Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Фаньола, В. Уманита, Детальный баланс, обращение времени и генераторы квантовых марковских полу-
групп, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 108–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 08:55:58

Детальный баланс, обращение времени и генераторы квантовых марковских полугрупп

Ф. Фаньола, В. Уманита

В статье рассматривается характеристика генераторов $\mathcal{L}$ непрерывных по норме квантовых марковских полугрупп, допускающих представление Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблад в терминах операторов H, L_k : $\mathcal{L}(x) = i[H, x] - (1/2) \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k)$ и удовлетворяющих квантовому условию детального равновесия относительно антиунитарного обращения времени.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0} = e^{t\mathcal{L}}$ является равномерно непрерывной (т.е. непрерывной относительно нормы) полугруппой вполне положительных нормальных отображений алгебры фон Неймана $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ всех ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$ с генератором Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада [1], [2]

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k) \quad (1)$$

($H, L_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$), и пусть ρ является точным нормальным $\mathcal{T}$ -инвариантным состоянием. Квантовая марковская полугруппа (КМП) $\mathcal{T}$ удовлетворяет *квантовому условию детального баланса* (КДБ) в смысле Алицкого [3], [4], Фриджеро и Горини [5], Коссаковского, Фриджеро и Горини и Верри [6] относительно состояния ρ , если КМП $\widetilde{\mathcal{T}}$, порождаемая отображением $\widetilde{\mathcal{L}}$, заданным формулой (1) с заменой H на $-H$, совпадает с полугруппой, двойственной к $\mathcal{T}$ относительно скалярного произведения $\langle a, b \rangle = \text{tr}(\rho a^* b)$ на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$, заданного точным состоянием ρ ; более точно, если

$$\text{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{T}}_t(y)x) = \text{tr}(\rho y \mathcal{T}_t(x)) \quad (2)$$

для всех $t \geq 0$ и $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Это условие, очевидно, эквивалентно следующему условию, выраженному в терминах генераторов:

$$\text{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{L}}(y)x) = \text{tr}(\rho y \mathcal{L}(x)),$$

и может быть записано в эквивалентном виде

$$\mathcal{L} - \widetilde{\mathcal{L}} = 2i[H, \cdot]. \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке проекта MIUR PRIN 2005 “Квантовые марковские полугруппы и квантовые стохастические дифференциальные уравнения”.

Приведенное выше определение может быть подвергнуто критике, поскольку оно содержит гамильтониан H в ГКСЛ-разложении генератора, не являющийся однозначно определенным. Тем не менее, можно показать, что если полугруппа $\mathcal{T}$ имеет двойственную, удовлетворяющую (2), то можно найти выделенное ГКСЛ-разложение (мы напомним это определение ниже в разделе 2), в котором гамильтониан H коммутирует с ρ и определен единственным возможным образом с точностью до оператора, кратного тождественному, который, как нетрудно видеть, не изменяет значение коммутатора $[H, x]$ (см. [7; предложение 4.5]). Несколько более серьезным замечанием является то, что при этом не учитывается четность наблюдаемой относительно обращения времени.

Обращение времени является антиунитарным оператором θ , действующим в $\mathfrak{h}$, таким, что $\theta^2 = \mathbb{1}$ (см. определение 2). Он определяет гомоморфизм $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$, представляющий операцию обращения. Действительно, четные (или нечетные) наблюдаемые удовлетворяют уравнению $\sigma(x) = x$ (или $\sigma(x) = -x$). КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет квантовому условию детального баланса относительно точного нормального инвариантного состояния ρ и операции обращения σ , если

$$\mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho \sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*)))$$

для всех $t \geq 0$ и всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

Очевидно, что это определение, согласно Маевскому [8], [9] (см. также [10]) и благодаря работе Агарвала [11], согласовано с предыдущим, если $\mathcal{L}_0$, диссипативная часть $\mathcal{L}$, определенная соотношением $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} - i[H, \cdot]$, и гамильтониан H являются инвариантными относительно обращения времени (см. замечание после теоремы 7).

В работе [7] в представлении ГКСЛ (1) мы охарактеризовали генераторы $\mathcal{L}$ в терминах операторов H и L_k , а также КМП, удовлетворяющие квантовым условиям детального баланса (3) в смысле Алицкого, Фриджеро и соавторов и аналогичному условию относительно симметричного скалярного произведения $\langle a, b \rangle = \mathrm{tr}(\rho^{1/2} a^* \rho^{1/2} b)$ на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

В настоящей работе мы обобщим это определение. Основной результат содержится в теореме 9, характеризующей операторные коэффициенты H , L_k генераторов КМП, удовлетворяющих условию детального баланса и обобщающей предыдущий результат теоремы 7.3 из [7].

Хотя здесь мы рассматриваем только генераторы непрерывных по норме полугрупп, алгебраическая характеристика квантовых условий детального баланса оказывается полезной также для некоторых слабо* непрерывных КМП с неограниченными генераторами, например, таких как генераторы, рассмотренные в [12]–[14] (см. также [15]), поскольку используемая нами алгебраическая связь между $\{L_k\}$ и их сопряженными может рассматриваться как алгебраические тождества на достаточно широкой общей области определения.

2. Условие детального баланса, связанное с операцией обращения времени. Непрерывная биекция θ на $\mathfrak{h}$ называется *антиунитарной*, если она удовлетворяет условию

$$\langle \theta u, \theta v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{для всех } u, v \in \mathfrak{h}.$$

Для полноты изложения приведем краткое доказательство следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Операция θ обладает следующими свойствами:

- 1) θ является антилинейной;
- 2) сопряженное отображение θ^* является антилинейным и определяется соотношением $\langle u, \theta v \rangle = \langle v, \theta^* u \rangle$ ($u, v \in \mathfrak{h}$);
- 3) $\theta\theta^* = \theta^*\theta = \mathbf{1}$;
- 4) $(\theta x \theta^{-1})^* = \theta x^* \theta^{-1}$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) Для любого $u \in \mathfrak{h}$ рассмотрим отображение $F_u: \mathfrak{h} \ni v \mapsto \langle u, \theta v \rangle \in \mathbb{C}$. Поскольку очевидно, что F_u является линейным непрерывным функционалом на $\mathfrak{h}$, по теореме Рисса существует единственный элемент $\theta_u \in \mathfrak{h}$ такой, что $F_u(v) = \langle \theta_u, v \rangle$ для всех $v \in \mathfrak{h}$.

Поэтому положив $\theta^* u := \theta_u$, мы получим непрерывный антилинейный оператор на $\mathfrak{h}$, удовлетворяющий $\langle u, \theta v \rangle = \langle \theta^* u, v \rangle = \overline{\langle v, \theta^* u \rangle}$ для всех $u, v \in \mathfrak{h}$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\langle w, \theta^*(\alpha u + \beta v) \rangle} &= F_{\alpha u + \beta v}(w) = \overline{\langle \alpha u + \beta v, \theta w \rangle} = \alpha \overline{\langle u, \theta w \rangle} + \beta \overline{\langle v, \theta w \rangle} \\ &= \alpha \overline{\langle w, \theta^* u \rangle} + \beta \overline{\langle w, \theta^* v \rangle} = \langle w, \bar{\alpha} \theta^* u + \bar{\beta} \theta^* v \rangle \end{aligned}$$

для всех $u, v, w \in \mathfrak{h}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и

$$\|\theta^* u\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle v, \theta^* u \rangle| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle u, \theta v \rangle| \leq \|\theta\| \|u\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем оператором обращения времени на $\mathfrak{h}$ антиунитарный оператор θ на $\mathfrak{h}$ такой, что $\theta^2 = \mathbf{1}$.

Наблюдаемая a (т.е. самосопряженный элемент из $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$) называется четной (или нечетной), если $\theta a \theta^{-1} = a$ ($\theta a \theta^{-1} = -a$, соответственно).

Очевидно, для оператора обращения времени θ выполнено тождество $\theta^{-1} = \theta^* = \theta$.

ПРИМЕР 3. Пусть $(e_j)_j$ – ортонормированный базис в $\mathfrak{h}$. Тогда сопряжение θ относительно этого базиса определено соотношением

$$\theta u = \theta \left(\sum_j \langle e_j, u \rangle e_j \right) := \sum_j \overline{\langle e_j, u \rangle} e_j,$$

как некоторая операция обращения времени. В частности, в стандартном представлении Гейзенберга канонических коммутационных соотношений в одномерном случае на $\mathfrak{h} = \ell^2(\mathbb{C})$ с помощью операторов рождения-уничтожения a^* , a , заданных соотношениями $a e_j = \sqrt{j+1} e_{j+1}$ ($a e_j = \sqrt{j} e_{j-1}$), импульс и координата $p = (a - a^*)/\sqrt{2}$ и $q = (a + a^*)/\sqrt{2}$ являются нечетной и четной наблюдаемыми, соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если θ является оператором обращения времени на $\mathfrak{h}$, то

$$\mathrm{tr}(\theta x \theta^{-1}) = \mathrm{tr}(x^*) \quad \text{для всех } x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(e_j)_j$ является ортонормированным базисом на $\mathfrak{h}$ и $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\theta x \theta^{-1}) = \sum_j \langle e_j, \theta x \theta^{-1} e_j \rangle = \sum_j \langle x \theta^{-1} e_j, \theta^* e_j \rangle = \sum_j \langle \theta^{-1} e_j, x^* \theta^* e_j \rangle = \mathrm{tr}(x^*),$$

поскольку $\theta^{-1} = \theta^*$ и $(\theta^* e_j)_j$ также является ортонормированным базисом в $\mathfrak{h}$.

Рассмотрим замкнутую квантовую систему в гильбертовом пространстве $\mathfrak{h}$, сопряженный гамильтониан $H = H^*$ и оператор обращения времени θ на $\mathfrak{h}$ такой, что $\theta H \theta^{-1} = H$ (т.е. энергия является четной наблюдаемой). Эволюция системы описывается однопараметрической группой $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$: $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$. Кроме того, отображение

$$\theta \mathcal{T}_t(x) \theta^{-1} = e^{-itH} \theta x \theta^{-1} e^{itH} = \mathcal{T}_{-t}(\theta x \theta^{-1})$$

для любого θ с указанными выше свойствами является антилинейным и коммутирует со всеми спектральными проекторами гамильтониана H . Очевидно, что любое нормальное $\mathcal{T}$ -инвариантное состояние ρ коммутирует с $e^{\pm itH}$ и H . Поэтому, если состояние ρ является функцией H , оно коммутирует с θ , уравнение (4) выполнено, и мы имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) &= \text{tr}(\theta(\rho x \mathcal{T}_t(y))^* \theta^{-1}) = \text{tr}(\theta \mathcal{T}_t(y^*) x^* \rho \theta^{-1}) = \text{tr}(\rho(\theta \mathcal{T}_t(y^*) \theta^{-1}) \theta x^* \theta^{-1}) \\ &= \text{tr}(\rho \mathcal{T}_{-t}(\theta y^* \theta^{-1}) \theta x^* \theta^{-1}) = \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} e^{itH} \theta x^* \theta^{-1} e^{-itH}) \\ &= \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1})) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

Приведенное тождество выполнено, в частности, если ρ является равновесным гиббсовским состоянием $\rho = Z^{-1} e^{-\beta H}$ и может быть использовано как определение условия детального баланса для произвольной открытой квантовой системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет квантовому условию детального баланса относительно точного инвариантного состояния ρ и обращения времени θ (КДБ- θ), если

$$\text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \text{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1})) \quad (5)$$

для всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$.

Заметим, что ограниченный оператор $\theta x \theta^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ является линейным для всех $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Кроме того, для любой пары операторов x, y с заданной четностью $\epsilon_x, \epsilon_y \in \{-1, 1\}$ относительно обращения времени КДБ- θ условие имеет простой вид

$$\text{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \epsilon_x \epsilon_y \text{tr}(\rho y^* \mathcal{T}_t(x^*)). \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию КДБ- θ , то ρ коммутирует с θ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $x = |u\rangle\langle v|$ ($u, v \in \mathfrak{h}$), $y = \mathbf{1}$ и $t = 0$ в (5), получим

$$\langle v, \rho u \rangle = \text{tr}(\rho \theta |v\rangle\langle u| \theta^{-1}) = \text{tr}(|\rho \theta v\rangle\langle \theta u|) = \langle \theta u, \rho \theta v \rangle = \langle \theta^* \rho \theta v, u \rangle = \langle v, \theta^* \rho \theta u \rangle.$$

Отсюда следует $\rho = \theta^* \rho \theta$, т.е. ρ и θ коммутируют.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение 5, данное в [10] в виде (6), является специальным случаем условия детального баланса, введенного Маевским [8] с помощью абстрактной операции обращения времени. Это антилинейное отображение σ на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ такое, что $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathcal{B}(\mathfrak{h})}$, $\sigma(x^*) = \sigma(x)^*$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$ и $\sigma(xy + yx) = \sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x)$ для

всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию детального баланса Маевского относительно ρ , если существует отображение σ из $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ такое, что

$$\mathrm{tr}(\rho\sigma(xy)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(x)\sigma(y)), \quad \mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*)))$$

для всех $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Отображение $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$ с оператором обращения времени θ на $\mathfrak{h}$ является, очевидно, операцией обращения из $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$, которая является также гомоморфизмом, поскольку $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Отсюда следует, что из КДБ- θ условия следует условие детального баланса Маевского.

В дальнейшем изложении мы ограничимся рассмотрением равномерно непрерывных КМП $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ с точным нормальным инвариантным состоянием ρ и предположим существование оператора обращения времени θ на $\mathfrak{h}$. Кроме того, в заключительной части статьи мы рассматриваем лишь операции обращения вида $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$, где θ – оператор обращения на $\mathfrak{h}$.

Первым важным следствием является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию тогда и только тогда, когда сопряженная полугруппа существует и определяется соотношением*

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(x) = \theta \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} \quad \text{для всех } x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (7)$$

Кроме того, если это эквивалентное условие выполнено, то $\widetilde{\mathcal{T}}$ является КМП с генератором

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \theta \mathcal{L}(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1}, \quad x \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнено КДБ- θ условие, и положим $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$. При $t = 0$ в уравнении (5) имеем $\mathrm{tr}(\rho ab) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(b^*)\sigma(a^*))$ для всех $a, b \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$, так что

$$\mathrm{tr}(\rho x \mathcal{T}_t(y)) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(y^*) \mathcal{T}_t(\sigma(x^*))) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x^*))^* \sigma(\sigma(y^*)^*))) = \mathrm{tr}(\rho\sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x)))y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{T}}_t(x) = \sigma(\mathcal{T}_t(\sigma(x)))$.

Отображение $x \rightarrow \sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$, очевидно, является нормальным. Поэтому оба отображения $t \rightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)$ (при фиксированном x) и $x \rightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)$ (при фиксированном t) являются нормальными. Наконец, отображения $\widetilde{\mathcal{T}}$ являются вполне положительными, поскольку любое разложение Крауза $\mathcal{T}_t(x) = \sum_k (V_t^{(k)})^* x V_t^{(k)}$ связано с аналогичным разложением Крауза $\widetilde{\mathcal{T}}_t$ в терминах операторов $\widetilde{V}_t^{(k)} = \theta V_t^{(k)} \theta$. Отсюда следует, что $\widetilde{\mathcal{T}}$ является КМП.

Обратно, если выполнено (7), то $\widetilde{\mathcal{T}}$ является КМП и $\mathrm{tr}(\rho \widetilde{\mathcal{T}}_t(x)y)$ равен (поскольку ρ и θ коммутируют)

$$\mathrm{tr}(\rho \theta \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} y) = \mathrm{tr}(\theta(\rho \mathcal{T}_t(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1} y \theta) \theta^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho \theta y^* \theta^{-1} \mathcal{T}_t(\theta x^* \theta^{-1}))$$

в силу предложения 6; отсюда следует (6).

Формула (8) очевидно следует из (7) при дифференцировании по времени при $t = 0$ и, обратно, (7) выводится из (8) интегрированием и экспоненцированием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тождество (8) показывает что, если диссипативная часть $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L} - i[H, \cdot]$ генератора $\mathcal{L}$ является инвариантом обращения времени (т.е. $\mathcal{L}_0(x) = \theta \mathcal{L}_0(\theta x \theta^{-1}) \theta^{-1}$ для всех x) и гамильтониан является четным (т.е. он коммутирует

с θ), то из КДБ- θ следует условие детального баланса (3). Полагая $\sigma(x) = \theta x \theta^{-1}$, мы можем написать равенство

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}(x) &= \sigma(\mathcal{L}(\sigma(x))) = \mathcal{L}_0(x) + \sigma([iH, \sigma(x)]) = \mathcal{L}_0(x) - i[\sigma(H), x] \\ &= \mathcal{L}_0(x) - i[H, x] = \mathcal{L}(x) - 2i[H, x].\end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию КДБ- θ . Поскольку $\widetilde{\mathcal{T}}$ является КМП, существует (см. предложение 4.4 из [7]) *выделенное* ГКСЛ представление $\mathcal{L}$, т.е. такое представление ГКСЛ вида (1), что

- 1) $\text{tr}(\rho L_k) = 0$ для каждого $k \geq 1$;
- 2) ряд $\sum_{k \geq 1} L_k^* L_k$ является сильно сходящимся;
- 3) если $\sum_{k \geq 0} |c_k|^2 < \infty$ и $c_0 + \sum_{k \geq 1} c_k L_k = 0$ для постоянных $(c_k)_{k \geq 0}$, то $c_k = 0$ для любого $k \geq 0$;
- 4) $[H, \rho] = 0$;
- 5) $\rho L_k = \lambda_k L_k \rho$ для некоторого $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

ГКСЛ-представление $\mathcal{L}$, удовлетворяющее только свойствам 1)–3), называется *специальным* ГКСЛ-представлением.

Напомним, что (см. теорему 30.10 из [16]), если $H', (L'_k)_{k \geq 1}$ является другим семейством ограниченных операторов в $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ и оператор H' самосопряженный, то это семейство является специальным ГКСЛ-представлением $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда длины последовательностей $(L_k)_{k \geq 1}, (L'_k)_{k \geq 1}$ одинаковы и

$$H' = H + \alpha, \quad L'_k = \sum_j u_{kj} L_j$$

с некоторой постоянной α и унитарной матрицей $(u_{kj})_{kj}$.

Установим связь выделенным ГКСЛ представлением $\mathcal{L}$ и его двойственным $\widetilde{\mathcal{L}}$.

ТЕОРЕМА 8. *Если $\mathcal{T}$ удовлетворяет условию КДБ- θ , то для каждого выделенного ГКСЛ-представления генератора $\mathcal{L}$ операторами H и L_k существует выделенное ГКСЛ-представление $\widetilde{\mathcal{L}}$ операторами $\tilde{H}$ и $\tilde{L}_k$ такое, что*

- 1) $\tilde{H} = -\theta^{-1} H \theta - \alpha$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) $\tilde{L}_k = \theta^{-1} L_k \theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим выделенное ГКСЛ-представление генератора $\mathcal{L}$ вида 1). Поскольку $\widetilde{\mathcal{L}}(a) = \theta \mathcal{L}(\theta a \theta^{-1}) \theta^{-1}$, из теоремы 7, свойства антилинейности θ и $\theta^2 = \mathbf{1}$ получаем

$$\begin{aligned}\theta^{-1} \widetilde{\mathcal{L}}(a) \theta &= i[H, \theta a \theta^{-1}] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k \theta a \theta^{-1} - 2L_k^* \theta a \theta^{-1} L_k + \theta a \theta^{-1} L_k^* L_k) \\ &= i\theta^{-1}(\theta^{-1} H \theta a - a \theta^{-1} H \theta) \theta + \sum_k \theta^{-1}((\theta^{-1} L_k^* \theta) a (\theta^{-1} L_k \theta)) \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_k \theta^{-1}((\theta^{-1} L_k^* \theta)(\theta^{-1} L_k \theta) a + a(\theta^{-1} L_k^* \theta)(\theta^{-1} L_k \theta)) \theta \\ &= \theta^{-1}(-i[\theta^{-1} H \theta, a]) \theta - \frac{1}{2} \sum_k \theta^{-1}(L_k'^* L_k' a - 2L_k'^* a L_k' + a L_k'^* L_k') \theta,\end{aligned}$$

где $L'_k := \theta^{-1}L_k\theta$. Поэтому, полагая $\tilde{H} = -\theta^{-1}H\theta - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) и $\tilde{L}_k = \theta^{-1}L_k\theta$, получаем ГКСЛ-представление генератора $\mathcal{L}$ такое, что

$$\begin{aligned}\rho\tilde{H} &= -\theta^{-1}\rho H\theta - \alpha\rho = -\theta^{-1}H\rho\theta - \alpha\rho = \tilde{H}\rho, \\ \rho\tilde{L}_k &= \theta^{-1}\rho L_k\theta = \theta^{-1}\lambda_k L_k\rho\theta = \lambda_k\tilde{L}_k\rho\end{aligned}$$

для ρ , коммутирующего с H и θ , и $\rho L_k = \lambda_k L_k\rho$ для некоторых $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Это значит, что представление ГКСЛ, предъявленное выше для $\mathcal{L}$, является выделенным.

КДБ- θ условие можно выразить в терминах L_k следующим образом.

ТЕОРЕМА 9. КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ -условию тогда и только тогда, когда существует выделенное представление ГКСЛ генератора $\mathcal{L}$ операторами H и L_k такое, что

- 1) $H = \theta^{-1}H\theta + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$;
- 2) $\lambda_k^{-1/2}L_k^* = \sum_j u_{kj}\theta^{-1}L_j\theta$ для некоторых $\lambda_k > 0$ и унитарной матрицы $(u_{kj})_{kj}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию, то существует выделенное представление генератора $\mathcal{L}$ операторами H , L_k с $\rho L_k = \lambda_k L_k\rho$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 8 операторы $\tilde{H} = -\theta^{-1}H\theta - \alpha$ и $\tilde{L}_k = \theta^{-1}L_k\theta$ задают выделенное представление ГКСЛ генератора $\mathcal{L}$. Поскольку $\mathcal{T}$ является КМП, мы дополнительно имеем другое выделенное ГКСЛ-представление $\mathcal{L}$ операторами $-H - \beta$ и $\lambda_k^{-1/2}L_k^*$ (см. теорему 4.4 из [7]), и поэтому условия (1) и (2) выполняются.

Обратно, если условия (1) и (2) выполнены, то непосредственное вычисление показывает, что $\theta^{-1}\tilde{\mathcal{L}}(a)\theta = \mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})$ для всех $a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$, и поэтому имеем $\tilde{\mathcal{L}}(a) = \theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$. Отсюда очевидно следует, что $\tilde{\mathcal{T}}(a) = \theta\mathcal{T}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$; из теоремы 7 вытекает, что $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Двойственная полугруппа может быть также определена для симметричного скалярного произведения на $\mathcal{B}(\mathfrak{h})$ $(a, b) \rightarrow \text{tr}(\rho^{1/2}a^*\rho^{1/2}b)$ (см. [17]–[19]). Двойственная полугруппа всегда является полугруппой вполне положительных отображений. По-видимому, возможно найти характеризацию генераторов КМП, удовлетворяющую квантовому условию детального баланса относительно симметричного скалярного произведения и обращения времени θ , аналогичную теореме 7.3 из нашей работы [7]. Эта задача будет предметом нашей следующей заметки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для заданного специального ГКСЛ-представления генератора $\mathcal{L}$ квантовой марковской полугруппы $\mathcal{T}$ операторами H и L_k , положим

$$\mathcal{L}_0(a) = -\frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k a - 2L_k^* a L_k + a L_k^* L_k).$$

Тогда КМП $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию, если и только если выполнено $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot]$ с $\tilde{\mathcal{L}}_0(a) = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$, и $[H, \rho] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot]$ с $\tilde{\mathcal{L}}_0 = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$ и $[H, \rho] = 0$, то генератор $\mathcal{L}$ является условно вполне положительным. Поэтому $\mathcal{T}$ является КМП и

$$\theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_0(a) - i\theta[\theta^{-1}H\theta, \theta a\theta^{-1}]\theta^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_0(a) - i[H, a] = \tilde{\mathcal{L}}(a).$$

Поэтому в силу теоремы 7 $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию.

Обратно, если $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию, то для $\mathcal{L}$ можно найти выделенное ГКСЛ представление операторами K, M_k такими, что $[K, \rho] = 0$ и $K = \theta^{-1}K\theta + c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ (см. теорему 9). С другой стороны, гамильтониан K в специальном ГКСЛ представлении является единственным с точностью до скаляра, поэтому можно считать, что $H = K$ и нам известно, что

- 1) H коммутирует с ρ ,
- 2) $H = \theta^{-1}H\theta + c, c \in \mathbb{R}$,
- 3) операторы L_k и M_k определяют то же самое отображение $\mathcal{L}_0$.

Отсюда следует, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + i[\theta^{-1}H\theta, \cdot] = \mathcal{L}_0 + i[H, \cdot]$, поэтому

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_0(a) - i[H, a] &= \widetilde{\mathcal{L}}(a) = \theta\mathcal{L}(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} \\ &= \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} - i\theta[\theta^{-1}H\theta, \theta a\theta^{-1}]\theta^{-1} = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1} - i[H, a]\end{aligned}$$

для всех $a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h})$. Теперь очевидно, что отсюда следует равенство

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0(a) = \theta\mathcal{L}_0(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}.$$

3. Двойственность. В этом разделе мы изучим КДБ- θ в том случае, когда обращение времени θ является операцией, определенной в примере 3 относительно ортонормированного базиса $(e_j)_j$ собственных векторов ρ . Поэтому полугруппа $\mathcal{T}$ удовлетворяет КДБ- θ условию, если и только если двойственная полугруппа $\widetilde{\mathcal{T}}$ задана следующим образом:

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \mathcal{T}_t(a^T)^T, \quad a \in \mathcal{B}(\mathfrak{h}),$$

где a^T означает транспонированный оператор $a = \sum_{ij} a_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|$, заданный формулой $a^T = \sum_{ij} a_{ji}|e_i\rangle\langle e_j|$. Действительно, согласно теореме 7 $\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \theta\mathcal{T}_t(\theta a\theta^{-1})\theta^{-1}$; кроме того, для всех $u \in \mathfrak{h}$,

$$\theta a\theta^{-1}u = \theta\left(\sum_i \overline{\langle e_i, u \rangle} a e_i\right) = \theta\left(\sum_{ij} \overline{\langle e_i, u \rangle} a_{ji} e_j\right) = \sum_{ij} \langle e_i, u \rangle \bar{a}_{ji} e_j = \sum_{ij} \bar{a}_{ji} |e_j\rangle\langle e_i| u,$$

т.е. $\theta a\theta^{-1} = (a^*)^T = (a^T)^*$. Отсюда следует, что

$$\widetilde{\mathcal{T}}_t(a) = \theta\mathcal{T}_t((a^T)^*)\theta^{-1} = \theta\mathcal{T}_t(a^T)^*\theta^{-1} = ((\mathcal{T}_t(a^T)^*)^*)^T = \mathcal{T}_t(a^T)^T.$$

Авторы благодарят П. Толкнера и В. А. Маевского за обсуждение настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, “Completely positive dynamical semigroups of N -level systems”, *J. Math. Phys.*, **17**:5 (1976), 821–825.
- [2] G. Lindblad, “On the generators of quantum dynamical semigroups”, *Comm. Math. Phys.*, **48**:2 (1976), 119–130.
- [3] R. Alicki, “On the detailed balance condition for non-hamiltonian systems”, *Rep. Math. Phys.*, **10**:2 (1976), 249–258.
- [4] R. Alicki, K. Lendi, *Lecture Notes in Phys.*, 286, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

- [5] A. Frigerio, V. Gorini, “Markov dilations and quantum detailed balance”, *Comm. Math. Phys.*, **93**:4 (1984), 517–532.
- [6] A. Kossakowski, A. Frigerio, V. Gorini, M. Verri, “Quantum detailed balance and KMS condition”, *Comm. Math. Phys.*, **57**:2 (1977), 97–110.
- [7] F. Fagnola, V. Umanità, “Generators of detailed balance quantum Markov semigroups”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **10**:3 (2007), 335–363.
- [8] W. A. Majewski, “On the relationship between the reversibility of detailed balance conditions”, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, **39**:1 (1983), 45–54.
- [9] W. A. Majewski, “The detailed balance condition in quantum statistical mechanics”, *J. Math. Phys.*, **25**:3 (1984), 614–616.
- [10] P. Talkner, “The failure of the quantum regression hypothesis”, *Ann. Physics*, **167**:2 (1986), 390–436.
- [11] G. S. Agarwal, “Open quantum Markovian systems and the microreversibility”, *Z. Physik*, **258**:5 (1973), 409–422.
- [12] L. Accardi, K. Imafuku, “Dynamical detailed balance and local KMS condition for non-equilibrium states”, *Internat. J. Modern Phys. B*, **18**:4–5 (2004), 435–467.
- [13] F. Fagnola, R. Quezada, “Two-Photon Absorption and Emission Process”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **8**:4 (2005), 573–591.
- [14] R. Carbone, F. Fagnola, S. Hachicha, “Generic quantum Markov semigroups: the Gaussian gauge invariant case”, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **14**:4 (2007), 425–444.
- [15] L. Accardi, F. Fagnola, S. Hachicha, “Generic q-Markov semigroups and speed of convergence of q -algorithms”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:4 (2006), 567–594.
- [16] K. R. Parthasarathy, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monogr. Math., **85**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1992.
- [17] S. Goldstein, J. M. Lindsay, “KMS-symmetric Markov semigroups”, *Math. Z.*, **219**:4 (1995), 591–608.
- [18] F. Cipriani, “Dirichlet forms and Markovian semigroups on standard forms of von Neumann algebras”, *J. Funct. Anal.*, **147**:2 (1997), 259–300.
- [19] L. Accardi, A. Mohari, “Time Reflected Markov Processes”, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **2**:3 (1999), 397–425.

Ф. Фаньола

Миланский политехникум, Италия

E-mail: franco.fagnola@polimi.it

Поступило

19.10.2007

В. Уманита

Миланский политехникум

E-mail: veronica.umanita@polimi.it