Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, О распределении
целочисленных случайных величин, связанных двумя
линейными соотношениями, *Матем. заметки*, 2008,
том 84, выпуск 1, 69–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 08:03:51

О распределении целочисленных случайных величин, связанных двумя линейными соотношениями

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

На множестве всех наборов $\{N_j\}$ целых неотрицательных чисел N_j , $j = l_0, l_0 + 1, \dots$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j \leq M, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} N_j = N,$$

где l_0, M, N – натуральные числа, рассматривается мультипликативная (в смысле Вершика) вероятностная мера, отвечающая произвольной вещественной размерности d . Если $M, N \rightarrow \infty$ и скорости роста этих параметров связаны определенным (зависящим от d) соотношением, а l_0 зависит от них специальным образом (при $d \geq 2$ можно взять $l_0 = 1$) то в пределе “большинство” наборов (относительно упомянутой меры) концентрируется вблизи предельного распределения, описываемого бозе–эйнштейновскими формулами. Исследуются вероятности отклонений сумм $\sum_{j=l}^{\infty} N_j$ от соответствующих кумулятивных интегралов для предельного распределения. В более ранней работе [6] рассматривался случай $d = 3$.

Библиография: 11 названий.

1. Введение

Пусть M, N – заданные натуральные числа, причем $M \geq N$. Рассмотрим конечное множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M, N)$ всевозможных наборов $\{N_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, целых неотрицательных чисел таких, что выполнены соотношения

$$\sum_{j=1}^{\infty} N_j = N, \quad \sum_{j=1}^{\infty} jN_j \leq M. \quad (1)$$

(Каждый такой набор естественно отождествляется с разбиением не превосходящего M числа $\sum_{j=1}^{\infty} jN_j$ на N целых неотрицательных слагаемых; см., например, [1]. При этом отождествлении N_j есть число слагаемых разбиения, равных j .)

Нас интересует поведение типичных наборов $\{N_j\}$, когда N и M стремятся к бесконечности. Слово “типичный” мы понимаем в вероятностном смысле: заданное свойство наборов типично, если оно выполнено с вероятностью, стремящейся к 1. Таким образом, постановка вопроса о типичности подразумевает, что каждому набору $\{N_j\} \in \mathcal{F}$ приписана определенная вероятность. Как можно задать эти вероятности? Для наглядности представим себе, что каждому j отвечает свой ящик,

а наборы $\{N_j\}$ суть варианты раскладки по этим ящикам одинаковых неразличимых шаров – в j -й ящик попадает ровно N_j шаров. Естественно постулировать, что все эти варианты равноправны. Тогда каждому набору $\{N_j\}$ сопоставляется одна и та же вероятность, равная $(\#\mathcal{F})^{-1}$, где $\#\mathcal{F}$ – число элементов во множестве $\mathcal{F}$.

Предположим теперь, что j -й ящик разделен перегородками на q_j отделений, где q_j – целое положительное число. Тогда N_j неразличимых шаров можно разложить по этим q_j отделениям $\binom{N_j+q_j-1}{q_j-1}$ различными способами, т.е. при фиксированных раскладках шаров в прочих ящиках данному числу N_j шаров в ящике j отвечает $\binom{N_j+q_j-1}{q_j-1}$ различных вариантов раскладки. Таким образом, между наборами $\{N_j\}$ и вариантами раскладки уже нет взаимно однозначного соответствия: число вариантов раскладки, соответствующих заданному набору $\{N_j\}$, равно

$$f(\{N_j\}) = \prod_{j=1}^{\infty} \binom{N_j + q_j - 1}{q_j - 1}, \quad (2)$$

а общее число вариантов раскладки, соответствующих всевозможным наборам из $\mathcal{F}$, есть

$$\mathcal{N}(M, N) = \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}} f(\{N_j\}). \quad (3)$$

По-прежнему считая, что все варианты раскладки равноправны, видим, что в этом случае набору $\{N_j\}$ следует приписать вероятность

$$P(\{N_j\}) = \frac{f(\{N_j\})}{\mathcal{N}(M, N)}. \quad (4)$$

ПРИМЕР 1. Важный пример последовательности q_j получается следующим образом. Пусть N_j – числа заполнения в системе d -мерных осцилляторов с уровнями энергии $0, 1, 2, \dots$, где d – целое положительное число, и пусть выполнены соотношения (1). (Таким образом, числа N и M интерпретируются соответственно как число осцилляторов и ограничение сверху на полную энергию системы.) Считая все собственные состояния системы при ограничениях (1) равновероятными, получаем для вероятности заданного набора $\{N_j\} \in \mathcal{F}$ чисел заполнения формулу (4), где числитель и знаменатель определены в (2) и (3), а числа q_j суть кратности уровней энергии. Они задаются формулами

$$q_j = \binom{j + d - 1}{j} \quad (5)$$

и имеют при $j \rightarrow \infty$ асимптотику

$$q_j \sim \frac{j^{d-1}}{(d-1)!}. \quad (6)$$

Отталкиваясь от этого примера, будем в дальнейшем называть кратности, имеющие такой порядок роста при $j \rightarrow \infty$, *кратностями, соответствующими размерности d* .

Задаваемая формулами (2)–(4) вероятностная мера является частным случаем так называемых *мультипликативных мер* (см. [2]), т.е. мер, задаваемых формулами (3), (4), где функция f имеет вид

$$f(\{N_j\}) = \prod_j f_j(N_j). \quad (7)$$

Мы ограничимся (как это по существу было сделано и в [2]) специальным классом мультипликативных мер, для которых

$$f_j(x) = \frac{\Gamma(q_j + x)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(q_j)}. \quad (8)$$

Функция (2) получается отсюда в том случае, если q_j – целые положительные числа. Однако это совершенно необязательно. Достаточно считать, что q_j – неотрицательные числа, не обязательно целые. (При этом если $q_j = 0$, то $f_j(x) = \delta_{0x}$, где δ_{mn} – символ Кронекера.) Тогда можно рассматривать системы не только целой положительной размерности, как в примере 1, но и произвольной дробной или даже нулевой или отрицательной размерности d – достаточно при этом в формуле (8) положить, например,

$$q_j = \frac{\Gamma(j + d)}{\Gamma(d)\Gamma(j + 1)} \quad (9)$$

(разумеется, для отрицательных d при этом придется отбросить несколько первых членов последовательности, а для целых отрицательных d формула нуждается в более серьезной модификации – ср. [3]), или, считая в соответствии со сказанным выше, что размерность определяется асимптотическим поведением “кратностей” q_j при $j \rightarrow \infty$, задать их формулой $q_j = Qj^{d-1}$, где Q – некоторая постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В наших предыдущих статьях [3]–[6] был принят несколько другой подход к кратностям для случая дробной или отрицательной размерности – они определялись всегда как целые числа (что было связано с их конкретной трактовкой как кратностей собственных значений, или, эквивалентно, “количеств отделений в ящиках”). Подход, основанный на использовании мультипликативных мер [2], оказывается значительно более удобным и позволяет отказаться от округления в определении кратностей.

Мультипликативные меры, определяемые функциями f_j вида (8), замечательны тем, что подобные (3) “статистические суммы” для таких мер иногда оказывается достаточно просто вычислить. Пусть, например, $\mathcal{F}_0(M)$ – множество всех наборов $\{N_j\}$ неотрицательных целых чисел, таких, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j = M, \quad (10)$$

где M – целое неотрицательное число, и пусть

$$\mathcal{N}(M) = \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}_0(M)} f(\{N_j\}). \quad (11)$$

Рассмотрим производящую функцию

$$F(z) = \sum_{M=0}^{\infty} \mathcal{N}(M)z^M \quad (12)$$

последовательности чисел $\mathcal{N}(M)$. Если ряд (12) сходится в некоторой окрестности нуля, то эти числа можно восстановить по функции $F(z)$ с помощью интегральной формулы Коши:

$$\mathcal{N}(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(z) dz}{z^{M+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho^{-M} e^{-iM\varphi} F(\rho e^{i\varphi}) d\varphi, \quad (13)$$

где интеграл берется по окружности достаточного малого радиуса $\rho > 0$ с центром в начале координат (по существу этот подход представляет собой вариант метода тригонометрических сумм в теории чисел – см., например, [7]). Полезность этой конструкции состоит в том, что для функции $F(z)$ можно указать явную формулу:

$$F(z) = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{\sum j N_j = M} z^M \prod_{j=1}^{\infty} f_j(N_j) = \sum_{\{N_j\}} \prod_{j=1}^{\infty} (f_j(N_j) z^{j N_j}) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_j(k) z^{j k} \right), \quad (14)$$

и если функции $f_j(x)$ имеют вид (8), то, по формуле бинома Ньютона,

$$F(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^j)^{q_j}}, \quad (15)$$

где (в случае нецелых q_j) выбирается ветвь функции $(1 - z^j)^{q_j}$, равная единице в нуле. Наконец, теорема Мейнардуса [1; теорема 6.2] дает асимптотические формулы для коэффициентов (13) ряда Тейлора функции (15) в нуле при $M \rightarrow \infty$ в предположении, что ряд Дирихле

$$D(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{j^s} \quad (16)$$

сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \alpha$ и продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} s > -C_0$ для некоторого C_0 из интервала $0 < C_0 < 1$ как аналитическая функция с единственным простым полюсом в точке $s = \alpha$. Эти формулы выражают главный член асимптотики через α и вычет функции $D(s)$ в указанном полюсе.

Нетрудно вычислить и производящую функцию

$$F(z, w) = \sum_{M, N=0}^{\infty} \mathcal{N}_0(M, N) z^M w^N \quad (17)$$

статистических сумм

$$\mathcal{N}_0(M, N) = \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}_0(M, N)} f(\{N_j\}), \quad (18)$$

отвечающих множествам $\mathcal{F}_0(M, N)$, состоящим из наборов, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{\infty} j N_j = M, \quad \sum_{j=1}^{\infty} N_j = N. \quad (19)$$

Для случая мультипликативной меры, задаваемой функциями (8), она имеет вид (см. [2])

$$F(z, w) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - z^j w)^{q_j}}, \quad (20)$$

так что вычисление статистических сумм (18) в принципе сводится к вычислению двойного интеграла типа Коши, аналогичного (13).

Для мультипликативной меры (8), отвечающей системе кратностей $q_j = [j^{d-1}]$ (скобки обозначают целую часть) размерности $d \geq 1$ Вершик (см., например, [2], [8]) установил слабую сходимость подходящим образом масштабированных последовательностей $\{N_j\}$ из множества $\mathcal{F}_0(M)$ к предельному бозе–эйнштейновскому распределению $x^{d-1}/(e^x - 1)$; там же отмечается, что методами указанных работ можно получить аналогичные результаты и для множеств $\mathcal{F}_0(M, N)$ (т.е. для случая, когда, в интерпретации рассматриваемой задачи как задачи о газе тождественных Бозе-частиц, задана и энергия, и общее число частиц). Оценки вероятностей больших отклонений для наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих второму соотношению в (1), даны для случая произвольной вещественной размерности d в работах [3]–[5] (см. также цитированную там литературу), причем в [5] на примере размерностей $d \in (1, 2)$ показано, что эти оценки являются точными по порядку величины отклонения. Для наборов, удовлетворяющих обоим соотношениям (1) (отличающимся от (19) заменой одного из знаков равенства на неравенство) такие оценки в случае размерности $d = 3$ даны в [6]. В данной статье мы рассматриваем наборы $\{N_j\}$, удовлетворяющие соотношениям (1), в случае произвольной размерности d . Интерес к произвольным (в том числе нулевой и отрицательным) размерностям не случаен. Отвечающие таким размерностям законы распределения тесно связаны со степенными законами (см., например, [9], законами Ципфа–Мандельброта и Парето (см. [10]) и др.

2. Основные результаты

Пусть M и N – целые положительные числа. Рассмотрим множество $\mathcal{F}(M, N)$ всевозможных наборов $\{N_j\}$ целых неотрицательных чисел N_j , $j = l_0, l_0 + 1, \dots$, таких, что выполнены соотношения

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j = N, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j \leq M. \quad (21)$$

(Здесь нижний предел суммирования $l_0 \in \{1, 2, \dots\}$ – заданное число, которое в дальнейшем будем называть *нижним уровнем*.) На этом множестве зададим мультипликативную вероятностную меру

$$P(\{N_j\}) = \frac{f(\{N_j\})}{\mathcal{N}(M, N)}, \quad (22)$$

где

$$\mathcal{N}(M, N) = \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}(M, N)} f(\{N_j\}) \equiv \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}(M, N)} \prod_{j=l_0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j)}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)}, \quad (23)$$

а кратности q_j определены формулой

$$q_j = Qj^{d-1}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где $Q > 0$ – некоторая константа, а d – вещественное число, которое мы будем называть *размерностью* рассматриваемой задачи.

Мы покажем (см. точные формулировки в теореме 5 ниже), что при выполнении определенных условий, когда N и M стремятся к бесконечности, большинство (в смысле вероятностной меры (22)) наборов $\{N_j\}$ концентрируется вблизи некоторого предельного распределения. Точнее говоря, суммы $\sum_{j=l}^{\infty} N_j$ с большой вероятностью мало отличаются от соответствующих кумулятивных интегралов для предельного распределения.

Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^{d-1}}{e^{bj+\mu} - 1} = N, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^d}{e^{bj+\mu} - 1} = M \quad (25)$$

относительно неизвестных параметров b и μ . Несложные рассуждения показывают, что если выполнено условие¹

$$M > l_0 N, \quad (26)$$

то система (25) имеет единственное вещественное решение (b, μ) , такое, что

$$b > 0, \quad \mu + bl_0 > 0. \quad (27)$$

Таким образом, вместо задания непосредственно чисел M и N можно задавать параметры b и μ , что мы и будем делать в дальнейшем.

Нас не интересуют произвольные значения параметров b и μ , удовлетворяющие (27). Мы будем считать, что параметр b мал, т.е. $b \rightarrow 0$, а $\mu \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $d \geq 2$ мы всегда будем считать, что $Q = l_0 = 1$. Однако при изучении систем размерности $d < 2$ (в том числе отрицательной) оказывается целесообразным рассматривать достаточно большое l_0 , которое к тому же растет при $b \rightarrow 0$ (но так, что произведение bl_0 мало или по крайней мере остается ограниченным). Кроме того, для отрицательных размерностей нам придется потребовать, чтобы и Q росло при $b \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку $b \rightarrow 0$, суммы в (25) можно заменить на интегралы, пользуясь формулами Эйлера–Маклорена. Тогда получим

$$N = b^{-d} \int_{bl_0}^{\infty} \frac{Qx^{d-1}dx}{e^{x+\mu} - 1} + R_1, \quad M = b^{-d-1} \int_{bl_0}^{\infty} \frac{Qx^d dx}{e^{x+\mu} - 1} + R_2, \quad (28)$$

где оценки остаточных членов R_1 и R_2 зависят от размерности d и от условий, налагаемых на взаимосвязь параметров b , μ , l_0 и Q . Мы не будем проводить подробного анализа остатков, отметим лишь, что при выполнении условий теоремы (5) остаточный член всегда оказывается меньше по порядку, чем основной, интегральный член формулы. Далее, при $d > 1$ в формуле для N и при $d > 0$ в формуле для M , при условии, что $bl_0 \rightarrow 0$, нижний предел интегрирования можно заменить нулем, и тогда для N и M в главном члене получаются хорошо известные формулы

$$N \simeq Qb^{-d}\Gamma(d) \operatorname{Li}_d(e^{-\mu}), \quad M \simeq Qb^{-d-1}\Gamma(d+1) \operatorname{Li}_{d+1}(e^{-\mu}), \quad (29)$$

для интегралов от бозе–эйнштейновского распределения, где

$$\operatorname{Li}_\nu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^\nu} \quad (30)$$

¹Это условие достаточно и для разрешимости системы (21), а необходимое условие отличается от него заменой строгого неравенства на нестрогое.

– полилогарифм (см., например, [11]).

Всюду в дальнейшем через $\chi(x)$ обозначается произвольным образом выбранная и зафиксированная положительная функция, такая, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x)/x^\varepsilon = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (31)$$

Постоянные в оценках зависят от выбора этой функции, но мы не будем каждый раз оговаривать это явно.

Следующая теорема об отклонениях от бозе–эйнштейновского распределения является основным результатом данной работы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть задана размерность $d \in \mathbb{R}$, и пусть параметры b, μ, l_0, Q, M и N связаны соотношениями (25) и удовлетворяют условиям, указанным в таблице ниже. Тогда N и M стремятся к бесконечности при $b \rightarrow 0$, и для j_0 и Δ , взятых из соответствующей строки таблицы, существуют такие постоянные C_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, что для любого $l > j_0$ при $b \rightarrow 0$ выполнены оценки

$$\mathbf{P} \left(\left| \sum_{j=l}^{\infty} N_j - Qb^{-d} \int_{bl}^{\infty} \frac{x^{d-1} dx}{e^{x+\mu} - 1} \right| > \Delta \right) \leq C_m N^{-m}, \quad (32)$$

где $\mathbf{P}(\cdot)$ – определяемая соответствующими размерности d кратностями (24) вероятностная мера (22), (23) на множестве $\mathcal{F}(M, N)$ наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j = N, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j \leq M.$$

d	Соотношения между параметрами	Δ и j_0
$d > 0$	$Q = l_0 = 1, \mu > 1, e^\mu < Cb^{-d+\varepsilon}, \varepsilon > 0$	$\Delta = \sqrt{N \ln N \chi(N)}, j_0 = 1$
$d > 2$	$Q = l_0 = 1, 0 \leq \mu \leq 1$	$\Delta = \sqrt{N \ln N \chi(N)}, j_0 = 1$
$d = 2$	$Q = l_0 \geq 1, 0 \leq \mu \leq b$	$\Delta = \sqrt{N \ln N \chi(N)}, j_0 = 1$
$1 < d < 2$	$Q = l_0 = 1, 0 \leq \mu \leq b$	$\Delta = N^{\gamma/2+(1-\gamma)/d} \sqrt{\ln N \chi(N)},$ $j_0 \geq Cb^{-\gamma}, 0 < \gamma \leq 1$
$d = 1$	$Q = 1, l_0 \geq C \ln b ^\gamma, 0 < \gamma \leq 1, 0 \leq \mu \leq b$	$\Delta = N(\ln N)^{-\gamma} \chi(N), j_0 \geq l_0$
$0 \leq d \leq 1$	$l_0 \geq Cb^{-\gamma}, 0 < \gamma \leq 1, Q = 1, 0 \leq \mu \leq b$ $\gamma \neq 1$, если $d = 0$	$\Delta = N^{1-\gamma/2} \sqrt{\ln N \chi(N)}, j_0 \geq l_0$
$d < 0$	$bl_0 \leq C, Ql_0^d > C_1 N_0^\gamma, \gamma \in (0, 1), 0 \leq \mu \leq 1$	$\Delta = N^{1-\gamma/2} \sqrt{\ln N \chi(N)}, j_0 \geq l_0$

3. Доказательства

3.1. Доказательство теоремы 5. Рассуждение, доказывающее теорему 5, совсем простое, но оно опирается на ряд громоздких технических вычислений. Для удобства читателя в этом пункте мы проводим указанное рассуждение, формулируя результаты этих вычислений в виде лемм. Таким образом, останется лишь доказать эти леммы, что и будет сделано в последующих пунктах.

Всюду ниже, если явным образом не оговорено обратное, предполагается, что параметры M, N, Q, b, l_0 и μ связаны соотношениями (25) и что выполнены условия теоремы 5.

В доказательствах будет повсеместно использоваться стандартное обозначение $f \asymp g$, которое по определению означает, что отношение f/g ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Буквой C , иногда с индексами, всегда обозначаются положительные постоянные, возможно, различные в разных формулах и рассуждениях.

По определению,

$$\mathbf{P}\left(\left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - Qb^{-d} \int_{bl}^{\infty} \frac{x^{d-1} dx}{e^{x+\mu} - 1}\right| > \Delta\right) = \frac{\mathcal{N}(M, N, \Delta)}{\mathcal{N}(M, N)},$$

где (см. (23))

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N) &= \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}(M, N)} \prod_{j=l_0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j)}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)}, \\ \mathcal{N}(M, N, \Delta) &= \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}(M, N, \Delta)} \prod_{j=l_0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j)}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)}, \end{aligned} \quad (33)$$

причем $\mathcal{F}(M, N, \Delta) \subset \mathcal{F}(M, N)$ – подмножество, выделяемое условием

$$\left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - Qb^{-d} \int_{bl}^{\infty} \frac{x^{d-1} dx}{e^{x+\mu} - 1}\right| > \Delta \quad (34)$$

и $l > j_0$ по условию теоремы.

3.1.1. Прежде всего оценим снизу статистическую сумму $\mathcal{N}(M, N)$. Пусть

$$\mathcal{N}_0(M, N) = \sum_{\{N_j\} \in \mathcal{F}_0(M, N)} \prod_{j=l_0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j)}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)},$$

где $\mathcal{F}_0(M, N) \subset \mathcal{F}(M, N)$ – множество наборов $\{N_j\}$, $j = l_0, l_0 + 1, \dots$, таких, что

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j = N, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j = M. \quad (35)$$

ЛЕММА 6. *Имеет место формула*

$$\mathcal{N}_0(M, N) = e^{\mathcal{S}(M, N)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Phi(M, N, x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (36)$$

где

$$\mathcal{S}(M, N) = bM + \mu N + Q \sum_{j=l_0}^{\infty} j^{d-1} \ln \frac{1}{1 - e^{-bj-\mu}}, \quad (37)$$

$$\Phi(M, N, x_1, x_2) = iMx_1 + iNx_2 + Q \sum_{j=l_0}^{\infty} j^{d-1} \ln \frac{1 - e^{-bj-\mu}}{1 - e^{-bj-\mu-ijx_1-ix_2}}. \quad (38)$$

Как мы увидим ниже, фазовая функция входящего в правую часть равенства (36) интеграла имеет неположительную вещественную часть (так что интеграл заведомо не превосходит $4\pi^2$). Кроме того, она обращается в нуль при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Оказывается, что этот интеграл можно оценить снизу, используя рассуждения, близкие к методу Лапласа. В результате получается следующее утверждение:

ЛЕММА 7. *Существуют такие постоянные $C, m_0 > 0$, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Phi(M, N, x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \geqslant CN^{-m_0}. \quad (39)$$

Комбинируя леммы 6 и 7, получаем

$$\mathcal{N}(M, N) \geqslant \mathcal{N}_0(M, N) \geqslant Ce^{\mathcal{J}(M, N)} N^{-m_0}. \quad (40)$$

3.1.2. Теперь оценим сверху сумму (33).

ЛЕММА 8. *Для любого $c \in [0, (bj_0 + \mu)/2]$ имеет место оценка*

$$\mathcal{N}(M, N, \Delta) \leqslant 2e^{\mathcal{J}(M, N)} e^{-c\Delta + Kc^2/2}, \quad (41)$$

где

$$K = Q \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{j^{d-1} e^{bj/2 + \mu/2}}{(e^{bj/2 + \mu/2} - 1)^2}. \quad (42)$$

Следующая лемма показывает, как из этой оценки получается полезный для нашего доказательства результат:

ЛЕММА 9. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда существует постоянная $\tilde{C} > 0$, такая, что*

$$\min_{0 \leqslant c \leqslant (bj_0 + \mu)/2} \left(-c\Delta + \frac{Kc^2}{2} \right) \leqslant -\tilde{C} \ln N \chi(N). \quad (43)$$

3.1.3. Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 5. Комбинируя оценку (40) с леммами 8 и 9, получаем

$$\frac{\mathcal{N}(M, N, \Delta)}{\mathcal{N}(M, N)} \leqslant C^{-1} N^{m_0} e^{-\tilde{C} \ln N \chi(N)} \leqslant C_m N^{-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

с некоторыми постоянными C_m . Теорема доказана (осталось лишь доказать леммы, что будет сделано в последующих пунктах).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Леммы 6 и 8 имеют универсальный характер, а именно, доказательство их одно и то же для всех значений размерности d . Более того, конкретный вид кратностей $q_j = Qj^{d-1}$ в этих леммах несуществен (лишь бы сходились участвующие в формулировках ряды). Напротив, доказательства лемм 7 и 9 опираются на формулу для кратностей и проводятся отдельно для каждого диапазона размерностей, указанного в таблице, входящей в формулировку теоремы.

3.2. Доказательство лемм 6 и 8.

Доказательство леммы 6. Воспользуемся предложением 17 из приложения. В результате для $\mathcal{N}_0(M, N)$ получим формулу (110), (111), и, после указанных там преобразований, формулу (112), которая с точностью до обозначений совпадает с (36), (37), (38). Минимизация показателя экспоненты в первом сомножителе в (112) приводит к формулам вида (119), которые в рассматриваемой ситуации в точности означают, что параметры M, N, Q, b, l_0 и μ связаны соотношениями (25).

Доказательство леммы 8. Рассуждение, доказывающее эту лемму, аналогично проведенному в п. 2.3.2 работы [6] с некоторыми видоизменениями, вызванными тем фактом, что кратности, вообще говоря, не являются целыми и мы считаем не число вариантов, а меру множества вариантов.

Сумма $\mathcal{N}(M, N, \Delta)$ отвечает множеству $\mathcal{F}(M, N, \Delta)$ наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих соотношениям (21) и (34). По формуле Эйлера–Маклорена

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{Qj^{d-1}}{e^{bj+\mu} - 1} = Qb^{-d} \int_{bl}^{\infty} \frac{x^{d-1} dx}{e^{x+\mu} - 1} + R,$$

где остаток R удовлетворяет неравенству $|R| \leq \text{const } \Delta$ при любом выборе функции χ , входящей в определение Δ . Это означает, что множество $\mathcal{F}(M, N, \Delta)$ содержится во множестве наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j = N, \quad \sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j \leq M, \quad \left| \sum_{j=l}^{\infty} N_j - \sum_{j=l}^{\infty} \frac{Qj^{d-1}}{e^{bj+\mu} - 1} \right| > \Delta \quad (44)$$

(быть может, с другим выбором функции χ в определении Δ) и достаточно оценить сумму по этому последнему. Последнее неравенство в (44) можно переписать в виде

$$-\Delta \pm \sum_{j=l}^{\infty} (N_j - \bar{N}_j) \geq 0, \quad (45)$$

где

$$\bar{N}_j = \frac{Qj^{d-1}}{e^{bj+\mu} - 1}. \quad (46)$$

Пусть c – произвольное неотрицательное число. Поскольку b положительно, из соотношений (44), (45) вытекает, что на каждом из наборов в рассматриваемом множестве справедливо одно из двух неравенств

$$b \left(M - \sum_{j=l_0}^{\infty} jN_j \right) + \mu \left(N - \sum_{j=l_0}^{\infty} N_j \right) - c\Delta \pm c \sum_{j=l}^{\infty} (N_j - \bar{N}_j) \geq 0, \quad (47)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & e^{bM+\nu N-c\Delta-c \sum_{j=j_0}^{\infty} \bar{N}_j} e^{\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j (-bj-\mu+\theta_j c)} \\ & + e^{bM+\nu N-c\Delta+c \sum_{j=j_0}^{\infty} \bar{N}_j} e^{\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j (-bj-\mu-\theta_j c)} \geq 1, \end{aligned} \quad (48)$$

где $\theta_j = 0$ при $j < l$ и $\theta_j = 1$ при $j \geq l$. Кроме того, левая часть положительна вообще на любых наборах $\{N_j\}$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N, \Delta) \leq & e^{bM + \nu N - c\Delta - c \sum_{j=j_0}^{\infty} \bar{N}_j} \sum_{\{N_j\}} f(\{N_j\}) e^{\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j(-bj - \mu + \theta_j c)} \\ & + e^{bM + \nu N - c\Delta + c \sum_{j=j_0}^{\infty} \bar{N}_j} \sum_{\{N_j\}} f(\{N_j\}) e^{\sum_{j=l_0}^{\infty} N_j(-bj - \mu - \theta_j c)}, \end{aligned} \quad (49)$$

где суммирование производится по всем финитным наборам $\{N_j\}$, $j = l_0, l_0 + 1, \dots$, целых неотрицательных чисел, а

$$f(\{N_j\}) = \prod_{j=l_0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j)}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)}, \quad q_j = Qj^{d-1}. \quad (50)$$

Вычислим выражение в правой части равенства (49). Сумма по $\{N_j\}$ распадается в бесконечное произведение сумм по каждому из N_j от нуля до бесконечности. Вычислим такую сумму, обозначая N_j через k , а $e^{-bj - \mu \pm \theta_j c}$ через x :

$$\begin{aligned} \sum_{N_j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + N_j) e^{N_j(-bj - \mu \pm \theta_j c)}}{\Gamma(N_j + 1)\Gamma(q_j)} & \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q_j + k) x^k}{\Gamma(k + 1)\Gamma(q_j)} \\ & = (1 - x)^{-q_j} \equiv (1 - e^{-bj - \mu \pm \theta_j c})^{-q_j} \end{aligned} \quad (51)$$

по формуле бинома Ньютона. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M, N, \Delta) \leq & e^{bM + \nu N - c\Delta} \left(\exp \left\{ \sum_{j=l_0}^{\infty} \left(q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu + \theta_j c}} - c\theta_j \bar{N}_j \right) \right\} \right. \\ & \left. + \exp \left\{ \sum_{j=l_0}^{\infty} \left(q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu - \theta_j c}} + c\theta_j \bar{N}_j \right) \right\} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны проведенным в [6; loc. cit.] Именно, применяя формулу Тейлора с остаточным членом второго порядка к логарифму, стоящему в показателе экспоненты и пользуясь тем фактом, что

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj - \mu}} \right) = -\bar{N}_j \quad (53)$$

и что $l \geq j_0$, приходим к оценкам (41), (42).

3.3. Доказательство лемм 7 и 9. Мы должны доказать оценку (39), т.е. оценку $I(M, N) \geq CN^{-m_0}$ с некоторыми постоянными C и m_0 для интеграла

$$I(M, N) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Phi(M, N, x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (54)$$

где фазовая функция задается формулой (38), а также оценку (43). Доказательство будет проводиться отдельно для каждого из случаев, указанных в таблице в теореме 5. Прежде всего, однако, мы проведем вычисления, общие для всех этих случаев.

3.3.1. *Производные фазовой функции.* Вычислим производные фазовой функции $\Phi(x_1, x_2) = \Phi(M, N, x_1, x_2)$ интеграла (54) до порядка 3 включительно. Непосредственным дифференцированием получаем (первые два аргумента функции Φ для краткости не выписываем):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) = iM - i \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^d}{e^{bj+\mu+ijx_1+ix_2} - 1}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) = iN - i \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^{d-1}}{e^{bj+\mu+ij\varphi_1+i\varphi_2} - 1}. \quad (56)$$

В соответствии с общими формулами (121)–(122) из приложения, видим, что, в частности,

$$\Phi(0, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}(0, 0) = 0. \quad (57)$$

Снова дифференцируя, получаем матрицу вторых производных:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x_1, x_2) = - \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^{d-1}e^{bj+\mu+ijx_1+ix_2}}{(e^{bj+\mu+ijx_1+ix_2} - 1)^2} \begin{pmatrix} j^2 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

В частности, в соответствии с (123) матрица

$$\Phi''(0, 0) = - \begin{pmatrix} \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^{d+1}e^{bj+\mu}}{(e^{bj+\mu} - 1)^2} & \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^d e^{bj+\mu}}{(e^{bj+\mu} - 1)^2} \\ \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^d e^{bj+\mu}}{(e^{bj+\mu} - 1)^2} & \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{Qj^{d-1} e^{bj+\mu}}{(e^{bj+\mu} - 1)^2} \end{pmatrix} \quad (59)$$

отрицательно определена.

Наконец, для третьих производных получаем формулу

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^k \partial x_2^{3-k}} = iQ \sum_{j=l_0}^{\infty} j^{d-1+k} \frac{e^{2(bj+\mu+ijx_1+ix_2)} + e^{bj+\mu+ijx_1+ix_2}}{(e^{bj+\mu+ijx_1+ix_2} - 1)^3}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (60)$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки этих производных. Поскольку

$$\left| \frac{1}{e^a - 1} \right| \leq \frac{1}{e^{\operatorname{Re} a} - 1}$$

при $\operatorname{Re} a > 0$, из (60) легко получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^k \partial x_2^{3-k}} \right| \leq \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{2Qj^{d-1+k}e^{2(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^3}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (61)$$

Введем обозначение

$$\Sigma_{s,m} \equiv \Sigma_{s,m}(b, \mu, l_0) = \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{j^s e^{(m-1)(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^m}. \quad (62)$$

Тогда нужные нам в дальнейшем формулы можно кратко записать в виде

$$N = Q\Sigma_{d-1,1}, \quad K = Q\Sigma_{d-1,2}(b/2, \mu/2, l_0), \quad (63)$$

$$\Phi''(0,0) = -Q \begin{pmatrix} \Sigma_{d+1,2} & \Sigma_{d,2} \\ \Sigma_{d,2} & \Sigma_{d-1,2} \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$\left| \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x_1^k \partial x_2^{3-k}} \right| \leq 2Q\Sigma_{d-1+k,3}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (65)$$

Оценки величин (62) даны в лемме 19 в приложении.

Выведем еще оценку для вещественной части фазовой функции $\Phi(x_1, x_2)$.

ЛЕММА 11. *Справедливы формула и оценка*

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) &= -Q \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \ln \frac{|1 - e^{-bj - \mu - ijx_1 - ix_2}|}{1 - e^{-bj - \mu}} \\ &\leq -CQ \sum_{j=1}^{\infty} j^{d-1} \min \left\{ 1, \frac{e^{-bj - \mu}}{(1 - e^{-bj - \mu})^2} (1 - \cos(jx_1 + x_2)) \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство в первой строке формулы (66) доказывается непосредственной выкладкой.

Чтобы доказать оценку, рассмотрим отдельное слагаемое в сумме (66), обозначив для краткости

$$\delta = bj + \mu, \quad \gamma = jx_1 + x_2. \quad (67)$$

Мы хотим оценить выражение

$$\ln \frac{|1 - e^{-\delta - i\gamma}|}{1 - e^{-\delta}}. \quad (68)$$

Заметим, что

$$|1 - e^{-\delta - i\gamma}|^2 = (1 - e^{-\delta})^2 \left(1 + \frac{2e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \gamma) \right), \quad (69)$$

так что

$$\frac{|1 - e^{-\delta - i\gamma}|}{1 - e^{-\delta}} = \sqrt{1 + \frac{2e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \gamma)} \geq 1, \quad (70)$$

причем равенство имеет место только если $\cos \gamma = 1$. Отсюда сразу вытекает, что $\operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) \leq 0$. Более того, существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $\delta > 0$ и любого $\gamma \in \mathbb{R}$ имеет место оценка

$$\ln \frac{|1 - e^{-\delta - i\gamma}|}{1 - e^{-\delta}} \geq C \min \left\{ 1, \frac{e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \gamma) \right\}. \quad (71)$$

Действительно, положим

$$z = \frac{e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \gamma).$$

Поскольку $z \geq 0$, то

$$\ln \sqrt{1+2z} = \int_1^{\sqrt{1+2z}} \frac{d\tau}{\tau} \geq \frac{\sqrt{1+2z} - 1}{\sqrt{1+2z}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2z}}.$$

Остается заметить, что

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+2z}} \geq C \min\{1, z\}.$$

Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению конкретных случаев. Во всех этих случаях схема доказательства одна и та же, а именно:

- Выписываются оценки для матрицы $\Phi''(0, 0)$.
- Исходя из этих оценок, выбирается оценивающийся снизу и сверху через степени N большой параметр Λ (в большинстве случаев $\Lambda \asymp N$) и делается замена переменных $x_1 = a_1\varphi_1$, $x_2 = a_2\varphi_2$ (где a_1 и a_2 оцениваются через некоторую степень N), такая, что для новой функции $\Psi(\varphi_1, \varphi_2)$, определяемой равенством

$$\Phi(x_1, x_2) = \Lambda \Psi(x_1/a_1, x_2/a_2), \quad (72)$$

матрица $\Psi''(0, 0)$ равномерно ограничена и равномерно отрицательно определена при $b \rightarrow 0$.

- Выписываются оценки для третьих производных функции Ψ .
- С помощью этих оценок строится прямоугольник Π , в котором справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) \leq -C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad (73)$$

и круг $D \subset \Pi$ радиуса, оценивающегося через некоторую отрицательную степень N , в котором разность между Ψ и квадратичной частью ее ряда Тейлора в начале координат не превосходит по абсолютной величине $c\Lambda^{-1}$, где постоянная c достаточно мала, причем D в то же самое время достаточно велик для того, чтобы в силу неравенства (73) вещественная часть функции Ψ в $\Pi \setminus D$ удовлетворяла оценкам, гарантирующим, что

$$|e^{\Lambda\Psi}| \leq C_m N^{-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (74)$$

(примером такой оценки является $\operatorname{Re} \Psi \leq -C\Lambda^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$).

- С помощью леммы 11 показывается, что аналогичные оценки верны и вне Π .
- Теперь интеграл по кругу D удовлетворяет оценке, требуемой в лемме 7, а интеграл по дополнению этого круга убывает быстрее любой степени N , так что его добавление не изменяет оценки.
- Неравенство (43) (лемма 9) доказывается предъявлением конкретного s из отрезка $[0, bj_0 + \mu]$, на котором требуемая оценка достигается.

3.3.2. *Случай $d > 2$, $0 < \mu < 1$.* В этом случае $Q = 1$ и $l_0 = 1$. Лемма 19 дает оценки

$$N \asymp b^{-d}, \quad \Phi''(0, 0) \asymp - \begin{pmatrix} b^{-d-2} & b^{-d-1} \\ b^{-d-1} & b^{-d} \end{pmatrix}$$

Сделаем замену переменных

$$x_1 = b\varphi_1, \quad x_2 = \varphi_2$$

и положим $\Lambda = b^{-d}$,

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = b^d \Phi(b\varphi_1, \varphi_2), \quad (75)$$

так что

$$\Phi(x_1, x_2) = b^{-d} \Psi(x_1/b, x_2). \quad (76)$$

Пользуясь формулами (63)–(65) и леммой 19, получаем, что все вторые производные функции Ψ равномерно ограничены, равно как и все ее третьи производные, за исключением $\partial^3 \Psi / \partial \varphi_2^3$, для которой справедливы следующие оценки:

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varphi_2^3} = \begin{cases} O(1), & d > 3, \\ O(1 + |\ln b|), & d = 3, \ 0 \leq \mu \leq b, \\ O(1 + |\ln \mu|), & d = 3, \ 1 > \mu > b, \\ O(b^{d-3}), & 2 < d < 3, \ 0 \leq \mu \leq b, \\ O(\mu^{d-3}), & 2 < d < 3, \ 1 > \mu < b. \end{cases}$$

Пользуясь формулой Эйлера–Маклорена, матрицу $\Phi''(0, 0)$ можно записать в виде

$$\Phi''(0, 0) = - \left(\begin{array}{cc} \int_0^\infty \frac{x^{d+1} dx}{(e^{x+\mu} - 1)^2} & \int_0^\infty \frac{x^d dx}{(e^{x+\mu} - 1)^2} \\ \int_0^\infty \frac{x^d dx}{(e^{x+\mu} - 1)^2} & \int_0^\infty \frac{x^{d-1} dx}{(e^{x+\mu} - 1)^2} \end{array} \right) + o(1),$$

откуда следует равномерная отрицательная определенность этой матрицы при $b \rightarrow 0$. Действительно, первое слагаемое можно записать в виде матрицы скалярных произведений

$$\begin{pmatrix} (x, x) & (x, 1) \\ (1, x) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, d\omega)$ относительно меры

$$d\omega = \frac{x^{d-1} dx}{(e^{x+\mu} - 1)^2}.$$

Прямоугольник Π , в котором выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) \leq -C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

задается неравенствами

$$|\varphi_1| \leq c_1, \quad |\varphi_2| \leq c_2 Z^{-1},$$

где постоянные c_1 и c_2 достаточно малы, а

$$Z = \begin{cases} 1, & d > 3, \\ 1 + |\ln b|, & d = 3, \\ b^{d-3}, & 2 < d < 3, \ 0 \leq \mu \leq b, \\ \mu^{d-3}, & 2 < d < 3, \ 1 > \mu < b. \end{cases}$$

Круг D , в котором разность между Ψ и квадратичной частью ее ряда Тейлора в нуле не превышает достаточно малой постоянной, есть круг радиуса

$$r = cb^{d/3} Z^{-1/3}.$$

При этом, очевидно, $r < \varepsilon Z^{-1}$ для сколь угодно малого ε при $b \rightarrow 0$, так что $D \subset \Pi$. Стоящая в подынтегральном выражении экспонента экспоненциально мала при $\varphi \in \Pi \setminus D$, поскольку

$$b^{-d} r^2 \asymp \begin{cases} b^{-d/3}, & d > 3, \\ b^{-1}(1 + |\ln b|), & d = 3, \\ b^{2-d}, & 2 < d < 3. \end{cases}$$

Оценим вещественную часть показателя экспоненты в подынтегральном выражении вне прямоугольника Π . Для этого заметим, что (в координатах (x_1, x_2)) внешность прямоугольника Π состоит из точек, в которых либо

$$c_1 b < |x_1| \leq \pi, \quad (77)$$

либо

$$|x_1| < c_1 b, \quad c_2 Z^{-1} |x_2| \leq \pi. \quad (78)$$

Воспользуемся леммой 19. В случае (77), выбирая произвольно величины $y_2 > y_1 > 0$, можем записать

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) &\leq -C \sum_{y_1/b \leq j \leq y_2/b} j^{d-1} (1 - \cos(jx_1 + x_2)) \\ &\leq C b^{1-d} \sum_{y_1/b \leq j \leq y_2/b} (1 - \cos(jx_1 + x_2)) \\ &\leq -C b^{-d} (y_1 - y_2 - b - b |\sin bx_1/2|^{-1}) \leq -C (y_1 - y_2 - b - C_1), \end{aligned}$$

и требуемая оценка получается, если выбрать y_1 и y_2 так, чтобы разность $y_2 - y_1$ была достаточно велика. В случае (78) оценка проводится следующим образом. Пусть сначала $d > 3$. Тогда

$$\operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) \leq -C \sum_{y_1/b \leq j \leq y_2/b} j^{d-1} (1 - \cos(jx_1 + x_2)),$$

причем

$$|jx_1 + x_2| \geq c_2 - c_1 y_2 > 0,$$

если взять y_2 достаточно малым. Но тогда

$$1 - \cos(jx_1 + x_2) > \varepsilon > 0,$$

и мы получаем

$$\operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) \leq -C b^{-d}.$$

Аналогичные вычисления дают требуемый результат и при $2 < d \leq 3$, причем оказывается, что

$$\operatorname{Re} \Phi(x_1, x_2) \leq \begin{cases} -C b^{-3}/|\ln b|, & d = 3, \\ -C b^{(2-d)d}, & 2 < d < 3. \end{cases}$$

Докажем, наконец, неравенство (43). В рассматриваемом случае

$$K \asymp b^{-d},$$

и мы можем взять

$$c = \varepsilon b^{d/2} \sqrt{\ln N \chi(N)},$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

3.3.3. Случай $d > 0$, $\mu > 1$, $e^\mu \leq Cb^{-d+\varepsilon}$. В этом случае $Q = l_0 = 1$. Лемма 19 дает оценки

$$N \asymp e^{-\mu} b^{-d}, \quad \Phi''(0, 0) \asymp - \begin{pmatrix} e^{-\mu} b^{-d-2} & e^{-\mu} b^{-d-1} \\ e^{-\mu} b^{-d-1} & e^{-\mu} b^{-d} \end{pmatrix}$$

Сделаем замену переменных

$$x_1 = b\varphi_1, \quad x_2 = \varphi_2$$

и положим

$$\Lambda = e^{-\mu} b^{-d}, \quad \Psi(\varphi_1, \varphi_2) = \Lambda^{-1} \Phi(b\varphi_1, \varphi_2),$$

так что

$$\Phi(x_1, x_2) = \Lambda \Psi(x_1/b, x_2).$$

Матрица $\Psi''(0)$ равномерно ограничена и равномерно отрицательно определена; третьи производные функции Ψ также равномерно ограничены. Прямоугольник Π , в котором выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) \leq -C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

задается неравенствами

$$|\varphi_1| \leq c_1, \quad |\varphi_2| \leq c_2,$$

где постоянные c_1 и c_2 достаточно малы. Круг $D \subset \Pi$, в котором разность между Ψ и квадратичной частью ее ряда Тейлора в нуле не превышает достаточно малой постоянной, есть круг радиуса

$$r = c\Lambda^{-1/3}.$$

При $\varphi \in \Pi \setminus D$ выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C\Lambda^{1/3}$$

Вещественную часть показателя экспоненты в подынтегральном выражении вне прямоугольника Π удовлетворяет оценке

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C\Lambda$$

Чтобы доказать это, в оценке (66) нужно взять члены с $j \in [y_1/b, y_2/b]$ при подходящем выборе y_1 и y_2 .

Для доказательства неравенства (43) достаточно взять

$$c = e^{\mu/2} b^{d/2} \sqrt{\ln N \chi(N)} \leq \mu/2$$

при достаточно больших N .

3.3.4. Случай $d = 2$, $0 \leq \mu \leq b$. В этом случае $Q = l_0 = 1$. Лемма 19 дает оценки

$$N \asymp b^{-2}, \quad \Phi''(0, 0) \asymp - \begin{pmatrix} b^{-4} & b^{-3} \\ b^{-3} & b^{-2} |\ln b| \end{pmatrix}$$

Положим $\Lambda = b^{-2}$, сделаем замену переменных

$$x_1 = b\varphi_1, \quad x_2 = \varphi_2 / \sqrt{|\ln b|}$$

и определим

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = \Lambda^{-1} \Phi(b\varphi_1, \varphi_2 / \sqrt{|\ln b|}),$$

так что

$$\Phi(x_1, x_2) = \Lambda \Psi(x_1/b, x_2 \sqrt{|\ln b|}).$$

Тогда матрица $\Psi''(0)$ равномерно ограничена и равномерно отрицательно определена, а все третьи производные также равномерно ограничены, кроме

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varphi_2^3} = O(b^{-1} |\ln b|^{-3/2})$$

Прямоугольник Π , в котором выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) \leq -C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

задается неравенствами

$$|\varphi_1| \leq c_1, \quad |\varphi_2| \leq c_2 b |\ln b|^{3/2},$$

где постоянные c_1 и c_2 достаточно малы. Круг $D \subset \Pi$, в котором разность между Ψ и квадратичной частью ее ряда Тейлора в нуле не превышает достаточно малой постоянной, есть круг радиуса

$$r = cb \sqrt{|\ln b|}.$$

На окружности ∂D выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C |\ln b|,$$

откуда нетрудно вывести, что интеграл по кругу D имеет порядок b^2 , а интеграл по $\Pi \setminus D$ оценивается через $b^2 e^{-C|\ln b|} = b^{2+C}$, т.е. мал по сравнению с интегралом по D .

Вещественную часть показателя экспоненты в подынтегральном выражении вне прямоугольника Π удовлетворяет оценке

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C (\ln b)^2$$

(так что интеграл убывает быстрее любой степени b). Чтобы доказать это, в оценке (66) нужно взять члены с $j \in [y_1/b, y_2/b]$ при

$$c_1 b < |x_1| \leq \pi,$$

и члены с $j \in [y_1 |\ln b|^{3/2}, y_2 |\ln b|^{3/2}]$ при

$$|x_1| < c_1 b, \quad c_2 b |\ln b|^{3/2} \leq |x_2| \leq \pi.$$

Для доказательства неравенства (43) достаточно взять

$$c = b/2.$$

3.3.5. *Случай* $d < 0$, $0 \leq \mu \leq 1$. Напомним, что в этом случае требуется, чтобы $Ql_0^d \geq CN^\gamma$ и $bl_0 \leq C_1$. Обозначим

$$\Lambda = Ql_0^d.$$

Предположим сначала, что $bl_0 \geq \mu$. Лемма 19 дает оценки

$$N \asymp \Lambda(bl_0)^{-1}, \quad \Phi''(0, 0) \asymp - \begin{pmatrix} \Lambda b^{-2} & \Lambda b^{-1}(bl_0)^{-1} \\ \Lambda b^{-1}(bl_0)^{-1} & \Lambda(bl_0)^{-2} \end{pmatrix}$$

Сделаем замену переменных

$$x_1 = b\varphi_1, \quad x_2 = bl_0\varphi_2$$

и положим

$$\Psi(\varphi_1, \varphi_2) = \Lambda^{-1} \Phi(b\varphi_1, (bl_0)^{-1}\varphi_2),$$

так что

$$\Phi(x_1, x_2) = \Lambda \Psi\left(\frac{x_1}{b}, \frac{x_2}{(bl_0)^{-1}}\right).$$

Тогда матрица $\Psi''(0)$ равномерно ограничена и равномерно отрицательно определена. Все третьи производные функции Ψ также равномерно ограничены. Прямоугольник Π , в котором выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi_1, \varphi_2) \leq -C(\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

задается неравенствами

$$|\varphi_1| \leq c_1, \quad |\varphi_2| \leq c_2,$$

где постоянные c_1 и c_2 достаточно малы. Круг $D \subset \Pi$, в котором разность между Ψ и квадратичной частью ее ряда Тейлора в нуле не превышает достаточно малой постоянной, есть круг радиуса

$$r = c\Lambda^{-1/3}.$$

При $\varphi \in \Pi \setminus D$ выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C\Lambda^{1/3} \leq -\tilde{C}N^{\gamma/3}$$

Вещественную часть показателя экспоненты в подынтегральном выражении вне прямоугольника Π удовлетворяет оценке

$$\operatorname{Re} \Phi = \Lambda \operatorname{Re} \Psi \leq -C\Lambda$$

Чтобы доказать это, в оценке (66) нужно взять члены с $j \in (y_1/b, y_2/b)$ при

$$bc_1 < |x_1| \leq \pi,$$

и члены с $j \in (y_1l_0, y_2l_0)$ при

$$|x_1| < c_1b, \quad c_2bl_0 \leq |x_2| \leq \pi.$$

Для доказательства неравенства (43) заметим, что

$$K \asymp \Lambda(bl_0)^{-2} \asymp N(bl_0)^{-1}, \quad \Delta = N^{1-\gamma/2} \sqrt{\ln N \chi(N)},$$

так что минимум достигается в точке

$$c = \Delta/K = bl_0 N^{1-\gamma/2} \sqrt{\ln N \chi(N)} \in \left(0, \frac{bl_0 + \mu}{2}\right),$$

и удовлетворяет (43).

Доказательство для случая, когда $1 \geq \mu > bl_0$ проводится аналогичным образом.

3.3.6. Случай $0 \leq d \leq 2$. Доказательство в этом случае следует той же общей схеме, что и в указанных выше случаях, и мы опускаем его. В частности, конкретные оценки при $1 \leq d \leq 2$ аналогичны приведенным в работе [5], а при $d = 1$ – в следующем ниже дополнении к настоящей статье.

4. Дополнение. Оценки снизу для вероятностей отклонений от бозе–эйнштейновского распределения в одномерном случае

В работе [5] были исследованы вероятности отклонений от бозе–эйнштейновского распределения в системе произвольного (нефиксированного) числа частиц с ограничением на суммарную энергию для случая, когда размерность d лежит в интервале $(1, 2)$. Однако во многих отношениях наиболее интересный случай $d = 1$ там рассмотрен не был. Он изучается в данном разделе.

Итак, рассмотрим всевозможные наборы целых неотрицательных чисел N_j , $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{j=1}^{\infty} j N_j \leq M, \quad (79)$$

где M – неотрицательное целое число. Все такие наборы $\{N_j\}$ (их при фиксированном M конечное число) будем считать равновероятными. Будем изучать поведение кумулятивного распределения $\sum_{j=l}^{\infty} N_j$ при $M \rightarrow \infty$. Как и в [5], через $\mathcal{N}(M)$ обозначим общее число наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих условию (79), а через $\mathcal{N}(M, \mathcal{U})$ – число наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих (79) и заданному дополнительному условию $\mathcal{U}$. Положим

$$b = \frac{\pi}{\sqrt{6M}}. \quad (80)$$

Это параметр, стремящийся к нулю при $M \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\gamma \in (0, 1)$, и пусть l – целое такое, что

$$c_1 b^{-\gamma} \leq l \leq c_2 b^{-\gamma} \quad (81)$$

для некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\chi(x)$ – растущая на бесконечности положительная функция, то существуют такие постоянные C_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, что при $M \rightarrow \infty$ выполнены оценки

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}\right| > M^{1/2-\gamma/4} \sqrt{\ln M \chi(M)}\right)}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m M^{-m}. \quad (82)$$

2. Для любой постоянной $C > 0$ существует такая постоянная $\tilde{C} > 0$, что

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}\right| > CM^{1/2-\gamma/4}\right)}{\mathcal{N}(M)} \geq \tilde{C}. \quad (83)$$

Можно дать и более тонкую оценку для того случая, когда величина l растет с M очень медленно (с логарифмической скоростью).

ТЕОРЕМА 13. Пусть l – целое такое, что

$$c_1(\ln M)^\varepsilon \leq l \leq c_2(\ln M)^\varepsilon \quad (84)$$

для некоторых положительных постоянных c_1 и c_2 и некоторого показателя $\varepsilon > 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\chi(x)$ – растущая на бесконечности положительная функция, то существуют такие постоянные C_m , $m = 0, 1, 2, \dots$, что при $M \rightarrow \infty$ выполнены оценки

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}\right| > M^{1/2}(\ln M)^{1-\varepsilon} \chi(M)\right)}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m M^{-m}, \quad (85)$$

если $\varepsilon \leq 1$ и

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}\right| > M^{1/2}(\ln M)^{(1-\varepsilon)/2} \chi(M)\right)}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m M^{-m}, \quad (86)$$

если $\varepsilon > 1$.

2. Для любой постоянной $C > 0$ существует такая постоянная $\tilde{C} > 0$, что

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left|\sum_{j=l}^{\infty} N_j - b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1}\right| > CM^{1/2}\right)}{\mathcal{N}(M)} \geq \tilde{C}. \quad (87)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем 12 и 13. 1. Переход от интегралов к суммам. Как и в [5], мы заменим входящие в формулировки теорем интегралы суммами. А именно, определим b из соотношения

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{e^{bj} - 1}, \quad (88)$$

а интеграл

$$b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} \quad (89)$$

заменим на сумму

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{e^{bj} - 1}. \quad (90)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть β и b связаны с M соотношениями

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{e^{bj} - 1} = \frac{\pi^2}{6} \beta^{-2}. \quad (91)$$

Тогда

$$\beta = b(1 + O(b)), \quad b = \beta(1 + O(\beta)). \quad (92)$$

Если, кроме того,

$$bl \leq c \quad (93)$$

для некоторой постоянной $c > 0$, то

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{e^{bj} - 1} - \beta^{-1} \int_{\beta l}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = O((bl)^{-1}). \quad (94)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 14. По формуле Эйлера–Маклорена (124)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{e^{bj} - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^{bx} - 1} + Q_0 = b^{-2} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} + Q_0 = \frac{\pi^2}{6} b^{-2} + Q_0,$$

где

$$|Q_0| \leq \int_0^{\infty} \left| \left(\frac{x}{e^{bx} - 1} \right)' \right| dx = b^{-1} \int_0^{\infty} \left| \frac{e^x - x e^x - 1}{(e^x - 1)^2} \right| dx,$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{e^{bj} - 1} = \frac{\pi^2}{6} b^{-2} (1 + O(b)),$$

откуда с учетом (91) сразу следует (92). Для доказательства соотношения (94) воспользуемся формулой Эйлера–Маклорена (125):

$$\sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{e^{bj} - 1} = \int_l^{\infty} \frac{dx}{e^{bx} - 1} + Q_1 = b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} + Q_1,$$

где

$$|Q_1| \leq \int_l^{\infty} \left| \left(\frac{1}{e^{bx} - 1} \right)' \right| dx = \int_{bl}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = O((bl)^{-1}).$$

Далее,

$$b^{-1} \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} - \beta^{-1} \int_{\beta l}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = b^{-1} \int_{bl}^{\beta l} \frac{dx}{e^x - 1} + (b^{-1} - \beta^{-1}) \int_{bl}^{\infty} \frac{dx}{e^x - 1} \equiv I_1 + I_2.$$

При этом

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C b^{-1} (bl)^{-1} |\beta l - bl| = C \frac{|\beta - b|}{b^2} = \frac{bO(b)}{b^2} = O(1), \\ I_2 &\leq C (b^{-1} - \beta^{-1}) |\ln(bl)| = C \beta^{-1} b^{-1} |\beta - b| |\ln(bl)| = O(|\ln(bl)|). \end{aligned}$$

Предложение 14 доказано.

Из этого предложения сразу вытекает, что замена (80) на (88) и (89) на (90) в формулировках теорем 12 и 13 законна, поскольку возникающая при этом ошибка может быть скомпенсирована подходящим выбором функции ψ в (82) и (85) и постоянной C в (83) и (87). Итак, будем доказывать утверждения, получающиеся из теорем 12 и 13 указанной заменой.

Оценки для общего числа вариантов. Пусть $\mathcal{N}_0(M)$ – число наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j = M, \quad (95)$$

так что $\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{N}_0(M)$. Дословно как и в [5; лемма 10] доказывается, что справедливо следующее утверждение:

ЛЕММА 15. *Справедлива оценка*

$$\mathcal{N}_0(M) \asymp b^{3/2} e^{\tilde{F}_0(M)}, \quad (96)$$

где b и M связаны соотношением (88), а

$$\tilde{F}_0(M) = bM + F_0(b) \equiv bM + \sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{1}{1 - e^{-bj}}. \quad (97)$$

Оценка сверху для числа вариантов с уклонениями. Пусть теперь

$$\Delta = M^{1/2 - \gamma/4} \sqrt{\ln M \psi(M)} \quad (98)$$

или

$$\Delta = M^{1/2} (\ln M)^{1-\varepsilon} \psi(M), \quad \varepsilon \in (0, 1], \quad \Delta = M^{1/2} (\ln M)^{(1-\varepsilon)/2} \psi(M), \quad \varepsilon \in (1, \infty); \quad (99)$$

для краткости числитель соответственно в (82) и (85), (86) будем обозначать через $\mathcal{N}(M, \Delta)$. Тогда, как и в [5; (30)–(32)], получаем

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq 2 \exp \left\{ \tilde{F}_0(M) - c\Delta + \frac{Kc^2}{2} \right\} \quad (100)$$

для любого c из отрезка

$$0 \leq c \leq \frac{bl}{2}, \quad (101)$$

где

$$K = \sum_{j=l}^{\infty} \frac{e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2} \asymp b^{-2} l^{-1}, \quad (102)$$

и, следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(M, \Delta)}{\mathcal{N}(M)} \leq \frac{\mathcal{N}(M, \Delta)}{\mathcal{N}_0(M)} \leq C b^{3/2} \exp \left\{ -c\Delta + \frac{Kc^2}{2} \right\}, \quad (103)$$

и для доказательства оценок (82), (85), (86) остается лишь подобрать такое c из отрезка (101), чтобы правая часть в (103) убывала быстрее любой степени M^{-1} при $M \rightarrow \infty$. Предъявим соответствующие c , опустив тривиальные выкладки:

формула	условие на l	значение c
(82)	$l \asymp b^{-\gamma}, \gamma \in (0, 1)$	$c = b^{1-\gamma/2} \sqrt{\ln M \chi(M)}$
(85)	$l \asymp (\ln M)^\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1]$	$c \sim b(\ln M)^\varepsilon$
(86)	$l \asymp (\ln M)^\varepsilon, \varepsilon > 1$	$c \sim b(\ln M)^{(\varepsilon+1)/2} \sqrt{\chi(M)}$

Оценки снизу для числа вариантов с уклонениями. Нам остается доказать оценки (83) и (87).

Обозначим через $\mathcal{N}_0(M, S)$ число наборов $\{N_j\}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{\infty} j N_j = M, \quad \sum_{j=l}^{\infty} N_j = S. \quad (104)$$

ЛЕММА 16. *Предположим, что*

$$\left| S - \sum_{j=l}^{\infty} \frac{1}{e^{bj} - 1} \right| \leqslant C M^{1/2-\gamma/4}, \quad (105)$$

где число γ взято из условия (81), если l удовлетворяет этому условию, и $\gamma = 0$, если l удовлетворяет условию (84). Тогда

$$\mathcal{N}_0(M, S) \geqslant \tilde{C} b^{1-\gamma/2} \mathcal{N}_0(M) \quad (106)$$

для некоторой постоянной $\tilde{C} > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 16 воспроизводит рассуждение на с. 965–973 работы [5] с небольшими изменениями. Именно, в оценках вторых и третьих производных функций $F(\nu_1, \nu_2)$ и $\Phi(x_1, x_2)$ [5; (56)–(57)] в некоторых случаях возникает дополнительный логарифмический множитель $\ln(bl)$. Это касается производных $\partial^2 F/(\partial \nu_1 \partial \nu_2)$ и $\partial^3 F/(\partial \nu_1^2 \partial \nu_2)$, а также соответствующих производных функции $\Phi(x_1, x_2)$. В частности, это множитель появляется в качестве коэффициента при $\varphi^2 |\psi|$ в формуле [5; (106)]. Нетрудно заметить, однако, что на окончательные оценки это не влияет.

Окончание доказательства оценок (83) и (87) такое же, как и в [5; п. 2.3.4].

Теоремы 12 и 13 доказаны.

5. Приложение. Вспомогательные результаты

5.1. О мере множества решений системы диофантовых уравнений. Рассмотрим систему диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{lj} N_j = B_l, \quad l = 1, \dots, n, \quad (107)$$

где $N_j, j = 1, 2, \dots$ – неотрицательные целочисленные переменные, а A_{lj} и B_l – заданные целые числа.

Пусть на множестве наборов $\{N_j\}$ задана мультипликативная мера (4), задаваемая функциями (8), отвечающими некоторым кратностям q_j , $j = 1, 2, \dots$. Нас интересует мера множества решений системы (107).

Рассуждение, аналогичное (12)–(15), позволяет доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Предположим, что существуют такие вещественные числа $\nu_1, \dots, \nu_n$, что*

$$\sum_{l=1}^n \nu_l B_l > 0, \quad \sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj} > 0 \quad \text{при всех } j = 1, 2, \dots, \quad (108)$$

и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j \exp \left\{ - \sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj} \right\} \quad (109)$$

сходится. (Набор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, удовлетворяющий этим условиям, будем называть допустимым.) Тогда множество решений системы диофантовых уравнений (107) конечно, и его мера $\mathcal{N}$ может быть вычислена по формуле

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi - i\nu_1}^{\pi - i\nu_1} \dots \int_{-\pi - i\nu_n}^{\pi - i\nu_n} e^{\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} d\varphi_1 \dots d\varphi_n, \quad (110)$$

где интеграл по переменной φ_l берется по отрезку $[-\pi - i\nu_l, \pi - i\nu_l]$ комплексной плоскости, параллельному вещественной оси, а

$$\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = i \sum_{l=1}^n B_l \varphi_l + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-i \sum_{l=1}^n \varphi_l A_{lj}}}. \quad (111)$$

Выражение (110) можно преобразовать (производя сдвиг на $i\nu_l$ по каждой из переменных интегрирования φ_l) таким образом, чтобы интегрирование выполнялось по вещественному тору T^n с координатами $\varphi_l \bmod 2\pi$, $l = 1, \dots, n$. Тогда для $\mathcal{N}$ получается выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \nu_l B_l + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}} \right\} \\ \times \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \exp \left\{ i \sum_{l=1}^n B_l \varphi_l + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}}{1 - e^{-\sum_{l=1}^n (\nu_l + i\varphi_l) A_{lj}}} \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (112)$$

Запись (112) удобна тем, что вещественная часть показателя экспоненты в интеграле неположительна (и обращается в нуль при $\varphi = 0$). Поэтому выражение на второй строчке в формуле (112) не превосходит единицы, и можно получить оценку сверху для $\mathcal{N}$, минимизируя по переменным $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ показатель экспоненты в первом сомножителе:

$$\sum_{l=1}^n \nu_l B_l + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}} \rightarrow \min_{\nu}. \quad (113)$$

Минимизацию здесь следует проводить по множеству допустимых ν . Это множество, очевидно, выпукло; мы будем считать, что оно имеет непустую внутренность (это условие выполнено в интересующих нас приложениях). Обозначим

$$F(\nu) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}} \quad (114)$$

и вычислим первые и вторые производные этой функции по ν :

$$\frac{\partial F(\nu)}{\partial \nu_r} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j A_{rj}}{e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}} - 1}, \quad (115)$$

$$\frac{\partial^2 F(\nu)}{\partial \nu_r \partial \nu_s} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j A_{rj} A_{sj} e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}}{(e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}} - 1)^2}. \quad (116)$$

Матрица вторых производных функции $F(\nu)$ есть не что иное, как матрица Грама

$$\frac{\partial^2 F(\nu)}{\partial \nu^2} = \|(\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s)\|_{r,s=1}^n \quad (117)$$

векторов $\mathbf{A}_r = (A_{r1}, A_{r2}, \dots)$ в пространстве l^2 последовательностей с весом

$$\frac{e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}}{(e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}} - 1)^2}.$$

Если эти векторы линейно независимы (что всегда можно предполагать, удаляя из (107) линейно зависимые уравнения), то, таким образом, матрица вторых производных функции F положительно определена, т.е. эта функция выпукла. Задачу минимизации (113) можно, таким образом, понимать как задачу вычисления преобразования Лежандра

$$\tilde{F}(B) = \min_{\nu} (B\nu + F(\nu)), \quad (118)$$

где

$$B = (B_1, \dots, B_n), \quad B\nu = B_1\nu_1 + \dots + B_n\nu_n,$$

определенной на выпуклом множестве выпуклой функции $F(\nu)$.

Предположим, что минимум достигается во внутренней точке (это всегда так в интересующих нас случаях). Уравнения точки минимума имеют (с учетом (115)) вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j A_{rj}}{e^{\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}} - 1} = B_r, \quad r = 1, \dots, n. \quad (119)$$

В силу строгой выпуклости эта точка единственна и гладко зависит от B_l . Рассмотрим теперь фазовую функцию

$$\Phi(\varphi) = i \sum_{l=1}^n B_l \varphi_l + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-\sum_{l=1}^n \nu_l A_{lj}}}{1 - e^{-\sum_{l=1}^n (\nu_l + i\varphi_l) A_{lj}}} \quad (120)$$

входящего в (112) интеграла, в которую в качестве ν подставлено решение уравнений (119). Тогда

$$\Phi(0) = 0, \quad (121)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(0) = iB - i \frac{\partial F}{\partial \nu}(\nu) = 0 \quad (122)$$

в силу уравнений (119), и, наконец,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}(0) = i^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \nu^2}(0) = -\|(\mathbf{A}_l, \mathbf{A}_s)\|_{l,s=1}^n < 0. \quad (123)$$

В нужных нам случаях эти соотношения позволяют оценить входящий в формулу (112) интеграл методом, подобным методу Лапласа и доказать, что (с точностью до множителя, степенным образом зависящего от входящего в задачу большого параметра) мера $\mathcal{N}$ множества решений системы (107) задается выражением в первой строчке в формуле (112).

5.2. Формулы Эйлера–Маклорена. Для удобства читателя, как и в [5], мы приводим используемые нами варианты формул Эйлера–Маклорена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке² $[0, n]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(j) = \int_0^{n-1} f(x) dx + Q_0 \quad (124)$$

$$= \int_1^n f(x) dx + Q_1 \quad (125)$$

$$= \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + Q_2, \quad (126)$$

где остаточные члены удовлетворяют оценкам

$$|Q_0| \leq \int_0^{n-1} |f'(x)| dx, \quad |Q_1| \leq \int_1^n |f'(x)| dx, \quad |Q_2| \leq \int_0^n |f'(x)| dx.$$

Формулы (124) и (125) отличаются от “стандартной” формулы Эйлера–Маклорена первого порядка (126) тем, что они основаны на формуле прямоугольников (а не трапеций) и соответственно не содержат слагаемых $(f(0) + f(n))/2$.

5.3. Оценки некоторых сумм. В этом пункте мы докажем оценки и получим асимптотические формулы для некоторых сумм, пользуясь доказанным в п. 5.2 простейшим вариантом формулы Эйлера–Маклорена. Нас интересуют суммы вида

$$\Sigma_{s,m} \equiv \Sigma_{s,m}(b, \mu, l_0) = \sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{j^s e^{(m-1)(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^m}, \quad (127)$$

где s – произвольное вещественное число, а $m \in \{1, 2, 3\}$. Область значений параметров b , μ и l_0 , в которой мы будем изучать поведение этих сумм, такова:

$$0 < b < C, \quad 1 \leq l_0 \leq C_1 b^{-1}, \quad 0 < \mu < +\infty \quad (128)$$

для некоторых положительных постоянных C, C_1, ε .

Оценки проведем по отдельности для разных областей изменения параметра μ .

²Не исключается и случай $n = \infty$; при этом требуется абсолютная сходимость соответствующих рядов и интегралов.

5.3.1. Случай $\mu > 1$ (“квазигиббсовский” случай). В этом случае

$$e^{bj+\mu} - 1 \asymp e^{bj+\mu}$$

(действительно,

$$1 - e \leq 1 - e^{-\mu} \leq \frac{e^{bj+\mu} - 1}{e^{bj+\mu}} \leq 1,$$

так что при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива и более сильная оценка $e^{bj+\mu} - 1 = e^{bj+\mu}(1 + O(e^{-\mu}))$, и поэтому

$$\Sigma_{s,m} \asymp e^{-\mu} \sum_{j=l_0}^{\infty} j^s e^{-bj}.$$

Для вычисления последней суммы применим формулу Эйлера–Маклорена (125) и получим

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} j^s e^{-bj} = \int_{l_0}^{\infty} x^s e^{-bx} dx + R = b^{-s-1} \int_{bl_0}^{\infty} x^s e^{-x} dx + R,$$

где

$$|R| \leq \int_{l_0}^{\infty} |(x^s e^{-bx})'| dx \leq \int_{l_0}^{\infty} (sx^{s-1} + bx^s) e^{-bx} dx = b^{-s} \int_{bl_0}^{\infty} (sx^{s-1} + x^s) e^{-x} dx.$$

Поскольку $1 \leq l_0 \leq C_1 b^{-1}$, мы имеем

$$\int_{bl_0}^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \asymp 1 + \underbrace{(bl_0)^{\alpha+1}}, \quad (129)$$

где

$$\underline{x}^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ |\ln x|, & \lambda = 0. \end{cases} \quad (130)$$

Используя соотношение (129), окончательно получаем, что в рассматриваемом случае

$$\Sigma_{s,m} \asymp e^{-\mu} b^{-s-1} (1 + \underbrace{(bl_0)^{s+1}}) \asymp \begin{cases} e^{-\mu} b^{-s-1}, & s > -1, \\ e^{-\mu} (|\ln(bl_0)| + 1), & s = -1, \\ e^{-\mu} l_0^{s+1}, & s < -1. \end{cases} \quad (131)$$

5.3.2. Случай $0 < \mu < bl_0$. В этом случае разобьем сумму $\Sigma_{s,m}$ на два слагаемых:

$$\Sigma_{s,m} = \sum_{l_0 \leq j \leq C_1/b} \frac{j^s e^{(m-1)(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^m} + \sum_{j > C_1/b} \frac{j^s e^{(m-1)(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^m} \equiv S_1 + S_2. \quad (132)$$

Оценивая второе слагаемое с помощью формулы Эйлера–Маклорена, получаем

$$S_2 \asymp b^{-s-1}. \quad (133)$$

Для того, чтобы оценить первое слагаемое, заметим, что при $l_0 \leq j \leq C_1/b$ справедливы соотношения

$$e^{(m-1)(bj+\mu)} \asymp 1, \quad e^{bj+\mu} - 1 \asymp bj + \mu \quad (134)$$

и

$$bj + \mu \asymp bj \quad (135)$$

(последнее соотношение выполнено в силу наложенных на μ условий). Поэтому в данном случае

$$S_1 \asymp b^{-m} \sum_{l_0 \leq j \leq C_1/b} j^{s-m} \asymp b^{-m} \left(\int_{l_0}^{[C_1/b]+1} x^{s-m} dx + R \right) \asymp b^{-s-1} (1 + \underline{(bl_0)}^{s-m+1}) \quad (136)$$

(мы опускаем очевидное вычисление), так что

$$\Sigma_{s,m} \asymp \begin{cases} b^{-s-1}, & s > m-1, \\ b^{-m}(|\ln(bl_0)| + 1), & s = m-1, \\ b^{-m}l_0^{s-m+1}, & s < m-1. \end{cases} \quad (137)$$

5.3.3. Случай $bl_0 \leq \mu \leq 1$. Воспользуемся опять представлением (132). Тогда выполнены соотношения (133) и (для суммы S_1) (134), а (135), вообще говоря, не выполнено. Поэтому вместо (136) получим

$$S_1 \asymp \sum_{l_0 \leq j \leq C_1/b} \frac{j^s}{(bj + \mu)^m} \asymp b^{-s-1} \int_{bl_0}^{b[C_1/b]+b} \frac{x^s dx}{(x + \mu)^m} + R, \quad (138)$$

где

$$|R| \leq \int_{l_0}^{[C_1/b]+1} \left| \left(\frac{x^s}{(bx + \mu)^m} \right)' \right| \leq b^{-s} \int_{bl_0}^{b[C_1/b]+b} \frac{(s-m)x^s + s\mu x^{s-1}}{(x + \mu)^{m+1}} dx. \quad (139)$$

Отрезок интегрирования $[bl_0, b[C_1/b] + b]$ разобьем на отрезки $[bl_0, \mu]$ и $[\mu, b[C_1/b] + b]$. Тогда на первом отрезке $x + \mu \asymp \mu$, а на втором — $x + \mu \asymp x$. Поэтому получаем

$$\Sigma_{s,m} \asymp b^{-s-1} (1 + \mu^{-m} |\underline{(bl_0)}^{s+1} - \underline{\mu}^{s+1}| + \underline{\mu}^{s-m+1}), \quad (140)$$

или

$$\Sigma_{s,m} \asymp \begin{cases} b^{-s-1}, & s > m-1, \\ b^{-s-1}(1 + |\ln \mu|), & s = m-1, \\ b^{-s-1}\mu^{s-m+1}, & -1 < s < m-1, \\ \mu^{-m} \left(1 + \ln \frac{\mu}{bl_0} \right), & s = -1, \\ \mu^{-m}l_0^{s+1}, & s < -1. \end{cases} \quad (141)$$

Для удобства сведем результаты, указанные в (131), (137) и (141) воедино. Проведенные выше рассуждения доказывают следующее утверждение.

ЛЕММА 19. Пусть C, C_1, ε — положительные постоянные, и пусть выполнены соотношения

$$0 < b < C, \quad 1 \leq l_0 \leq C_1 b^{-1}. \quad (142)$$

Тогда справедливы оценки

$$\sum_{j=l_0}^{\infty} \frac{j^s e^{(m-1)(bj+\mu)}}{(e^{bj+\mu} - 1)^m} \asymp A, \quad (143)$$

	$0 < \mu < bl_0$	$bl_0 \leq \mu \leq 1$	$\mu > 1$
$s > m - 1$	$A = b^{-s-1}$	$A = b^{-s-1}$	$A = e^{-\mu} b^{-s-1}$
$s = m - 1$	$A = b^{-s-1} (\ln(bl_0) + 1)$	$A = b^{-s-1} (\ln \mu + 1)$	$A = e^{-\mu} b^{-s-1}$
$-1 < s < m - 1$	$A = b^{-m} l_0^{s-m+1}$	$A = b^{-s-1} \mu^{s-m+1}$	$A = e^{-\mu} b^{-s-1}$
$s = -1$	$A = b^{-m} l_0^{s-m+1}$	$A = \mu^{-m} (\ln(\mu/bl_0) + 1)$	$A = e^{-\mu} (\ln(bl_0) + 1)$
$s < -1$	$A = b^{-m} l_0^{s-m+1}$	$A = \mu^{-m} l_0^{s+1}$	$A = e^{-\mu} l_0^{s+1}$

где выражение A в зависимости от соотношений между входящими в (143) параметрами задается следующей таблицей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Encyclopedia Math. Appl., **2**, Addison–Wesley Publ., London, 1976; рус. пер.: Г. Эндрюс, *Теория разбиений*, Наука, М., 1982.

[2] А. М. Вершик, “Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.

[3] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II”, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 381–401.

[4] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.

[5] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. III”, *Матем. заметки*, **83**:6 (2008), 880–898.

[6] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных двумя линейными неравенствами. I”, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 559–580.

[7] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, УРСС, М., 2004.

[8] А. М. Вершик, “Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел”, *УМН*, **52**:2 (1997), 139–146.

[9] M. E. J. Newman, “Power laws, Pareto distributions, and Zipf’s law”, *Contemp. Phys.*, **46**:5 (2005), 323–351.

[10] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2006.

[11] E. W. Weisstein, *Polylogarithm*, <http://mathworld.wolfram.com/Polylogarithm.html>.

В. П. Маслов
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило
14.06.2008

В. Е. Назайкинский
Институт проблем механики РАН
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru