Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Ю. Глазырина, Точное неравенство Маркова–Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q , L_0 на отрезке, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:07:51

Точное неравенство Маркова–Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q , L_0 на отрезке

П. Ю. Глазырина

Изучается неравенство между L_q -средним k -й производной алгебраического многочлена степени $n \geq 1$ и L_0 -средним самого многочлена на отрезке. Ранее автором была найдена точная константа в этом неравенстве при $k = 0$, $q \in [0, \infty]$ и $1 \leq k \leq n$, $q \in \{0\} \cup [1, \infty]$. В настоящей работе предложен новый метод, позволяющий найти значение точной константы при всех $0 \leq k \leq n$, $q \in [0, \infty]$, и, в частности, в неисследованном ранее случае $1 \leq k \leq n$, $q \in (0, 1)$. Выписан порядок роста точной константы по n при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных k , q .

Библиография: 20 названий.

1. Постановка задачи и результаты. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше $n \geq 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В работе изучается неравенство

$$\|P^{(k)}\|_q \leq M_{q,0}(n, k) \|P\|_0, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leq k \leq n, \quad q \in [0, \infty], \quad (1.1)$$

с наилучшей константой $M_{q,0}(n, k)$; здесь и далее

$$\|P\|_q = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |P(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad q \in (0, \infty); \quad (1.2)$$

$$\|P\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |P(t)|, \quad \|P\|_0 = \exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |P(t)| dt \right). \quad (1.3)$$

Функционал $\|P\|_0$ называется L_0 -средним или *геометрическим средним* многочлена P . Известно (см., например, [1]), что если функция f принадлежит $L_{\bar{q}}(-1, 1)$ для некоторого $\bar{q} > 0$ (в частности, $f \in \mathcal{P}_n$), то величина $\|f\|_0$ конечна и $\|f\|_0 = \lim_{q \rightarrow +0} \|f\|_q$.

Таким образом (1.1) является предельным случаем неравенства

$$\|P^{(k)}\|_q \leq M_{q,p}(n, k) \|P\|_p, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 0 \leq k \leq n, \quad q, p \in (0, \infty]. \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00233) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5120.2006.1).

Для $q = p$ оно известно как неравенство Маркова и впервые было установлено при $q = p = \infty$ братьями А. А. и В. А. Марковыми; экстремальными в этом случае являются многочлены Чебышёва первого рода $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $t \in [-1, 1]$, и наилучшая константа есть

$$M_{\infty, \infty}(n, k) = \|T_n^{(k)}\|_{\infty} = T_n^{(k)}(1).$$

При $q \neq p$, $k = 0$ его называют неравенством Никольского. Неравенству Маркова–Никольского (1.4) посвящено большое количество работ, хороший обзор результатов содержится в [2]. Ниже приведены некоторые из них. В настоящее время известен порядок роста величины $M_{q,p}(n, k)$ по n при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных $k \geq 0$, $q, p \in (0, \infty]$:

$$M_{q,p}(n, k) \asymp \begin{cases} n^{2k+2/p-2/q}, & \text{если } k > 2/q - 2/p, \\ n^k (\ln n)^{1/q-1/p}, & \text{если } k = 2/q - 2/p, \\ n^k, & \text{если } k < 2/q - 2/p. \end{cases}$$

Частные случаи (1.4) были исследованы Хилле, Сеге и Тамаркиным [3], Бари [4], Тиманом [5; п. 4.9.6]. Для $0 \leq k \leq n$, $q, p \in [1, \infty]$ порядок роста $M_{q,p}(n, k)$ нашли Даугавет и Рафальсон [6]; общий случай установлен Ивановым [7].

Точные значения величины $M_{q,p}(n, k)$ найдены лишь в некоторых случаях. Так, Боянов [8] доказал, что $M_{q,\infty}(n, 1) = \|T'_n\|_q$, $q \in [1, \infty)$; Лабель [9] решил задачу при $q = \infty$, $p = 2$, $0 \leq k \leq n$; Коркин и Золотарев [10] при $p = q = 1$, $k = n$.

Неравенство (1.1) было исследовано автором в работах [11]–[13] соответственно для значений $k = 0$, $q \in [0, \infty]$; $1 \leq k \leq n$, $q = 0$; $1 \leq k \leq n$, $q \in [1, \infty]$. Случай $1 \leq k \leq n$, $q \in (0, 1)$ оставался неизученным. Основная трудность здесь связана с тем, что при $q < 1$ для функционала $\|\cdot\|_q$ не выполняется неравенство треугольника. В настоящей работе предложен новый метод, который позволяет получить значения величины $M_{q,0}(n, k)$ при всех $0 \leq k \leq n$, $q \in [0, \infty]$, в том числе и в неисследованном ранее случае $1 \leq k \leq n$, $q \in (0, 1)$.

ТЕОРЕМА 1. *При любых $0 \leq k \leq n$, $q \in [0, \infty]$ существует единственное $z^* = z^*(q, n, k) \in [0, 1)$ такое, что многочлены $c(t - z^*)^n$, $c(t + z^*)^n$, $c \in \mathbb{C}$, и только они являются экстремальными в неравенстве (1.1). При этом*

а) *если $(n - k)^2 q \leq k$, то $z^* = 0$ и*

$$M_{0,0}(n, k) = \frac{n! e^k}{(n - k)!}, \quad (1.5)$$

$$M_{q,0}(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!} \frac{e^n}{((n - k)q + 1)^{1/q}}, \quad q > 0; \quad (1.6)$$

б) *если $(n - k)^2 q > k$, то $z^* = (x^* - 1)/(x^* + 1)$, где $x^* = x^*(q, n, k)$ – (единственный) корень уравнения*

$$\frac{n - k}{n} + \frac{1}{nq} = \left(\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x^{(n-k)q} - 1} \right) \ln x, \quad x > 1, \quad \text{при } q < \infty, \quad (1.7)$$

$$\frac{n - k}{n} = \frac{x}{x + 1} \ln x, \quad x > 1, \quad \text{при } q = \infty, \quad (1.8)$$

причем

$$M_{q,0}(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(x^* + 1)^k}{2^k} \frac{e^n}{(x^*)^{x^*n/x^*+1}} \left(\frac{x^{*(n-k)q} - 1}{nq \ln x^*} \right)^{1/q}, \quad q < \infty, \quad (1.9)$$

$$M_{\infty,0}(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{e^k (1 + x^*)^k x^{*n-k}}{2^k}. \quad (1.10)$$

Теорема 1 в частности показывает, что наилучшая константа $M_{q,0}(n, k)$ довольно сложно зависит от параметров n , k и q . В следующем утверждении выписан порядок поведения $M_{q,0}(n, k)$ по n при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных k , q .

ТЕОРЕМА 2. *Порядок роста величины $M_{q,0}(n, k)$ при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных $k \geq 0$, $q \in [0, \infty]$ описывается соотношениями¹*

$$M_{q,0}(n, k) \asymp \begin{cases} (M_{\infty,0}(1, 0))^n n^{k-1/q}, & \text{если } q > 0, \\ n^k, & \text{если } q = 0; \end{cases}$$

константа $M_{\infty,0}(1, 0)$ приближенно равна $3.59112147 \dots$.

Теорема 1 в настоящей работе доказана для $k \geq 1$, $q \in (0, \infty)$. Как отмечено выше, случаи $k = 0$, $q \in [0, \infty]$; $k > 0$, $q = 0$ и $q = \infty$ уже рассмотрены автором ранее. Они являются в некотором смысле предельными, поэтому приведенные ниже рассуждения требуют небольших изменений, отвлекаться на которые по ходу доказательства мы считаем нецелесообразным. Напротив, для $q \in (0, 1)$ и $q \in [1, \infty)$ доказательство осуществляется единым способом. Кроме того, метод доказательства является более прозрачным, чем использованный автором в [13]. Поэтому все дальнейшие утверждения приводятся для $q \in (0, \infty)$, $k \geq 1$.

Работа имеет следующую структуру. Пункты 2, 3 посвящены доказательству теоремы 1. В п. 2 устанавливается, что любой экстремальный многочлен неравенства (1.1) имеет вид $P^*(t) = c(t - z^*)^n$, $z^* \in [-1, 1]$. В п. 3 изучается корень z^* экстремального многочлена. На этом доказательство теоремы 1 завершается. В конце п. 3 указаны изменения, которые необходимо сделать в доказательстве при $k = 0$ и/или $q = 0$, $q = \infty$. В п. 4 установлена теорема 2. В п. 5 дано новое доказательство одного известного неравенства для корней многочлена и его производной, которое применяется в п. 2.

2. Сведение задачи на класс многочленов вида $P(t) = (t - z)^n$, $z \in [-1, 1]$. Рассмотрим сначала неравенство (1.1) на множестве $\mathcal{P}_n^\diamond$ – многочленов, все n корней которых принадлежат отрезку $[-1, 1]$ и старший коэффициент равен 1. Основным результатом здесь будет состоять в том, что все нули экстремального многочлена во множестве $\mathcal{P}_n^\diamond$ совпадают между собой, т.е. экстремальный многочлен обязательно имеет вид $P(t) = (t - z)^n$, $z \in [-1, 1]$. Для удобства дальнейших формулировок и ссылок отметим сразу, что для многочленов $P(t) = (t - z)^n$, $z \in [-1, 1]$, имеем

$$\frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} = \frac{n!}{(n-k)!} \psi(z), \quad (2.1)$$

¹Пусть $B(n) \neq 0$ для всех натуральных n . Запись $A(n) \asymp B(n)$ при $n \rightarrow \infty$ означает, что найдутся положительные константы c_1 и c_2 со свойством $c_1 \leq A(n)/B(n) \leq c_2$. Если $A(n)/B(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то будем писать $A(n) \sim B(n)$.

где

$$\psi(z) = \psi_{n,k,q}(z) = \frac{\|t - z\|_{q(n-k)}^{n-k}}{\|t - z\|_0^n}, \quad z \in [-1, 1]. \quad (2.2)$$

Также выпишем несколько формул, получающихся непосредственным вычислением, которые мы будем применять в доказательствах:

$$\|\cdot - z\|_0 = \exp\left(\frac{1+z}{2} \ln(1+z) + \frac{1-z}{2} \ln(1-z) - 1\right), \quad |z| < 1; \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dz} \|\cdot - z\|_0 = \|\cdot - z\|_0 \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad |z| < 1; \quad (2.4)$$

$$\|\cdot - z\|_q = \left(\frac{(1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}}{2(q+1)}\right)^{1/q}, \quad |z| \leq 1, \quad q \in (0, \infty); \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dz} \|\cdot - z\|_q = \|\cdot - z\|_q \frac{q+1}{q} \frac{(1+z)^q - (1-z)^q}{(1+z)^{q+1} + (1-z)^{q+1}}, \quad |z| \leq 1, \quad q \in (0, \infty). \quad (2.6)$$

ЛЕММА 1. Для любых $1 \leq k < n$, $q \in (0, \infty)$ имеет место равенство

$$\max_{P \in \mathcal{P}_n^\circ} \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} = \frac{n!}{(n-k)!} \max_{z \in [0,1]} \psi_{n,k,q}(z). \quad (2.7)$$

Более того, максимум в левой части (2.7) достигается лишь на многочленах $P^*(t) = (t \pm z^*)^n$, где z^* – точка максимума функции $\psi_{n,k,q}$ на отрезке $[0, 1]$.

Доказательство леммы 1 будет основано на следующем утверждении.

ТЕОРЕМА А (Н. Г. де Брюйн). Предположим, что

- 1) корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ принадлежат некоторому промежутку I вещественной оси и $z'_1, \dots, z'_{n-1}$ – корни его производной P' ;
- 2) функция φ непрерывна и выпукла (вниз) на I .

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{n-1} \sum_{\ell=1}^{n-1} \varphi(z'_\ell) \leq \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \varphi(z_\ell). \quad (2.8)$$

Если φ строго выпукла, то равенство в (2.8) имеет место только в том случае, когда все корни z_j равны между собой.

Это утверждение установлено де Брюйном в [14]. В статье [15] де Брюйн и Шпрингер выдвинули гипотезу, что неравенство (2.8) справедливо для любого многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ и выпуклой функции $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Недавно гипотеза де Брюйна–Шпрингера была независимо доказана Перейра [16] и Маламудом [17]. В п. 5 настоящей работы приведено отличное от [14] доказательство теоремы А с помощью принципа мажоризации.

Следующая лемма является следствием теоремы А.

ЛЕММА 2. Для $P \in \mathcal{P}_n^\circ$ и $1 \leq k < n$ справедливо неравенство

$$\|P^{(k)}\|_0 \leq \frac{n!}{(n-k)!} \|P\|_0^{(n-k)/n}. \quad (2.9)$$

Равенство достигается на многочленах вида $P(t) = (t - z)^n$, $z \in [-1, 1]$, и только на них.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_1, \dots, z_n \in [-1, 1]$ – нули многочлена $P \in \mathcal{P}_n^\diamond$, а $z_1^{(k)}, \dots, z_{n-k}^{(k)}$ – нули производной $P^{(k)}$ порядка k многочлена P . В силу мультипликативности функционала $\|\cdot\|_0$ неравенство (2.9) в этих обозначениях принимает вид

$$\left(\prod_{\ell=1}^{n-k} \|t - z_\ell^{(k)}\|_0 \right)^{1/(n-k)} \leq \left(\prod_{\ell=1}^n \|t - z_\ell\|_0 \right)^{1/n}. \quad (2.10)$$

Перейдем от мультипликативного неравенства к аддитивному. С этой целью введем функцию

$$\varphi(z) = \ln(\|t - z\|_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt \quad (2.11)$$

и прологарифмируем (2.10). В результате получаем неравенство

$$\frac{1}{n-k} \sum_{\ell=1}^{n-k} \varphi(z_\ell^{(k)}) \leq \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \varphi(z_\ell), \quad (2.12)$$

эквивалентное (2.9). Используя формулу (2.3), нетрудно проверить, что функция 2.11 непрерывна и строго выпукла вниз на $[-1, 1]$. Последовательно применяя теорему А к многочленам $P^{(k-1)}, \dots, P$, получаем цепочку неравенств

$$\frac{1}{n-k} \sum_{\ell=1}^{n-k} \varphi(z_\ell^{(k)}) \leq \frac{1}{n-k+1} \sum_{\ell=1}^{n-k+1} \varphi(z_\ell^{(k-1)}) \leq \dots \leq \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \varphi(z_\ell).$$

Тем самым, неравенство (2.12), а значит, и (2.9) доказаны. В силу строгой выпуклости функции φ равенство достигается только в случае, когда все корни P равны между собой. Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Для многочлена $P \in \mathcal{P}_n^\diamond$ оценим сверху отношение $\|P^{(k)}\|_q / \|P\|_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} &= \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P^{(k)}\|_0^{n/(n-k)}} \cdot \frac{\|P^{(k)}\|_0^{n/(n-k)}}{\|P\|_0} \\ &\leq \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)^{-k/(n-k)} \max_{Q \in \mathcal{P}_{n-k}^\diamond} S_1(Q) \cdot \max_{Q \in \mathcal{P}_n^\diamond} S_2(Q), \quad (2.13) \\ S_1(Q) &= \frac{\|Q\|_q}{\|Q\|_0^{n/(n-k)}}, \quad S_2(Q) = \frac{\|Q^{(k)}\|_0^{n/(n-k)}}{\|Q\|_0}. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 имеем

$$\max_{Q \in \mathcal{P}_n^\diamond} S_2(Q) = \left(\frac{n!}{(n-k)!} \right)^{n/(n-k)}, \quad (2.14)$$

причем максимум достигается только на многочленах вида $Q(t) = (t-z)^n$, $z \in [-1, 1]$.

Найдем максимум S_1 . Рассмотрим произвольный многочлен

$$Q(t) = \prod_{\ell=1}^{n-k} (t - z_\ell) \in \mathcal{P}_{n-k}^\diamond.$$

Для краткости положим $Q_\ell(t) = t - z_\ell$; в этих обозначениях $Q = \prod_{\ell=1}^{n-k} Q_\ell$. Применяя неравенство Гёльдера для произведения $n - k$ функций $Q_1^{q(n-k)}, \dots, Q_{n-k}^{q(n-k)}$ с одним и тем же для всех множителей показателем $1/(n - k)$, имеем

$$\begin{aligned} \|Q\|_q &= \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \prod_{\ell=1}^{n-k} |Q_\ell|^{q(n-k)/(n-k)} dt \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{2^{1/q}} \prod_{\ell=1}^{n-k} \left(\int_{-1}^1 |Q_\ell|^{q(n-k)} dt \right)^{1/q(n-k)} = \prod_{\ell=1}^{n-k} \|Q_\ell\|_{q(n-k)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_1(Q) &= \frac{\|Q\|_q}{\|Q\|_0^{n/(n-k)}} \leq \frac{\prod_{\ell=1}^{n-k} \|Q_\ell\|_{q(n-k)}}{\prod_{\ell=1}^{n-k} \|Q_\ell\|_0^{n/(n-k)}} = \prod_{\ell=1}^{n-k} \frac{\|Q_\ell\|_{q(n-k)}}{\|Q_\ell\|_0^{n/(n-k)}} \\ &\leq \max_{z \in [-1, 1]} \frac{\|t - z\|_{q(n-k)}^{n-k}}{\|t - z\|_0^n} = \max_{z \in [-1, 1]} \psi(z). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Первое из неравенств в формуле (2.16) обращается в равенство только в случае $Q_1 \equiv \dots \equiv Q_n$, т.е. $Q(t) = (t - z)^{n-k}$. Второе, в силу четности $\|t - z\|_{q(n-k)}$ и $\|t - z\|_0$ по z , в том и только том случае, если $z = \pm z^*$, где z^* – точка максимума функции ψ на отрезке $[0, 1]$. Эти факты влекут равенство

$$\max_{Q \in \mathcal{P}_{n-k}^\circ} S_1(Q) = \max_{z \in [0, 1]} \psi(z). \quad (2.17)$$

При этом максимум достигается только на многочленах $Q(t) = (t \pm z^*)^{n-k}$.

Подставляя теперь (2.14) и (2.17) в оценку (2.13), имеем

$$\frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} \leq \frac{n!}{(n - k)!} \max_{z \in [0, 1]} \psi(z) \quad \forall P \in \mathcal{P}_n^\circ. \quad (2.18)$$

Учитывая, что на многочленах $P^*(t) = (t \pm z^*)^n$ достигается максимум в (2.14), а на многочленах $((n - k)!/n!)P^{*(k)}(t) = (t \pm z^*)^{n-k}$ – в (2.17), заключаем, что на многочленах P^* и только на них неравенство (2.18) обращается в равенство. Лемма 1 доказана.

Докажем теперь, что любой экстремальный многочлен неравенства (1.1) принадлежит множеству $\mathcal{P}_n^\circ$ (с точностью до мультипликативной константы). Этот факт вместе с леммой 1 будет означать, что справедливо такое утверждение.

ТЕОРЕМА 1'. *Для любых $1 \leq k \leq n$, $q \in (0, \infty)$ имеет место равенство*

$$M_{q,0}(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!} \max_{z \in [0, 1]} \psi_{n,k,q}(z). \quad (2.19)$$

Многочлены $P^(t) = c(t \pm z^*)^n$, где z^* – точка максимума функции $\psi_{n,k,q}$ на отрезке $[0, 1]$, $c \in \mathbb{C}$, и только они являются экстремальными в неравенстве (1.1).*

Для доказательства теоремы 1' нам понадобится решение задачи о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля относительно L_0 -среднего. Пусть $\mathcal{P}_n^1$ есть множество многочленов $P \in \mathcal{P}_n$ степени n со старшим коэффициентом, равным 1. При $n \geq 1$ положим

$$\nu(n) = \min\{\|P\|_0 : P \in \mathcal{P}_n^1\}; \quad (2.20)$$

величину 2.20 можно также записать в виде $\nu(n) = \min\{\|t^n - P_{n-1}\|_0 : P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$. Следующее утверждение установлено в [12], однако для полноты изложения мы приведем здесь его доказательство.

ЛЕММА 3. *При любом $n \geq 1$ имеет место равенство $\nu(n) = e^{-n}$ и единственным экстремальным в задаче (2.20) является многочлен t^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный многочлен $P(t) = \prod_{\ell=1}^n (t - z_\ell)$, $z_\ell \in \mathbb{C}$, из $\mathcal{P}_n^1$. Поскольку $\|P\|_0 = \prod_{\ell=1}^n \|t - z_\ell\|_0$, для доказательства леммы достаточно убедиться, что функция $u(z) = \|t - z\|_0 = \exp(1/2 \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt)$ переменного z в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ достигает наименьшего значения в единственной точке $z = 0$, и вычислить это значение. Предположим, что $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ и $x = x(z)$ — точка отрезка $[-1, 1]$, на которой реализуется (евклидово) расстояние от точки z до отрезка. Тогда легко понять, что для всех $t \in [-1, 1]$ выполняется неравенство $|t - z| > |t - x|$, а следовательно, $u(z) > u(x)$. С помощью формулы (2.3) нетрудно проверить, что функция $u(z)$ четная на отрезке $[-1, 1]$ и возрастает по $|z| \in [0, 1]$. Поэтому, действительно, минимум функции u в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ достигается в единственной точке $z = 0$ и к тому же $u(0) = \exp(-1)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы, очевидно, эквивалентно утверждению теоремы 1' для значений $k = n \geq 1$.

Для константы $M_{q,0}(n, k)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} M_{q,0}(n, k) &= \sup \left\{ \frac{\|P^{(k)}\|_q}{\|P\|_0} : P \in \mathcal{P}_n, P_n \neq \text{const} \right\} \\ &= \sup \left\{ \left(\frac{1}{2} \Lambda(P) \right)^{1/q} : P \in \mathcal{P}_n, P_n \neq \text{const} \right\}, \quad (2.21) \\ \Lambda(P) &= \frac{2\|P^{(k)}\|_q^q}{\|P\|_0^q} = \frac{\int_{-1}^1 |P^{(k)}(t)|^q dt}{\|P\|_0^q}. \end{aligned}$$

Предположим, что многочлен P имеет степень n , $A_n \neq 0$ — старший коэффициент P , а $z_1, \dots, z_n$ — его корни, и, значит, $P(t) = A_n \prod_{j=1}^n (t - z_j)$. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество размещений из $\{1, \dots, n\}$ по k элементов без повторений. Производную $P^{(k)}$ можно представить в виде

$$P^{(k)}(t) = A_n \prod_{j=1}^n (t - z_j) \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{1}{\prod_{j \in K} (t - z_j)}.$$

Выделим $n - m$ корней $z_{m+1}, \dots, z_n$ многочлена P и запишем отношение $\Lambda(P)$ следующим образом:

$$\Lambda(P) = \frac{\int_{-1}^1 |P^{(k)}|^q dt}{\|P\|_0^q} = \frac{\int_{-1}^1 \left| \prod_{j=1}^m (t - z_j) \prod_{j=m+1}^n \left(\frac{t}{z_j} - 1 \right) \sum_{K \in \mathcal{K}} \frac{1}{\prod_{j \in K} (t - z_j)} \right|^q dt}{\prod_{j=1}^m \|t - z_j\|_0^q \prod_{j=m+1}^n \|t/z_j - 1\|_0^q}. \quad (2.22)$$

Если корни $z_{m+1}, \dots, z_n$ устремить к ∞ , то в силу (2.22) отношение $\Lambda(P)$ стремится к $\Lambda(P_m)$ для многочлена $P_m(t) = \prod_{k=1}^m (t - z_k)$ порядка m . В связи с этим фактом представляется естественным следующее соглашение. В том случае, когда точная степень многочлена $P \in \mathcal{P}_n$ есть $m < n$, будем считать, что точка $z = \infty$ является корнем P порядка $n - m$. Таким образом, многочлены $P \in \mathcal{P}_n$ определяют и определяются (с точностью до мультипликативной константы) набором $Z = (z_1, \dots, z_n)$ из n корней, принадлежащих расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что для $k \geq 1$ можно исключить из рассмотрения многочлены, тождественно равные константе, так что точка $Z = (z_1, \dots, z_n)$ будет отлична от точки $\infty^n = (\infty, \dots, \infty)$, у которой все n координат есть ∞ .

Значение $\Lambda(P)$ однозначно определяется по соответствующему набору Z ; и далее, когда это будет удобно, мы будем писать $\Lambda(Z)$ вместо $\Lambda(P)$. Равенство (2.21) в новых обозначениях принимает вид

$$M_{q,0}(n, k) = \sup \left\{ \left(\frac{1}{2} \Lambda(Z) \right)^{1/q} : Z \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n \right\}. \quad (2.23)$$

Функция $\Lambda(Z)$ на множестве $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$ симметрическая, непрерывная и при $k \geq 1$ обладает свойством $\Lambda(Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty^n$. Поэтому верхняя грань в (2.23) достигается в некоторой точке Z^* из $\overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1'. Зафиксируем некоторые $k \geq 1$, $q \in (0, \infty)$. Докажем теорему 1' индукцией по n ($n \geq k$). В силу замечания к лемме 3 теорема 1' верна на множестве многочленов степени $n = k$. Допустим, утверждение теоремы 1' имеет место на множестве $\mathcal{P}_{n-1}$, $n - 1 \geq k$. Докажем, что тогда утверждение теоремы 1' имеет место и на $\mathcal{P}_n$.

Пусть $P^* \in \mathcal{P}_n$ — экстремальный многочлен неравенства (1.1) и $Z^* = (z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n \setminus \infty^n$ — набор его нулей или, что тоже самое, Z^* есть точка максимума функции Λ в $\overline{\mathbb{C}}^n$. В силу леммы 1 достаточно лишь показать, что все нули P^* принадлежат $[-1, 1]$, т.е. $Z^* \in [-1, 1]^n$.

Убедимся сначала, что ни одна из координат Z^* не равняется ∞ . В самом деле, если некоторый корень $z_j = \infty$, то соответствующий многочлен будет иметь степень не выше $n - 1$ и являться экстремальным в (1.1) на множестве $\mathcal{P}_n$, а следовательно, и на $\mathcal{P}_{n-1}$. Тогда по предположению индукции P^* должен иметь вид $P^*(t) = c(t - z)^{n-1}$, $z \in [-1, 1]$. Рассмотрим наряду с P^* многочлен $P(t) = (t - z)^n \in \mathcal{P}_n$. Величина $\|t - z\|_q$ (строго) возрастает по $q \in [0, \infty]$, поэтому имеем цепочку соотношений

$$\Lambda(P^*) = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \frac{2\|(t-z)^{n-1-k}\|_q^q}{\|(t-z)^{n-1}\|_0^q} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \frac{2\|t-z\|_{(n-1-k)q}^{(n-1-k)q}}{\|t-z\|_{(n-1)q}^{(n-1)q}}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \frac{2\|t-z\|_{(n-k)q}^{(n-1-k)q}}{\|t-z\|_0^{(n-1)q}} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \frac{2\|t-z\|_{(n-k)q}^{(n-k)q}}{\|t-z\|_0^{nq}} \frac{\|t-z\|_0^q}{\|t-z\|_{(n-k)q}^q} \\
 &< \frac{n!}{(n-k)!} \frac{2\|t-z\|_{(n-k)q}^{(n-k)q}}{\|t-z\|_0^{nq}} = \Lambda(P).
 \end{aligned}$$

Следовательно, P^* не является экстремальным в (1.1) на множестве $\mathcal{P}_n$, что противоречит исходному предположению. Итак, действительно, $Z^* \in \mathbb{C}^n$.

Докажем теперь, что все координаты Z^* принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Для этого выделим некоторый номер j и рассмотрим функцию

$$\lambda(z) = \lambda_j(z) = \Lambda(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_n) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n \|t - z_\ell\|_0^q$$

(одного) переменного $z \in \mathbb{C}$. Точка $z = z_j$ является точкой максимума функции λ . Ниже мы покажем, что λ субгармоническая в области $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (см., например, [18; гл. III, § 5]). Отсюда в силу непрерывности λ в $\overline{\mathbb{C}}$ и принципа максимума для субгармонических функций [18; гл. III, § 6] следует, что λ либо постоянна в D , либо достигает своего максимума только на границе области D , т.е. отрезке $[-1, 1]$ или в бесконечно удаленной точке. Функция λ не может достигать максимума в ∞ , поскольку в этом случае точка $(z_1, \dots, z_{j-1}, \infty, z_{j+1}, \dots, z_n)$ была бы точкой максимума Λ , что по доказанному выше невозможно. Но тогда функция λ , как субгармоническая и отличная от тождественной константы в $\mathbb{C}$, достигает максимума в $\overline{\mathbb{C}}$ обязательно на отрезке $[-1, 1]$. Отсюда следует, что каждая из координат точки максимума $Z^* = (z_1, \dots, z_n)$ функции Λ в $\overline{\mathbb{C}}^n$ принадлежит отрезку $[-1, 1]$, т.е. $Z^* \in [-1, 1]^n$. Этот факт означает, что все n корней экстремального полинома неравенства (1.1) принадлежат отрезку $[-1, 1]$.

Докажем, что λ является субгармонической в $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Для этого возьмем произвольную точку $z_0 \in D$ и рассмотрим открытый шар $B(z_0, r_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\}$ с центром z_0 радиуса r_0 такой, что его замыкание лежит в D . Построим последовательность субгармонических функций, равномерно сходящуюся к $\lambda(z)$ в $B(z_0, r_0)$. Отсюда будет следовать, что $\lambda(z)$ субгармоническая в $B(z_0, r_0)$ [18; гл. III, § 6], а значит, и в D .

Положим для краткости

$$Q(t; z) = \frac{d^k}{dt^k} ((t - z_1) \cdots (t - z_{j-1}) \cdot (t - z) \cdot (t - z_{j+1}) \cdots (t - z_n)).$$

В этих обозначениях

$$\lambda(z) = \frac{\int_{-1}^1 |Q(t; z)|^q dt}{\exp\left(\frac{q}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt\right)}.$$

Функция $\ln |t - z|$ непрерывна как функция двух переменных t и z на декартовом произведении $[-1, 1] \times \overline{B}(z_0, r_0)$ отрезка $[-1, 1]$ и замыкания круга $B(z_0, r_0)$. Поэтому

интеграл $\int_{-1}^1 \ln |t - z| dt$ можно представить как равномерный по $z \in B(z_0, r_0)$ предел при $N \rightarrow \infty$ интегральных сумм

$$\sigma_N(z) = \sum_{\ell=1}^N \ln \left| -1 + \frac{2\ell}{N} - z \right| \frac{2}{N}.$$

Тогда

$$\exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{2} \sigma_N(z) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^N \left| -1 + \frac{2\ell}{N} - z \right|^{1/N}, \quad (2.24)$$

причем предел также равномерный по z и предельная функция отделена от нуля.

Имеем

$$\lambda(z) = \frac{\int_{-1}^1 |Q(t; z)|^q dt}{\exp \left(\frac{q}{2} \int_{-1}^1 \ln |t - z| dt \right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \left| \frac{Q^N(t; z)}{\prod_{\ell=1}^N \left(-1 + \frac{2\ell}{N} - z \right)} \right|^{q/N} dt.$$

Положим

$$\varphi_N(t, z) = \frac{Q^N(t; z)}{\prod_{\ell=1}^N \left(-1 + \frac{2\ell}{N} - z \right)}, \quad \lambda_N(z) = \int_{-1}^1 |\varphi_N(t, z)|^{q/N} dt.$$

Для любого N функция $\varphi_N(t, z)$ аналитична по z в шаре $B(z_0, r_0)$, а значит, [18; гл. III, § 7] функция $|\varphi_N(t, z)|^{q/N}$ субгармоническая в этой области. Отсюда следует, что функция $\lambda_N(z)$ также будет субгармонической в $B(z_0, r_0)$. Более того, в силу свойства (2.24) и ограниченности $Q(t; z)$ на множестве $[-1, 1] \times B(z_0, r_0)$ последовательность $\{\lambda_N(z)\}_{N=1}^\infty$ равномерно сходится к функции $\lambda(z)$ в $B(z_0, r_0)$. Таким образом, субгармоничность функции λ установлена. Теорема 1' полностью доказана.

3. Исследование корня экстремального многочлена. Завершение доказательства теоремы 1. В следующем утверждении изучаются точки максимума на $[0, 1]$ функции $\psi = \psi_{n,k,q}$, определенной формулой (2.2). Это утверждение завершает исследование неравенства (1.1) на $\mathcal{P}_n$.

ЛЕММА 4. Для $1 \leq k \leq n$, $q \in (0, \infty)$ функция (2.2) имеет на отрезке $[0, 1]$ единственную точку максимума $z^* = z^*(n, k, q)$. При этом

- а) если $(n - k)^2 q \leq k$, то $z^* = 0$;
- б) если $(n - k)^2 q > k$, то $z^* \in (0, 1)$ и $z^* = (x^* - 1)/(x^* + 1)$, где $x^* = x^*(q, n, k)$ – (единственный) корень уравнения

$$\frac{n - k}{n} + \frac{1}{nq} = \left(\frac{x}{x + 1} + \frac{1}{x^{(n-k)q} - 1} \right) \ln x, \quad x > 1. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сразу, что при $k = n$ выполняется условие а) и утверждение вытекает из леммы 3. Далее считаем, что $1 \leq k < n$. Как видно из формул (2.5), (2.6) функция ψ непрерывна на $[0, 1]$ и дифференцируема на $[0, 1)$. Поэтому достаточно показать, что найдется точка $z^* = z^*(n, k, q) \in [0, 1)$ со свойствами

$$\psi'(z) > 0, \quad z \in (0, z^*), \quad \psi'(z) < 0, \quad z \in (z^*, 1); \quad (3.2)$$

если $z^* = 0$, то считаем, что условие (3.2) принимает вид $\psi'(z) < 0$, $z \in (z^*, 1)$. Для краткости введем обозначение $\tilde{q} = (n - k)q$. Пользуясь формулами (2.4)–(2.6), находим

$$\psi'(z) = \frac{\|t - z\|_{\tilde{q}}^{n-k}}{\|t - z\|_0^n} \left(\frac{(n - k)(\tilde{q} + 1)}{\tilde{q}} \frac{(1 + z)^{\tilde{q}} - (1 - z)^{\tilde{q}}}{(1 + z)^{\tilde{q}+1} + (1 - z)^{\tilde{q}+1}} - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right) \right),$$

$z \in [0, 1)$. Знак ψ' совпадает со знаком выражения

$$\tilde{\kappa}(z) = 2C \frac{(1 + z)^{\tilde{q}} - (1 - z)^{\tilde{q}}}{(1 + z)^{\tilde{q}+1} + (1 - z)^{\tilde{q}+1}} - \ln \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right), \quad C = \frac{(n - k)(\tilde{q} + 1)}{n\tilde{q}}.$$

Для удобства дальнейших исследований сделаем замену переменной

$$z = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad x \in [1, \infty), \quad (3.3)$$

и умножим получившееся выражение на $x^{\tilde{q}+1} + 1$; в результате получаем

$$\kappa(x) = (x^{\tilde{q}+1} + 1)\tilde{\kappa} \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right) = C(x^{\tilde{q}} - 1)(x + 1) - (x^{\tilde{q}+1} + 1) \ln x. \quad (3.4)$$

В терминах функции $\kappa(x)$ условия (3.2) формулируются аналогично: найдется точка $x^* \geq 1$ со свойствами

$$\kappa(x) > 0, \quad x \in (1, x^*), \quad \kappa(x) < 0, \quad x \in (x^*, \infty). \quad (3.5)$$

Имеем

$$\kappa'(x) = C((\tilde{q} + 1)x^{\tilde{q}} + \tilde{q}x^{\tilde{q}-1} - 1) - (\tilde{q} + 1)x^{\tilde{q}} \ln x - x^{\tilde{q}} - \frac{1}{x}.$$

Чтобы определить знак κ' , произведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa'(x)}{x^{\tilde{q}}} &= C \left(\tilde{q} + 1 + \frac{\tilde{q}}{x} - \frac{1}{x^{\tilde{q}}} \right) - (\tilde{q} + 1) \ln x - 1 - \frac{1}{x^{\tilde{q}+1}}, \\ \left(\frac{\kappa'(x)}{x^{\tilde{q}}} \right)' &= C \left(\frac{-\tilde{q}}{x^2} + \frac{\tilde{q}}{x^{\tilde{q}+1}} \right) - \frac{\tilde{q} + 1}{x} + \frac{\tilde{q} + 1}{x^{\tilde{q}+2}} \\ &= \frac{(n - k)(\tilde{q} + 1)}{n} \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^{\tilde{q}+1}} \right) - \frac{\tilde{q} + 1}{x} + \frac{\tilde{q} + 1}{x^{\tilde{q}+2}} \\ &\leq (\tilde{q} + 1) \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{\tilde{q}+1}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^{\tilde{q}+2}} \right) \leq 0; \end{aligned}$$

следовательно, $\kappa'(x)/x^{\tilde{q}}$ убывает. Далее, находим

$$\left. \frac{\kappa'(x)}{x^{\tilde{q}}} \right|_{x=1} = 2 \left(\frac{(n-k)(\tilde{q}+1)}{n} - 1 \right) = \frac{2((n-k)^2q - k)}{n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa'(x)}{x^{\tilde{q}}} = -\infty, \quad (3.6)$$

$$\kappa(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa(x) = -\infty.$$

Если $\kappa'(x)/x^{\tilde{q}}|_{x=1} \leq 0$, т.е. $(n-k)^2q \leq k$, то на луче $(1, +\infty)$ функция $\kappa'(x)/x^{\tilde{q}} < 0$; следовательно, $\kappa'(x) < 0$. Поскольку $\kappa(1) = 0$, $\kappa(x) < 0$ для $x \in (1, \infty)$; отсюда заключаем, что $x^* = 1$, $z^* = 0$.

Если же $\kappa'(x)/x^{\tilde{q}}|_{x=1} > 0$, т.е. $(n-k)^2q > k$, то на $[1, +\infty)$ функция $\kappa'(x)/x^{\tilde{q}}$, а значит, и $\kappa'(x)$, меняет знак с «+» на «-» единственный раз в некоторой точке $\bar{x}$. Поскольку $\kappa(1) = 0$, функция $\kappa(x)$ возрастает на $[1, \bar{x}]$ от 0 до $\kappa(\bar{x}) > 0$ и убывает на $[\bar{x}, \infty)$ от $\kappa(\bar{x})$ до $-\infty$. Поэтому функция $\kappa(x)$ на промежутке $[1, \infty)$ меняет знак с «+» на «-» один раз в некоторой точке $x^* = x^*(n, k, q) \in (\bar{x}, \infty)$. Точка x^* является решением уравнения $\kappa(x) = 0$, т.е.

$$C(x^{\tilde{q}} - 1)(x + 1) = (x^{\tilde{q}+1} + 1) \ln x. \quad (3.7)$$

После деления обеих частей на $(x^{\tilde{q}} - 1)(x + 1)$ последнее уравнение преобразуется к виду (3.1). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 4 видно, что в случае $(n-k)^2q > k$ имеем $\kappa'(x) < 0$ для $x \geq x^*$.

Теорема 1 теперь получается объединением результатов теоремы 1' и леммы 4. Для завершения доказательства остается лишь получить представления (1.6) и (1.9) величины $M_q(n, k)$. Для этого по формулам (2.3) и (2.5) нужно вычислить $\psi(0)$, если выполняется предположение а) и $\psi(z^*)$, $z^* = (x^* - 1)/(x^* + 1)$, если выполняется предположение б); в последнем случае необходимо также учесть равенство (3.1), которому удовлетворяет точка x^* . Теорема 1 доказана.

Значения величин $M_{q,0}(n, k)$ при $q = 0$ и $q = \infty$ можно получить с помощью предельного перехода. Однако, чтобы найти экстремальные многочлены, требуется повторить все доказательство со следующими изменениями. При $q = 0$ представление (2.21) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} M_{0,0}(n, k) &= \sup \left\{ \frac{\|P^{(k)}\|_0}{\|P\|_0} : P \in \mathcal{P}_n, P_n \not\equiv \text{const} \right\} \\ &= \sup \left\{ \exp \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{P^{(k)}(t)}{P(t)} \right| dt \right) : P \in \mathcal{P}_n, P_n \not\equiv \text{const} \right\} \end{aligned}$$

и положить

$$\Lambda(P) = \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{P^{(k)}(t)}{P(t)} \right| dt,$$

а при $q = \infty$ соответственно

$$M_{\infty,0}(n, k) = \sup \{ \Lambda(P) : P \in \mathcal{P}_n, P_n \not\equiv \text{const} \}, \quad \Lambda(P) = \frac{\|P^{(k)}\|_\infty}{\|P\|_0}.$$

В случае $k = 0$, $q > 0$ свойство $\Lambda(Z) \rightarrow 0$ при $Z \rightarrow \infty^n$ следует заменить на $\Lambda(Z) \rightarrow 1$ при $Z \rightarrow \infty^n$.

4. Порядок роста величины $M_{q,0}(n, k)$ по n (доказательство теоремы 2).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится дополнительное исследование поведения корня $z^* = z^*(q, 1, 0)$ экстремального многочлена неравенства (1.1) при $n = 1$, $k = 0$ как функции переменной $q \in (0, \infty]$. В данном случае мы находимся в условиях пункта б) теоремы 1. Согласно этой теореме корень z^* представляется в виде $z^* = (x^* - 1)/(x^* + 1)$, где $x^*(q, 1, 0)$ является решением уравнения (1.7) или (1.8), в зависимости от значения q . Эти уравнения при выбранных значениях параметров можно переписать в виде

$$\frac{q+1}{q}(x^q - 1)(x+1) - (x^{q+1} + 1) \ln x = 0, \quad x > 1, \quad \text{при } q \in (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$x+1 - x \ln x = 0, \quad x > 1, \quad \text{при } q = \infty. \quad (4.2)$$

ЛЕММА 5. Корень $x(q)$ уравнения (4.1) непрерывно убывает по $q \in (0, \infty)$ от $x(+0)$ до $x(\infty)$, где $x(+0)$ – (единственный) корень уравнения

$$2(x+1) - (x-1) \ln x = 0, \quad x > 1, \quad (4.3)$$

а $x(\infty)$ – (единственный) корень уравнения (4.2); эти две величины имеют следующие приближенные значения: $x(+0) = 11.01609384\dots$, $x(\infty) = 3.59112147\dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $D = \{(x, q) : x > 1, q \in (0, \infty)\}$ рассмотрим функцию двух переменных

$$\kappa(x, q) = \frac{q+1}{q}(x^q - 1)(x+1) - (x^{q+1} + 1) \ln x.$$

По теореме 1 для каждого $q \in (0, \infty)$ на луче $(1, \infty)$ существует единственное решение $x = x(q)$ уравнения (4.1) или, тоже самое, уравнения $\kappa(x, q) = 0$.

Разложим $\kappa(x, q)$ в ряд по степеням q ; для этого воспользуемся соотношениями

$$x^q = e^{q \ln x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell, \quad \frac{q+1}{q}(x^q - 1) = \ln x + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{\ell+1}\right) \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell.$$

В результате получаем представление

$$\kappa(x, q) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x) \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell, \quad a_\ell(x) = x+1 - x \ln x + \frac{(x+1) \ln x}{\ell+1}. \quad (4.4)$$

При фиксированном $x > 1$ последовательность $\{a_\ell(x)\}_{\ell=1}^{\infty}$ убывает по ℓ . Положим

$$a_\infty(x) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell = x+1 - x \ln x;$$

последнее выражение совпадает с левой частью уравнения (4.2). В силу сказанного справедливы оценки

$$a_\infty(x) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell < \kappa(x, q) < a_1(x) \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell$$

или, тоже самое,

$$a_\infty(x)(x^q - 1) < \kappa(x, q) < a_1(x)(x^q - 1). \quad (4.5)$$

Легко проверить, что $a_\ell''(x) < 0$, $x \geq 1$; а значит, каждая из функций a_ℓ , $1 \leq \ell \leq \infty$, выпукла вверх на полуоси $[1, \infty)$. Помимо этого, $a_\ell(1) = 2$ и $a_\ell(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что существует единственный корень $x = \chi_\ell > 1$ уравнения $a_\ell(x) = 0$, $1 \leq \ell \leq \infty$. Более того, $a_\ell(x) > 0$ при $1 \leq x < \chi_\ell$ и $a_\ell(x) < 0$ при $x > \chi_\ell$. Неравенства (4.5) и перечисленные свойства функций a_ℓ влекут оценки

$$\chi_\infty < x(q) < \chi_1, \quad q \in (0, \infty), \quad (4.6)$$

причем

$$a_\infty(x(q)) < 0, \quad a_1(x(q)) > 0. \quad (4.7)$$

Для дальнейшего изучения функции $x = x(q)$ переменной $q \in (0, \infty)$ воспользуемся теоремой о неявных функциях. Возьмем некоторое $q^* \in (0, \infty)$ и положим $x^* = x(q^*)$. В силу замечания к лемме 4 имеем

$$\kappa'_x(x, q) < 0, \quad x \geq x^*. \quad (4.8)$$

Покажем, что производная $\kappa'_q(x^*, q^*)$ также отрицательная. Продифференцировав представление (4.4) по q , получаем

$$\kappa'_q(x, q) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x) \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} \ell q^{\ell-1}.$$

Для пары q^* , x^* положим $\ell^* = \max\{\ell : a_\ell(x^*) \geq 0\}$; в силу свойства монотонности последовательности $\{a_\ell\}$ и неравенств (4.7) такой номер существует. Тогда

$$\kappa'_q(x^*, q^*) = \left(\sum_{\ell=1}^{\ell^*} + \sum_{\ell=\ell^*+1}^{\infty} \right) a_\ell(x^*) \frac{(\ln x^*)^\ell}{\ell!} \ell (q^*)^{\ell-1} < \ell^* \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x^*) \frac{(\ln x^*)^\ell}{\ell!} (q^*)^{\ell-1} = 0. \quad (4.9)$$

Отсюда по теореме о неявной функции можно сделать вывод, что функция $x = x(q)$ в точке q^* дифференцируема, и более того,

$$x'(q^*) = -\frac{\kappa'_q(x^*, q^*)}{\kappa'_x(x^*, q^*)} < 0.$$

Таким образом доказано, что функция $x = x(q)$ на полуоси $(0, \infty)$ (непрерывно) дифференцируема и убывает.

Убедимся, что $x(q) \rightarrow \chi_1$ при $q \rightarrow +0$. Пусть $\bar{x}$ есть произвольная точка со свойством $(\chi_\infty \leq) \bar{x} < \chi_1$. В этой точке $a_1(\bar{x}) > 0$. В силу представления (4.4) при любом $x > 1$, и, в частности, при $x = \bar{x}$ имеет место равенство

$$\lim_{q \rightarrow +0} q^{-1} \kappa(x, q) = a_1(x) \ln x > 0.$$

Следовательно, существует такое $\bar{q} > 0$, что для всех $q \in (0, \bar{q})$ выполняется неравенство $\kappa(q, \bar{x}) > 0$. Но тогда в силу (4.8) и (4.6) имеем также, что $\bar{x} < x(q) < \chi_1$ для всех $q \in (0, \bar{q})$. Таким образом, действительно, при $q \rightarrow +0$ $x(q) \rightarrow x(+0) = \chi_1$.

Убедимся теперь, что $x(q) \rightarrow \chi_\infty = x(\infty)$ при $q \rightarrow +\infty$. Пусть $\bar{x}$ – точка со свойством $\chi_\infty < \bar{x} (\leq \chi_1)$. В этой точке $a_\infty(\bar{x}) < 0$, а следовательно, существует такой номер $L \geq 1$, что $a_\ell(\bar{x}) < 0$ для $\ell \geq L$. Поэтому в точке $x = \bar{x}$ справедлива оценка

$$\kappa(q, x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell(x) \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell < \bar{\kappa}(q, x) = \sum_{\ell=1}^L a_\ell(x) \frac{(\ln x)^\ell}{\ell!} q^\ell. \quad (4.10)$$

Видно, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} q^{-L} \bar{\kappa}(q, x) = a_L(x) \frac{(\ln x)^L}{L!} < 0.$$

А значит, существует такое $\bar{q}$, что для всех q со свойством $\bar{q} < q < \infty$ выполняется неравенство $\bar{\kappa}(q, \bar{x}) < 0$ и, тем более, $\kappa(q, \bar{x}) < 0$. Но тогда будет справедлива оценка $x(q) < \bar{x}$, $\bar{q} < q < \infty$. Таким образом, действительно, $x(q) \rightarrow x(\infty)$ при $q \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При $q = 0$ порядковое соотношение для величины $M_{0,0}(n, k)$ вытекает из представления (1.5) в теореме 1.

Рассмотрим случай $q \in (0, \infty]$. Докажем предварительно, что при $n \rightarrow \infty$

$$M_{q,0}(n, k) \asymp \frac{n!}{(n-k)!} (M_{(n-k)q,0}(1, 0))^{n-k}. \quad (4.11)$$

Пользуясь представлением (2.19), находим оценку сверху

$$\begin{aligned} M_{q,0}(n, k) &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\|t - z^*\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t - z^*\|_0^n} \leq \frac{n!}{(n-k)!} \max_{z \in [0,1]} \frac{\|t - z\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t - z\|_0^{n-k}} \cdot \frac{1}{\|t - z^*\|_0^k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1, 0)}{\|t - z^*\|_0^k} \asymp \frac{n!}{(n-k)!} M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1, 0). \end{aligned}$$

Чтобы получить оценку снизу, положим $z^{**} = z^*((n-k)q, 1, 0)$; тогда

$$\begin{aligned} M_{q,0}(n, k) &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\|t - z^*\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t - z^*\|_0^n} \geq \frac{n!}{(n-k)!} \frac{\|t - z^{**}\|_{(n-k)q}^{n-k}}{\|t - z^{**}\|_0^n} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \frac{M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1, 0)}{\|t - z^{**}\|_0^k} \asymp \frac{n!}{(n-k)!} M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1, 0). \end{aligned}$$

Тем самым, утверждение (4.11) обосновано.

Найдем асимптотику $M_{(n-k)q}^{n-k}(1, 0)$ по n . Пусть сначала $q \in (0, \infty)$. Прежде всего, применяя формулы (2.3), (2.5) и равенство $z = (x-1)/(x+1)$, имеем

$$\frac{\|t - z\|_q}{\|t - z\|_0} = \frac{e}{x^{x/(x+1)}} \left(\frac{x^{q+1} + 1}{(q+1)(x+1)} \right)^{1/q} = ex^{1/(x+1)} \left(\frac{1 + x^{-q-1}}{(q+1)(1+1/x)} \right)^{1/q}. \quad (4.12)$$

Положим

$$x_{(n-k)q} = x^*((n-k)q, 1, 0), \quad x_\infty = x^*(\infty, 1, 0), \quad z_\infty = z^*(\infty, 1, 0) = \frac{x_\infty - 1}{x_\infty + 1}.$$

По теореме 1 точка x_∞ удовлетворяет уравнению (1.8): $x_\infty + 1 = x_\infty \ln x_\infty$. Из этого уравнения и формулы (1.10) последовательно получаем

$$e^{1/x_\infty} = x_\infty^{1/(1+x_\infty)}, \quad ex_\infty^{1/(1+x_\infty)} = e^{(x_\infty+1)/x_\infty} = e^{\ln x_\infty} = x_\infty = M_{\infty,0}(1,0). \quad (4.13)$$

Далее, по лемме 5 значение $x_{(n-k)q} = x^*((n-k)q, 1, 0)$ убывает по $(n-k)q$ от $x(+0)$ до x_∞ . Как нетрудно проверить, функция $x^{1/(x+1)}$ убывает при $x \geq x_\infty$. Поэтому

$$(x_{(n-k)q})^{1/(x_{(n-k)q}+1)} \leq x_\infty^{1/(x_\infty+1)}. \quad (4.14)$$

Применяя теперь представление (4.12), пользуясь убыванием величины $x_{(n-k)q} = x^*((n-k)q, 1, 0)$ по $(n-k)q$ до x_∞ и формулами (4.14), (4.13), получаем цепочку соотношений (знак $\sim$ определен в сноске на с. 5)

$$\begin{aligned} (M_{(n-k)q,0}(1,0))^{n-k} &= \left(e(x_{(n-k)q})^{1/(x_{(n-k)q}+1)} \right)^{n-k} \\ &\quad \times \left(\frac{1 + (x_{(n-k)q})^{-(n-k)q-1}}{((n-k)q+1)(1+1/x_{(n-k)q})} \right)^{1/q} \\ &\sim \left(ex^{1/(x_{(n-k)q}+1)} \right)^{n-k} \left(\frac{1}{nq(1+1/x_\infty)} \right)^{1/q} \\ &\leq \left(ex_\infty^{1/(x_\infty+1)} \right)^{n-k} \left(\frac{1}{nq(1+1/x_\infty)} \right)^{1/q} \\ &= \frac{x_\infty^{n-k} n^{-1/q}}{(q(1+1/x_\infty))^{1/q}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.15)$$

С другой стороны, равенства (4.12) и (4.13) влекут

$$\begin{aligned} (M_{(n-k)q,0}(1,0))^{n-k} &= \left(\max_{z \in [0,1]} \frac{\|t-z\|_{(n-k)q}}{\|t-z\|_0} \right)^{n-k} \geq \left(\frac{\|t-z_\infty\|_{(n-k)q}}{\|t-z_\infty\|_0} \right)^{n-k} \\ &= (ex_\infty^{1/(x_\infty+1)})^{n-k} \left(\frac{1 + x_\infty^{-(n-k)q-1}}{((n-k)q+1)(1+1/x_\infty)} \right)^{1/q} \\ &\sim \frac{x_\infty^{n-k} n^{-1/q}}{(q(1+1/x_\infty))^{1/q}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

При $q = \infty$ на основании (4.13) имеем равенство

$$(M_{\infty,0}(1,0))^{n-k} = (x_\infty)^{n-k}. \quad (4.17)$$

Объединяя (4.15), (4.16) и (4.17), находим, что при $n \rightarrow \infty$

$$M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1,0) \sim \frac{x_\infty^{n-k} n^{-1/q}}{(q(1+1/x_\infty))^{1/q}} \asymp M_{\infty,0}^n(1,0) n^{-1/q}.$$

Наконец, в силу (4.11) при $n \rightarrow \infty$

$$M_{q,0}(n,k) \asymp \frac{n!}{(n-k)!} M_{(n-k)q,0}^{n-k}(1,0) \asymp M_{\infty,0}^n(1,0) n^{k-1/q}.$$

Теорема 2 доказана.

5. Дополнение (доказательство теоремы А). Нам понадобится так называемое свойство перемежаемости Маркова (см. [19; с. III–IV], а также [8; с. 37]).

ТЕОРЕМА (В. А. МАРКОВ). *Если корни многочленов $P(t) = (t - p_1) \cdots (t - p_n)$ и $Q(t) = (t - q_1) \cdots (t - q_n)$ вещественные и перемежающиеся, т.е. $p_n \leq q_n \leq p_{n-1} \leq \cdots \leq p_1 \leq q_1$, то корни P' и Q' также перемежаются.*

В качестве простого следствия получается такое утверждение.

ЛЕММА 6. *Пусть $p_n \leq \cdots \leq p_1$, и $q_n \leq \cdots \leq q_1$ – корни многочленов P и Q соответственно, а $p'_{n-1} \leq \cdots \leq p'_1$, $q'_{n-1} \leq \cdots \leq q'_1$ – корни их производных P' , Q' , и при этом $p_\ell \leq q_\ell$, $\ell = 1, \dots, n$. Тогда $p'_\ell \leq q'_\ell$, $\ell = 1, \dots, n-1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, рассмотрим многочлены

$$P_0(t) = P(t), \quad P_\ell(t) = (t - p_n) \cdots (t - p_{\ell+1})(t - q_\ell) \cdots (t - q_1), \quad \ell = 1, \dots, n-1, \\ P_n(t) = Q(t).$$

Пусть $p'_{\ell,1} \leq \cdots \leq p'_{\ell,n-1}$ – корни P'_ℓ . Очевидно, корни $P_{\ell-1}$ и P_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, перемежаются; следовательно, корни их производных тоже перемежаются и, в частности, $p'_{\ell-1,j} \leq p'_{\ell,j}$, $j = 1, \dots, n-1$. Поскольку $P_n = Q$, для любого j имеем неравенства $p'_j = p'_{0,j} \leq \cdots \leq p'_{n,j} = q'_j$.

Мы докажем теорему А с помощью принципа мажоризации. Напомним основное определение (см. [20; гл. 1, п. А], а также [1; п. 2.18]) и теорему, с ним связанную.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_m)$, $a' = (a'_1, \dots, a'_m)$ – наборы m вещественных чисел. Говорят, что a' *мажорируется* a , и пишут $a' \prec a$, если компоненты a и a' можно перепорядочить таким образом, что

$$a'_1 \geq a'_2 \geq \cdots \geq a'_m, \quad a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_m, \\ a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_\nu \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu, \quad 1 \leq \nu < m, \\ a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

ТЕОРЕМА В ([20; гл. 3, А.1, С.1, С.1.а (i)], а также [1; п. 3.17]). *Пусть*

- 1) *компоненты наборов $a = (a_1, \dots, a_m)$ и $a' = (a'_1, \dots, a'_m)$ принадлежат некоторому промежутку I вещественной оси;*
- 2) *$a' \prec a$;*
- 3) *φ – непрерывная выпуклая (вниз) функция на I .*

Тогда

$$\sum_{\nu=1}^m \varphi(a'_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^m \varphi(a_\nu).$$

Если φ строго выпукла, то равенство имеет место только в том случае, когда $a = a'$ (с точностью до перестановки).

Допустим $P(t) = c \prod_{\ell=1}^n (t - z_\ell)$, $z_\ell \in \mathbb{R}$, $P'(t) = cn \prod_{\ell=1}^{n-1} (t - z'_\ell)$. Составим наборы a и a' следующим образом:

$$a = (\underbrace{z_1, \dots, z_1}_{n-1}, z_2, \dots, z_2, \dots, z_{n-1}, \underbrace{z_n, \dots, z_n}_{n-1}), \\ a' = (\underbrace{z'_1, \dots, z'_1}_n, z'_2, \dots, z'_2, \dots, \underbrace{z'_{n-1}, z'_{n-1}, \dots, z'_{n-1}}_n). \quad (5.1)$$

Умножив неравенство (2.8) на $n(n-1)$, будем иметь $n \sum_{\ell=1}^{n-1} \varphi(z'_\ell) \leq (n-1) \sum_{\ell=1}^n \varphi(z_\ell)$ или в терминах a и a'

$$\sum_{\nu=1}^{n(n-1)} \varphi(a'_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{n(n-1)} \varphi(a_\nu).$$

В силу теоремы В для доказательства теоремы А достаточно установить соотношение $a' \prec a$.

ЛЕММА 7. Пусть наборы a и a' определены равенствами (5.1). Тогда $a' \prec a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно полагать, что $z_n \leq \dots \leq z_1$, $z'_{n-1} \leq \dots \leq z'_1$. По определению мажоризации требуется доказать неравенство

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} a'_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{\nu} a_\ell, \quad \nu = 1, \dots, n(n-1), \quad (5.2)$$

которое должно обращаться в равенство при $\nu = n(n-1)$. Докажем лемму индукцией по кратности наименьшего из всех корней z_n многочлена P ; индукцию проведем в порядке убывания кратности от n до 1.

Пусть z_n имеет кратность n . Тогда $z'_\ell = z_n$, $\ell = 1, \dots, n-1$, $a' = a$ и утверждение леммы справедливо. Допустим теперь, что утверждение леммы справедливо в предположении, что кратность z_n больше некоторого k_0 . Докажем его в случае, когда z_n имеет кратность k_0 , $1 \leq k_0 \leq n-1$. Итак, в нашем предположении $z_n = \dots = z_{n-k_0+1}$. Сопоставим многочлену P многочлен $\tilde{P}$ по правилу

$$\tilde{P}(t) = (t - z_{n-k_0})^{k_0+1} \prod_{\ell=1}^{n-k_0-1} (t - z_\ell).$$

Обозначим через $\tilde{z}_n \leq \dots \leq \tilde{z}_1$, $\tilde{z}'_{n-1} \leq \dots \leq \tilde{z}'_1$ соответственно корни $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$. Корни P и $\tilde{P}$ связаны соотношениями

$$z_\ell = \tilde{z}_\ell, \quad \ell = 1, \dots, n-k_0, \quad z_\ell \leq \tilde{z}_\ell, \quad \ell = n-k_0+1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Из леммы 6 вытекает, что корни P' и $\tilde{P}'$ связаны неравенствами

$$z'_\ell \leq \tilde{z}'_\ell, \quad \ell = 1, \dots, n-1. \quad (5.4)$$

В соответствии с (5.1) составим наборы

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= (\underbrace{\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_1}_{n-1}, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_{n-1}, \underbrace{\tilde{z}_n, \dots, \tilde{z}_n}_{n-1}), \\ \tilde{a}' &= (\underbrace{\tilde{z}'_1, \dots, \tilde{z}'_1}_{n-1}, \tilde{z}'_2, \dots, \tilde{z}'_2, \dots, \tilde{z}'_{n-1}, \underbrace{\tilde{z}'_n, \dots, \tilde{z}'_n}_{n-1}). \end{aligned}$$

Наименьший корень многочлена $\tilde{P}$ имеет кратность по крайней мере k_0+1 , поэтому в силу предположения индукции, примененного к $\tilde{P}$ и $\tilde{a}$, $\tilde{a}'$, получаем неравенство

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} \tilde{a}'_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{\nu} \tilde{a}_\ell, \quad \nu = 1, \dots, n(n-1).$$

Отсюда и из соотношений (5.3), (5.4) для $\nu = 1, \dots, (n-1)(n-k_0)$ получаем цепочку неравенств

$$\sum_{\ell=1}^{\nu} a'_{\ell} \leq \sum_{\ell=1}^{\nu} \tilde{a}'_{\ell} \leq \sum_{\ell=1}^{\nu} \tilde{a}_{\ell} = \sum_{\ell=1}^{\nu} a_{\ell}.$$

При $\nu = n(n-1)$ имеем

$$\sum_{\ell=1}^{n(n-1)} a'_{\ell} = n(z'_1 + \dots + z'_{n-1}), \quad \sum_{\ell=1}^{n(n-1)} a_{\ell} = (n-1)(z_1 + \dots + z_n). \quad (5.5)$$

Убедимся, что

$$n(z'_1 + \dots + z'_{n-1}) = (n-1)(z_1 + \dots + z_n). \quad (5.6)$$

Действительно, зная корни $z_1, \dots, z_n$ многочлена P , запишем его в виде

$$P(t) = t^n + (z_1 + \dots + z_n)t^{n-1} + \dots.$$

Тогда его производную P' мы можем, с одной стороны, представить как

$$P'(t) = nt^{n-1} + (n-1)(z_1 + \dots + z_n)t^{n-2} + \dots,$$

а с другой, используя уже ее корни $z'_1, \dots, z'_{n-1}$,

$$P'(t) = n(t^{n-1} + (z'_1 + \dots + z'_{n-1})t^{n-2} + \dots).$$

Сравнивая коэффициенты при t^{n-2} в этих двух представлениях, приходим к равенству (5.6). Соединяя (5.5) и (5.6), имеем

$$\sum_{\ell=1}^{n(n-1)} a'_{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n(n-1)} a_{\ell} = S.$$

Чтобы установить неравенство для оставшихся значений $\nu = (n-1)(n-k_0) + 1, \dots, n(n-1) - 1$, запишем нужные суммы в виде $\sum_{\ell=1}^{\nu} a'_{\ell} = S - \sum_{\ell=\nu+1}^{n(n-1)} a'_{\ell}$, $\sum_{\ell=1}^{\nu} a_{\ell} = S - \sum_{\ell=\nu+1}^{n(n-1)} a_{\ell}$. Таким образом, в этом случае неравенство (5.2) эквивалентно неравенству

$$\sum_{\ell=\nu+1}^{n(n-1)} a_{\ell} \leq \sum_{\ell=\nu+1}^{n(n-1)} a'_{\ell}. \quad (5.7)$$

Заметим, что для $\ell = (n-1)(n-k_0) + 1, \dots, n(n-1)$ все $a_{\ell} = z_n$, а элементы a'_{ℓ} равны некоторым из корней производной P' , которые в любом случае не меньше z_n . Следовательно, $a_{\ell} \leq a'_{\ell}$ и неравенство (5.7), а значит, и исходное неравенство (5.2), установлены. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы А завершено.

Автор благодарен профессору В. В. Арестову за постановку задачи и неизменное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [2] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
- [3] E. Hille, G. Szegő, J. D. Tamarkin, “On some generalisations of a theorem of A. Markoff”, *Duke Math. J.*, **3**:4 (1937), 729–739.
- [4] Н. К. Бари, “Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова”, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, 1954, № 18, 159–176.
- [5] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, ГИФМЛ, М., 1960.
- [6] И. К. Даугавет, С. З. Рафальсон, “Некоторые неравенства типа Маркова–Никольского для алгебраических многочленов”, *Вестн. ЛГУ. Сер. матем., мех., астроном.*, 1972, № 1, 15–25.
- [7] В. И. Иванов, “Некоторые неравенства для тригонометрических многочленов и их производных в разных метриках”, *Матем. заметки*, **18**:4 (1975), 489–498.
- [8] B. Bojanov, “Markov-type inequalities for polynomials and splines”, *Approximation Theory, X: Abstract and Classical Analysis* (St. Louis, MO, 2001), Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, 31–90.
- [9] G. Labelle, “Concerning polynomials on the unit interval”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20**:2 (1969), 321–326.
- [10] A. Korkine, G. Zolotareff, “Sur un certain minimum”, *Nouv. Ann. Math. Sér. 2*, **12** (1873), 337–356.
- [11] P. Yu. Glazyrina, “Limiting case of the inequality in various metrics for algebraic polynomials on an interval”, *East J. Approx.*, **9**:1 (2003), 1–19.
- [12] П. Ю. Глазырина, “Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 59–65.
- [13] П. Ю. Глазырина, “Неравенство Маркова–Никольского для пространств L_q , L_0 на отрезке”, *Тр. ин-та матем. и мех.*, **11**:2 (2005), 60–71.
- [14] N. G. de Bruijn, “On the zeros of a polynomial and of its derivative”, *Indag. Math.*, **8** (1946), 635–642.
- [15] N. G. de Bruijn, T. A. Springer, “On the zeros of a polynomial and of its derivate. II.”, *Indag. Math.*, **9** (1947), 458–464.
- [16] R. Pereira, “Differentiators and the geometry of polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, **285**:1 (2003), 336–348.
- [17] S. M. Malamud, “Inverse spectral problem for normal matrices and the Gauss–Lucas theorem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:10 (2005), 4043–4064.
- [18] И. И. Привалов, *Субгармонические функции*, ОНТИ, М.–Л., 1937.
- [19] В. А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Типография Императорской АН, СПб, 1892.
- [20] А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*, Мир, М., 1983.

П. Ю. Глазырина

Уральский государственный университет, г. Екатеринбург

E-mail: polina.glazyrina@usu.ru

Поступило

31.07.2007