty)}(x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0) = \lim_{l \rightarrow \infty} e^{H_1(x_0)} e^{H_2(x_0)} \dots e^{H_{2l}(x_0)}.$$

Из (40) имеем

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s_K^{(l)}(x_0) - s_F^{(l)}(x_0) & 0 \\ 0 & s_F^{(l)-1}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -s_F^{(l)}(x_0) & I \end{bmatrix} [\mathfrak{U}_1^{(l)}(x_0)J_\pi\mathfrak{U}_1^{(l)*}(x_0) - J_\pi] \\ &= 2 \begin{bmatrix} I & s_F^{(l)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В этом равенстве все операторы имеют пределы при $l \rightarrow \infty$, а предел правой части является обратимым оператором. Поэтому $s_K^{(\infty)}(x_0) - s_F^{(\infty)}(x_0) > 0$. Отсюда, из леммы 1 и определения 12 следует, что предельная интерполяционная задача является вполне неопределенной.

Теорема 3 является обобщением критерия Стильтьеса на широкий класс интерполяционных задач для стилтьесовских ОФ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанной теоремы и результатов статей [2] и [7] следует, что при условии полной неопределенности предельной интерполяционной задачи существуют пределы

$$\mathfrak{U}_1^{(\infty)}(z) = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathfrak{U}_1^{(l)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)}\}.$$

Эти пределы являются равномерными на компактах $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z}^{(\infty)}\}$ и ОФ $\mathfrak{U}_1^{(\infty)}$ является резольвентной матрицей предельной интерполяционной задачи.

4. Примеры.

4.1. *Задача Неванлинны–Пика в классе Стильтеса.* В задаче Неванлинны–Пика задана бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_j \neq \bar{z}_k, j, k \in \mathbb{N}$, и бесконечная последовательность операторов $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$, действующих в пространстве в $\mathcal{H}$. Требуется описать множество стилтесовских ОФ $s: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$s(z_j) = s_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (41)$$

Нас будет интересовать неопределенный случай, когда задача (41) имеет бесконечно много решений. Поэтому мы считаем, что выполнено необходимое условие неопределенности – предельные точки последовательности $\{z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ принадлежат множеству $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Вместе с задачей (41) с бесконечным числом узлов интерполяции будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны–Пика. В таких задачах фиксируется число $l \in \mathbb{N}$ и требуется описать множество ОФ $s: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}$ таких, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq l, \quad s \in \mathcal{S}. \quad (42)$$

В [7] показано, что усеченную задачу (42) можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стилтесовского типа. Масштабные пространства имеют вид

$$\mathcal{G}_1^{(l)} = \mathcal{G}_2^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{l \text{ слагаемых}}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(l)}, L_1^{(l)}, v_1^{(l)}, K_2^{(l)}, L_2^{(l)}, u_2^{(l)}$, участвующие в обобщенной интерполяционной задаче (5), зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} L_1^{(l)} &= \text{diag}\{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}_1^{(l)}\}, & v_1^{(l)} &= \text{col}\{I_{\mathcal{H}}, \dots, I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_1^{(l)}\}, \\ L_2^{(l)} &= \text{diag}\{z_1^{-1}I_{\mathcal{H}}, \dots, z_l^{-1}I_{\mathcal{H}}\} \in \{\mathcal{G}_2^{(l)}\}, & u_2^{(l)} &= L_2^{(l)-1} \cdot \text{col}\{s_1, \dots, s_l\} \in \{\mathcal{H}, \mathcal{G}_2\}. \\ K_r^{(l)} &= L_2^{(l)-1} \cdot \left\{ \frac{z_i^{r-1}s_i - \bar{z}_j^{r-1}s_j^*}{z_i - \bar{z}_j} \right\}_{i,j=1,\dots,l} \cdot L_2^{(l)-1*} \in \{G_r\}, & r &= 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4) имеем

$$T_1^{(l)} = T_2^{(l)} = L_2^{(l)}, \quad v_2^{(l)} = v_1^{(l)}, \quad u_1^{(l)} = \text{col}\{s_1, \dots, s_l\}.$$

Введем обозначение

$$T^{(l)} = T_1^{(l)} = T_2^{(l)}, \quad v^{(l)} = v_2^{(l)} = v_1^{(l)}.$$

Очевидно, что выполнено ОТ (3). Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (42) являются неравенства $K_1^{(l)} \geq 0, K_2^{(l)} \geq 0$. Более того (см. [7]), ОФ $s \in \mathcal{S}$ является решением усеченной задачи (42) тогда и только тогда, когда

она удовлетворяет системе ОМН (6). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи (41) совпадает с множеством решений интерполяционной задачи стилтьесовского типа $\mathcal{P}^{(l)} = \{K_1^{(l)}, L_1^{(l)}, v_1^{(l)}, K_2^{(l)}, L_2^{(l)}, u_2^{(l)}\}$. Условиями полной неопределенности являются условия $K_1^{(l)} > 0$, $K_2^{(l)} > 0$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (15) выполнены, т.е. задача (42) является вполне неопределенной.

Пусть при всех $l \in \mathbb{N}$ интерполяционные задачи (42) являются вполне неопределенными. В [7] показано, что интерполяционные задачи (42) являются упорядоченным семейством. При этом предельная интерполяционная задача совпадает с (41).

Получим явные формулы для параметров Стильтьеса. Для этого при всех $l \in \mathbb{N}$ рассмотрим резольвентные матрицы задач (42)

$$U_1^{(l)}(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_{\mathcal{H}} + zv^{(l)*} R_{T^{(l)*}}(z) K_2^{(l)-1} u_2^{(l)} & -zv^{(l)*} R_{T^{(l)*}}(z) K_1^{(l)-1} v^{(l)} \\ \hline u_2^{(l)*} R_{T^{(l)*}}(z) K_2^{(l)-1} u_2^{(l)} & I_{\mathcal{H}} - zu_1^{(l)*} R_{T^{(l)*}}(z) K_1^{(l)-1} v^{(l)} \end{array} \right]. \quad (43)$$

При $l \geq 2$ с каждой усеченной задачей Неванлинны–Пика (42) свяжем следующие объекты ($r = 1, 2$):

$$\begin{aligned} B_r^{(l)} &= T^{(l-1)-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{z_1^{r-1} s_1 - \bar{z}_l^{r-1} s_l^*}{z_1 - \bar{z}_l} \\ \vdots \\ \frac{z_{l-1}^{r-1} s_{l-1} - \bar{z}_l^{r-1} s_l^*}{z_{l-1} - \bar{z}_l} \end{bmatrix} \cdot \bar{z}_l I_{\mathcal{H}}, \\ \hat{v}^{(l)} &= B_1^{(l)*} K_1^{(l-1)-1} v^{(l-1)} - I_{\mathcal{H}}, \\ \hat{u}_2^{(l)} &= -B_2^{(l)*} K_2^{(l-1)-1} u_2^{(l-1)} + z_l s_l, \quad \hat{u}_1^{(l)} = -z_l^{-1} B_2^{(l)*} K_2^{(l-1)-1} u_2^{(l-1)} + s_l, \\ \hat{K}_r^{(l)} &= \frac{z_l^{r-1} s_l - \bar{z}_l^{r-1} s_l^*}{z_l - \bar{z}_l} - B_r^{(l)*} K_r^{(l-1)-1} B_r^{(l)} > 0_{\mathcal{H}_r}. \end{aligned}$$

Введем элементарные множители Бляшке–Потапова ($k \geq 2$)

$$\begin{aligned} b_1(z) &= I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + \frac{1}{1 - z\bar{z}_1^{-1}} \left[\begin{array}{c|c} +zv^{(1)*} K_2^{(1)-1} u_2^{(1)} & -zv^{(1)*} K_1^{(1)-1} v^{(1)} \\ \hline u_2^{(1)*} K_2^{(1)-1} u_2^{(1)} & -zu_1^{(1)*} K_1^{(1)-1} v^{(1)} \end{array} \right], \\ b_k(z) &= I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}} + \frac{1}{1 - z\bar{z}_k^{-1}} \left[\begin{array}{c|c} +z\hat{v}^{(k)*} \hat{K}_2^{(k)-1} \hat{u}_2^{(k)} & -z\hat{v}^{(k)*} \hat{K}_1^{(k)-1} \hat{v}^{(k)} \\ \hline \hat{u}_2^{(k)*} \hat{K}_2^{(k)-1} \hat{u}_2^{(k)} & -z\hat{u}_1^{(k)*} \hat{K}_1^{(k)-1} \hat{v}^{(k)} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

В [8] доказано, что резольвентные матрицы (43) представимы в виде произведения множителей Бляшке–Потапова (44)

$$U_1^{(l)}(z) = b_1(z) \cdot b_2(z) \cdots b_l(z) \quad \forall l \in \mathbb{N}. \quad (45)$$

Элементарные множители Бляшке–Потапова (44) принадлежат классу $\mathcal{W}_s$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. В этой точке все множители Бляшке–Потапова $b_k(x_0)$ удовлетворяют условиям леммы 2 и допускают представления (27)

$$b_k(x_0) = \begin{bmatrix} I & \widetilde{M}^{(k)}(x_0) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \widetilde{L}^{(k)}(x_0) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}^{(k)*}(x_0) & 0 \\ 0 & \widetilde{P}^{(k)-1}(x_0) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Простые вычисления по формулам (28) приводят к следующим выражениям для операторов из (46) ($k \geq 2$):

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}^{(1)}(x_0) &= \left(I_{\mathcal{H}} - \frac{x_0}{1 - x_0 \bar{z}_1^{-1}} u_1^{(1)*} K_1^{(1)-1} v^{(1)} \right)^{-1}, \\
 \widetilde{M}^{(1)}(x_0) &= v^{(1)*} (|z_1|^{-2} K_2^{(1)} - x_0^{-1} K_1^{(1)})^{-1} v^{(1)}, \\
 \widetilde{L}^{(1)}(x_0) &= \frac{1}{|1 + x_0 z_1^{-1}|^2} \{ u_2^{(1)*} K_2^{(1)-1} u_2^{(1)} - x_0 u_1^{(1)*} K_1^{(1)-1} u_1^{(1)} \}, \\
 \tilde{P}^{(k)}(x_0) &= \left\{ I_{\mathcal{H}} - \frac{x_0}{1 - x_0 \bar{z}_k^{-1}} \hat{u}_1^{(k)*} \hat{K}_1^{(k)-1} \hat{v}^{(k)} \right\}^{-1}, \\
 \widetilde{M}^{(k)}(x_0) &= \hat{v}^{(k)*} (|z_k|^{-2} \hat{K}_2^{(k)} - x_0^{-1} \hat{K}_1^{(k)})^{-1} \hat{v}^{(k)}, \\
 \widetilde{L}^{(k)}(x_0) &= \frac{1}{|1 + x_0 z_k^{-1}|^2} (\hat{u}_2^{(k)*} \hat{K}_2^{(k)-1} \hat{u}_2^{(k)} - x_0 \hat{u}_1^{(k)*} \hat{K}_1^{(k)-1} \hat{u}_1^{(k)}).
 \end{aligned} \tag{47}$$

Параметры Стильтеса $L^{(1)}$, $M^{(1)}$ совпадают с операторами $\widetilde{L}^{(1)}$, $\widetilde{M}^{(1)}$, а параметры Стильтеса $L^{(k)}$, $M^{(k)}$ конгруэнтны операторам $\widetilde{L}^{(k)}$, $\widetilde{M}^{(k)}$ (см. (31)). Таким образом, мы указали явные формулы для параметров Стильтеса в задаче Неванлинны–Пика. Теорема 3 задает теперь критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны–Пика (41).

4.2. Проблема моментов Стильтеса. В проблеме моментов Стильтеса по заданной последовательности операторов $s_0, \dots, s_k, \dots \in \{\mathcal{H}\}_H$ требуется описать множество монотонно возрастающих ОФ $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$, $\sigma(0) = 0_{\mathcal{H}}$, $\sigma(t+0) = \sigma(t)$, $t \in [0, \infty)$, таких, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t) \quad \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{48}$$

Множество решений σ проблемы моментов (48) обозначим символом $\mathcal{M}^{(\infty)}$. С каждой $\sigma \in \mathcal{M}^{(\infty)}$ свяжем ОФ

$$s(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \tag{49}$$

ОФ s определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и называется *ассоциированной* с проблемой моментов (48). Множество ОФ s , ассоциированных с проблемой (48), обозначим символом $\mathcal{F}^{(\infty)}$. Из формулы обращения Стильтеса следует, что соответствие, устанавливаемое между $\mathcal{F}^{(\infty)}$ и $\mathcal{M}^{(\infty)}$ формулой (49), является взаимно однозначным. Поэтому вместо описания множества $\mathcal{M}^{(\infty)}$ мы можем ограничиться описанием множества $\mathcal{F}^{(\infty)}$.

Вместе с бесконечной проблемой моментов (48) будем рассматривать и усеченные проблемы моментов Стильтеса. В таких проблемах фиксируется число $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и требуется описать все нормированные монотонно возрастающие ОФ $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{\mathcal{H}\}_H$ и операторы $M \in \{\mathcal{H}\}_{\geq}$ такие, что

$$s_j = \int_0^{+\infty} t^j d\sigma(t), \quad 0 \leq j \leq l-1, \quad s_l = \int_0^{+\infty} t^l d\sigma(t) + M. \tag{50}$$

При $l = 0$ требуем выполнения только второго условия в (50).

Проблема моментов (50) называется l -й *усеченной проблемой моментов Стилтеса*, а множество ее решений σ обозначается символом $\mathcal{M}^{(l)}$. Как и в случае проблемы моментов (48), с каждой $\sigma \in \mathcal{M}^{(l)}$ свяжем ассоциированную ОФ s вида (49). Множество всех ОФ s , ассоциированных с проблемой (50), обозначим символом $\mathcal{F}^{(l)}$.

Покажем, что задачу описания ассоциированных ОФ можно рассматривать как обобщенную интерполяционную задачу стилтесовского типа. Рассмотрим отдельно случай четного и нечетного числа моментов.

Пусть $l = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. В этом случае в качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_1^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}, \quad \mathcal{G}_2^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_n, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(l)}$, $L_1^{(l)}$, $v_1^{(l)}$, $K_2^{(l)}$, $L_2^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, участвующие в задаче (5), зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} K_1^{(l)} &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, & L_1^{(l)} &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, & v_1^{(l)} &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \\ K_2^{(l)} &= \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{n-1}, & L_2^{(l)} &= \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, & u_2^{(l)} &= - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть $l = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В этом случае в качестве масштабных пространств выберем пространства

$$\mathcal{G}_1^{(l)} = \mathcal{G}_2^{(l)} = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_{n+1}, \quad \mathcal{H}.$$

Операторы $K_1^{(l)}$, $L_1^{(l)}$, $v_1^{(l)}$, $K_2^{(l)}$, $L_2^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, участвующие в задаче (5), зададим естественными матричными представлениями

$$\begin{aligned} K_1^{(l)} &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, & L_1^{(l)} &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} & I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, & v_1^{(l)} &= \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} \\ 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \\ K_2^{(l)} &= \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^n, & L_2^{(l)} &= \begin{bmatrix} 0_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & \dots & 0_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{\mathcal{H}} & \dots & I_{\mathcal{H}} & 0_{\mathcal{H}} \end{bmatrix}, & u_2^{(l)} &= - \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственно проверяем, что определенные выше операторы при $l = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и при $l = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ удовлетворяют ОТ (3). Как известно (см., например, [2]), необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (50) являются неравенства $K_1^{(l)} \geq 0$, $K_2^{(l)} \geq 0$. Более того (см. [2]), ОФ $s \in \mathcal{F}^{(l)}$ тогда и только тогда, когда

она удовлетворяет системе ОМН (6). Таким образом, множество $\mathcal{F}^{(l)}$ совпадает со множеством решений следующей интерполяционной задачи стилтьесовского типа:

$$\mathcal{P}^{(l)} = \{K_1^{(l)}, L_1^{(l)}, v_1^{(l)}, K_2^{(l)}, L_2^{(l)}, u_2^{(l)}\}. \quad (51)$$

Условиями полной неопределенности являются условия $K_1^{(l)} > 0$, $K_2^{(l)} > 0$. Легко видеть, что при этом все остальные условия в (15) автоматически выполнены, т.е. задача (50) является вполне неопределенной.

Пусть задачи (50) являются вполне неопределенными при всех l . Интерполяционные задачи (50) являются упорядоченным семейством (см. [7]). Рассмотрим резольвентные матрицы $U_1^{(l)}$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, интерполяционных задач (50) (см. (16)). В [2] показано, что резольвентные матрицы разбиваются в произведение Бляшке–Потапова

$$\begin{aligned} U_1^{(2n)}(z) &= \begin{bmatrix} I & -zM_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_0 & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_{n-1} & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & -zM_n \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ U_1^{(2n+1)}(z) &= \begin{bmatrix} I & -zM_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_0 & I \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I & -zM_n \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_n & I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= s_0^{-1} > 0, & L^{(0)} &= s_0 s_1^{-1} s_0 > 0 \\ M^{(k)} &= v_1^{(2k)*} K_1^{(2k)^{-1}} v_1^{(2k)} - v_1^{(2k-2)*} K_1^{(2k-2)^{-1}} v_1^{(2k-2)} > 0, \\ L^{(k)} &= u_2^{(2k+1)*} K_2^{(2k+1)^{-1}} u_2^{(2k+1)} - u_2^{(2k-1)*} K_2^{(2k-1)^{-1}} u_2^{(2k-1)} > 0, \end{aligned} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (53)$$

Пусть в формулах (52) $z = -1$. Из вида формул (52) следует, что операторы в (53) являются обобщенными параметрами Стильтеса. По теореме 3 проблема моментов (48) вполне неопределена тогда и только тогда, когда сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} L^{(k)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формул (45) и (46) следует, что в задаче Неванлинны–Пика мультипликативное разложение (30) содержит верхние блочно-треугольные, нижние блочно-треугольные и блочно-диагональные операторы. Поэтому обобщенные параметры Стильтеса $M^{(k)}$ и $L^{(k)}$ конгруэнтны операторам $\widetilde{M}^{(k)}$ и $\widetilde{L}^{(k)}$ (см. формулы (31)). Из формул же (52) следует, что в проблеме моментов мультипликативное разложение (30) содержит только верхние блочно-треугольные и нижние блочно-треугольные операторы. Поэтому обобщенные параметры Стильтеса $M^{(k)}$ и $L^{(k)}$ совпадают с операторами $\widetilde{M}^{(k)}$ и $\widetilde{L}^{(k)}$. Таким образом, критерий Стильтеса в случае проблемы моментов проще, чем аналогичный критерий для задачи Неванлинны–Пика и других интерполяционных задач стилтьесовского типа. Этим, по-видимому, и объясняется тот факт, что в течение более 100 лет со времени работ Стильтеса [1] критерий Стильтеса неопределенности проблемы моментов не был обобщен на другие интерполяционные задачи для стилтьесовских функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Stieltjes, “Recherches sur les fractions continues”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.*, **8**:4 (1894), 1–122; **9**:1 (1895), 1–47.

- [2] Ю. М. Дюкарев, “О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стильтьеса”, *Матем. заметки*, **75**:1 (2004), 71–88.
- [3] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [4] Ю. М. Дюкарев, “Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I”, *Матем. физ., анал., геом.*, **6**:1–2 (1999), 30–54.
- [5] V. Bolotnikov, L. Sakhnovich, “On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions”, *Integral Equations Operator Theory*, **35**:4 (1999), 423–470.
- [6] M. G. Krein, A. A. Nudelman, “An interpolation problem in the class of Stieltjes functions and its connections with other problems”, *Integral Equations Operator Theory*, **30**:3 (1998), 251–278.
- [7] Ю. М. Дюкарев, “О неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтьеса”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 61–88.
- [8] Ю. М. Дюкарев, “Мультипликативная структура резольвентных матриц интерполяционных задач в классе Стильтьеса”, *Вісн. Харківського ун-ту. Сер. Матем., прикл. матем., мех.*, **458** (1999), 143–153.
- [9] В. П. Потапов, “Дробно-линейные преобразования матриц”, *Исследования по теории операторов и их приложениям*, Наукова думка, Киев, 1979, 75–97.
- [10] Ю. М. Дюкарев, “Мультипликативные и аддитивные классы Стильтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи. II”, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, 1982, № 38, 40–48.
- [11] В. П. Потапов, “Теорема о модуле. II”, *Теория функций, функц. анализ и их прилож.*, 1983, № 39, 95–106.

Ю. М. Дюкарев

Харьковский национальный университет

E-mail: Yury.M.Dyukarev@univer.kharkov.ua

Поступило

10.04.2006

Исправленный вариант

05.02.2007