Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Омелян, Ю. И. Шевченко, Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 99–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:52:48

Редукции объекта центропроективной связности и тензора аффинного кручения на распределении плоскостей

О. М. Омелян, Ю. И. Шевченко

Проективная группа представлена в виде расслоения центропроективных реперов. В этом расслоении задана центропроективная связность, в результате чего оно стало пространством центропроективной связности. Найдены структурные уравнения этого пространства, в которые входят тензор аффинного кручения и тензор центропроективной кривизны, содержащий подтензор аффинной кривизны. Рассмотрено распределение плоскостей в проективном пространстве и ассоциированное с ним главное расслоение, имеющее 2 простейших и 2 простых в смысле работы [1] главных фактор-расслоения. В ассоциированном расслоении задана групповая связность. Показано, что объект центропроективной связности редуцируется к объекту групповой связности. Объект групповой связности содержит подобъекты плоскостной и нормальной линейных связностей, центропроективной подсвязности и аффинно-групповой связности. Определен объект кручения аффинно-групповой связности. Доказано, что он образует тензор, содержащий подтензор кручения нормальной линейной связности. Показано, что тензор аффинного кручения центропроективной связности редуцируется к тензору кручения аффинно-групповой связности.

Библиография: 11 названий.

1. Проективная группа как расслоение. Отнесем n -мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, \dots = 1, \dots, n$) с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad (1.1)$$

$$dA_I = \theta A_I + \omega_J^I A_J + \omega_I A, \quad (1.2)$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы ω^I , ω_J^I , ω_I проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n , удовлетворяют уравнениям (см., например, [2; с. 173])

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad (1.3)$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^K \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \quad (1.4)$$

$$D\omega_I = \omega_J^I \wedge \omega_J. \quad (1.5)$$

Запишем структурные уравнения (1.4) в виде

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I, \quad (1.6)$$

$$\omega_{JK}^I = -\delta_J^K \omega_K - \delta_K^I \omega_J. \quad (1.7)$$

Получили структурные уравнения (1.3), (1.6), (1.5) главного расслоения центропроективных реперов $C_{n(n+1)}(P_n)$, базой которого является проективное пространство P_n , а типовым слоем – центропроективная (коаффинная) группа $C_{n(n+1)} = GA^*(n) \subset GP(n)$, действующая в любом центропроективном пространстве P_n^o – пространстве P_n с фиксированной точкой $A \in P_n$. Из формул (1.1) вытекает система уравнений стационарности точки A : $\omega^I = 0$. Эта система вполне интегрируема в силу структурных уравнений (1.3) базы P_n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Расслоение центропроективных реперов $C_{n(n+1)}(P_n)$ имеет главное фактор-расслоение линейных реперов $L_{n^2}(P_n)$ со структурными уравнениями (1.3), (1.6), той же базой P_n и типовым слоем – линейной фактор-группой $L_{n^2} = GL(n)$, действующей в связке прямых, проходящих через фиксированную точку проективного пространства P_n .*

2. Центропроективная связность в проективной группе. Зададим центропроективную связность в главном расслоении $C_{n(n+1)}(P_n)$ приемом Лумисте [3]. Рассмотрим преобразование слоевых форм ω_J^I, ω_I с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^I

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Pi_{JK}^I \omega^K, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\omega}_I = \omega_I - \Pi_{IJ} \omega^J, \quad (2.2)$$

где Π_{JK}^I, Π_{IJ} – некоторые функции, дифференциальные уравнения которых приведены ниже. Дифференцируем формы (2.1), (2.2) внешним образом:

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_J^I &= \omega_J^M \wedge \omega_M^I + \omega^K \wedge (d\Pi_{JK}^I - \Pi_{JL}^I \omega_K^L + \omega_{JK}^I), \\ D\tilde{\omega}_I &= \omega_I^L \wedge \omega_L + \omega^J \wedge (d\Pi_{IJ} - \Pi_{IK} \omega_J^K). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В первые слагаемые подставим слоевые формы, выраженные из равенств (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_J^I &= \tilde{\omega}_J^M \wedge \tilde{\omega}_M^I + \tilde{\omega}_J^M \wedge \Pi_{ML}^I \omega^L + \Pi_{JK}^M \omega^K \wedge \tilde{\omega}_M^I + \Pi_{JK}^M \omega^K \wedge \Pi_{ML}^I \omega^L + \dots, \\ D\tilde{\omega}_I &= \tilde{\omega}_I^L \wedge \tilde{\omega}_L + \tilde{\omega}_I^L \wedge \Pi_{LK} \omega^K + \Pi_{IJ}^L \omega^J \wedge \tilde{\omega}_L + \Pi_{IJ}^L \omega^J \wedge \Pi_{LK} \omega^K + \dots, \end{aligned}$$

где многоточия обозначают соответствующие вторые слагаемые из формул (2.3). Во вторые и третьи слагаемые последних формул подставим формы связности $\tilde{\omega}_J^I$, используя равенства (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} D\tilde{\omega}_J^I &= \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + \omega^K \wedge (\Delta\Pi_{JK}^I + \omega_{JK}^I) - \Pi_{JK}^M \omega^K \wedge \Pi_{ML}^I \omega^L, \\ D\tilde{\omega}_I &= \tilde{\omega}_I^L \wedge \tilde{\omega}_L + \omega^J \wedge (\Delta\Pi_{IJ} + \Pi_{IJ}^K \omega_K) - \Pi_{IJ}^L \omega^J \wedge \Pi_{LK} \omega^K, \end{aligned} \quad (2.4)$$

причем дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Pi_{JK}^I = d\Pi_{JK}^I + \Pi_{JK}^L \omega_L^I - \Pi_{LK}^I \omega_J^L - \Pi_{JL}^I \omega_K^L.$$

В соответствии с теоремой Картана–Лаптева [4; с. 82–83] зададим поле объекта центропроективной связности $\Pi = \{\Pi_{JK}^I, \Pi_{IJ}\}$

$$\Delta\Pi_{JK}^I + \omega_{JK}^I = \Pi_{JKL}^I \omega^L, \quad (2.5)$$

$$\Delta\Pi_{IJ} + \Pi_{IJ}^K \omega_K = \Pi_{IJK} \omega^K, \quad (2.6)$$

откуда с учетом обозначения (1.7) вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Объект центропроективной связности Π является квазитензором, содержащим квазитензор Π_{JK}^I , задающий аффинную (иначе говоря, специальную линейную) связность в расслоении линейных реперов $L_{n^2}(P_n)$.*

Подставим дифференциальные уравнения (2.5), (2.6) в структурные уравнения (2.4):

$$D\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L, \quad (2.7)$$

$$D\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_I^L \wedge \tilde{\omega}_L + R_{ILK} \omega^J \wedge \omega^K, \quad (2.8)$$

где компоненты объекта центропроективной кривизны $R = \{R_{JKL}^I, R_{ILK}\}$ выражаются по формулам

$$R_{JKL}^I = \Pi_{J[KL]}^I - \Pi_{J[K}^M \Pi_{M|L]}^I, \quad R_{ILK} = \Pi_{I[JK]} - \Pi_{I[J}^L \Pi_{L|K]}^I. \quad (2.9)$$

3. Аффинное кручение. Внесем формы аффинной подсвязности (2.1) в структурные уравнения (1.3):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \tilde{\omega}_J^I + T_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K, \quad (3.1)$$

где $T_{JK}^I = \Pi_{[JK]}^I$ – компоненты объекта аффинного кручения. Из дифференциальных уравнений (2.5) с учетом обозначения (1.7) следует

$$\Delta T_{JK}^I \overline{\omega} 0, \quad (3.2)$$

где символ $\overline{\omega}$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Задание центропроективной связности в расслоении центропроективных реперов $C_{n(n+1)}(P_n)$ превращает его в пространство центропроективной связности $C_{n(n+1),n}$ со структурными уравнениями (3.1), (2.7), (2.8), в которые входят тензор аффинного кручения T_{JK}^I и компоненты объекта центропроективной кривизны R . Пространство $C_{n(n+1),n}$ имеет фактор-пространство аффинной связности $L_{n^2,n}$ (3.1), (2.7) с тензором кручения T_{JK}^I и объектом кривизны R_{JKL}^I .*

Можно ввести [5] объект центропроективного кручения $T = \{T_{JK}^I, T_{IJ}\}$, где $T_{IJ} = \Pi_{[IJ]}$. Из дифференциальных уравнений (2.6) следует

$$\Delta T_{IJ} + T_{IJ}^K \omega_K \overline{\omega} 0,$$

откуда с учетом равенств (3.2) имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Объект центропроективного кручения T центропроективной связности Π образует тензор, содержащий подтензор аффинного кручения T_{JK}^I .*

4. Центропроективная кривизна. Продолжим дифференциальные уравнения (2.5), (2.6). Сначала продифференцируем их внешним образом:

$$(\Delta \Pi_{JKL}^I + \Pi_{JK}^M \omega_{ML}^I - \Pi_{MK}^I \omega_{JL}^M - \Pi_{JM}^I \omega_{KL}^M) \wedge \omega^L = 0,$$

$$(\Delta \Pi_{ILK} - \Pi_{LJ} \omega_{IK}^L - \Pi_{IL} \omega_{JK}^L + \Pi_{LJ}^L \omega_K) \wedge \omega^K = 0.$$

Разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана, используем обозначение (1.7) для трехиндексных форм ω_{JK}^I и запишем результат в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{JKL}^I - \delta_{[L}^I\Pi_{JK}^M\omega_M + \Pi_{JK}^I\omega_L + \Pi_{LK}^I\omega_J + \Pi_{JL}^I\omega_K\overline{\omega}0, \\ \Delta\Pi_{IJK} + 2\Pi_{IJ}\omega_K + \Pi_{KJ}\omega_I + \Pi_{IK}\omega_J + \Pi_{IJK}^L\omega_L\overline{\omega}0.\end{aligned}$$

Проальтернируем левые части этих равенств по двум последним индексам:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{J[KL]}^I - \delta_{[L}^I\Pi_{J|K]}^M\omega_M + \Pi_{[LK]}^I\omega_J\overline{\omega}0, \\ \Delta\Pi_{I[JK]} + \Pi_{I[J}\omega_K] + \Pi_{[KJ}\omega_I] + \Pi_{I[JK]}^L\omega_L\overline{\omega}0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Получим равенства для входящих в формулы (2.9) агрегатов:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{J[K}\Pi_{|M|L]}^I - \delta_{[L}^I\Pi_{J|K]}^M\omega_M - \Pi_{[KL]}^I\omega_J\overline{\omega}0, \\ \Delta\Pi_{I[J}\Pi_{|L|K]} + \Pi_{I[J}^L\Pi_{|L|K]}^M\omega_M - \Pi_{I[K}\omega_J] - \Pi_{[JK]}^L\omega_I\overline{\omega}0.\end{aligned}$$

Вычитаем левые части этих равенств из соответствующих частей равенств (4.1) и используем обозначения (2.9):

$$\Delta R_{JKL}^I\overline{\omega}0, \quad \Delta R_{IJK} + R_{IJK}^L\omega_L\overline{\omega}0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Объект центропроективной кривизны R образует тензор, содержащий подтензор аффинной кривизны R_{JKL}^I .*

5. Распределение плоскостей. В проективном пространстве P_n рассмотрим распределение m -мерных плоскостей, которое представим как n -параметрическое семейство S_n центрированных m -плоскостей P_m° , $0 < m < n$. Произведем разбиение значений индексов

$$I = \{i, \alpha\}: \quad i, \dots = 1, \dots, m, \quad \alpha, \dots = m+1, \dots, n.$$

Осуществим специализацию подвижного репера $\{A, A_i, A_\alpha\}$, помещая вершины A, A_i на плоскость P_m° , причем точку A – в ее центр. Из деривационных формул (1.2) имеем

$$dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha + \omega_i A. \tag{5.1}$$

Формулы (1.1), (5.1) дают уравнения стационарности центрированной плоскости P_m° : $\omega^I = 0$, $\omega_i^\alpha = 0$. Выбирая n форм ω^I в качестве базисных, запишем уравнения распределения S_n в виде

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J. \tag{5.2}$$

Дифференцируем эти уравнения:

$$(\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha - \delta_J^\alpha \omega_i) \wedge \omega^J = 0, \tag{5.3}$$

где δ_J^α – обобщенный символ Кронекера,

$$\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha = d\Lambda_{iJ}^\alpha + \Lambda_{iJ}^\beta \omega_\beta^\alpha - \Lambda_{jJ}^\alpha \omega_i^j - \Lambda_{iK}^\alpha \omega_J^K.$$

Разрешим квадратичные уравнения (5.3) по лемме Картана

$$\Delta\Lambda_{iJ}^\alpha - \delta_J^\alpha \omega_i = \Lambda_{iJK}^\alpha \omega^K \quad (\Lambda_{i[JK]}^\alpha = 0). \tag{5.4}$$

Запишем дифференциальные уравнения (5.4) подробнее

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha = (\Lambda_{i\beta K}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\alpha \Lambda_{jK}^\beta) \omega^K, \quad \Delta\Lambda_{i\beta}^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\beta^j - \delta_\beta^\alpha \omega_i = \Lambda_{i\beta K}^\alpha \omega^K.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Фундаментальный объект 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\}$ распределения S_n является квазитензором, содержащим подтензор Λ_{ij}^α .*

Тензор Λ_{ij}^α порождает тензор неголономности $N_{ij}^\alpha = \Lambda_{[ij]}^\alpha$ распределения S_n . Из структурных уравнений (1.3) с учетом уравнений (5.2) следует

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega^i) + N_{ij}^\alpha \omega^i \wedge \omega^j. \quad (5.5)$$

Если тензор неголономности обращается в нуль: $N_{ij}^\alpha = 0$, то распределение S_n превращается в голономное распределение S'_n , которое представляет собой [6] расслоение пространства P_n на $(n - m)$ -мерное многообразие m -поверхностей S_m , рассматриваемых как семейства центрированных касательных плоскостей P_m° . Структурные уравнения (5.5) принимают вид

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega^i).$$

Система уравнений $\omega^\alpha = 0$ становится вполне интегрируемой. Она выделяет из голономного распределения S'_n поверхность S_m с уравнениями $\omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j$. Более сильное условие $\Lambda_{ij}^\alpha = 0$ влечет вырождение поверхности S_m в плоскость P_m° .

6. Ассоциированное расслоение и его фактор-расслоения. Внешние дифференциалы вторичных форм $\omega_j^i, \omega_i, \omega_\beta^\alpha, \omega_\alpha^i, \omega_\alpha$ имеют вид

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^K \wedge \omega_{jK}^i, \quad (6.1)$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^J \wedge \omega_{iJ}, \quad (6.2)$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega^I \wedge \omega_{\beta I}^\alpha, \quad (6.3)$$

$$D\omega_\alpha^i = \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^i + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^i + \omega^J \wedge \omega_{\alpha J}^i, \quad (6.4)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^i \wedge \omega_i + \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta, \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{jK}^i &= \Lambda_{jK}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_K - \delta_K^i \omega_j, & \omega_{iJ} &= \Lambda_{iJ}^\alpha \omega_\alpha, \\ \omega_{\beta I}^\alpha &= -\Lambda_{iI}^\alpha \omega_\beta^i - \delta_\beta^\alpha \omega_I - \delta_I^\alpha \omega_\beta, & \omega_{\alpha J}^i &= -\delta_J^i \omega_\alpha. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Получили структурные уравнения (1.3), (6.1)–(6.5) главного расслоения $G_r(P_n)$, базой которого является проективное пространство P_n , а типовым слоем – подгруппа $G_r \subset C_{n(n+1)}$ стационарности центрированной плоскости P_m° , причем $r = n(n - m) + m^2 + n$. Расслоение $G_r(P_n)$, ассоциированное с распределением S_n , имеет четыре главных факторрасслоения [7] над той же базой P_n со следующими структурными уравнениями:

- (1.3), (6.1) – расслоение плоскостных линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$ с типовым слоем $L_{m^2} = GL(m)$ – линейной факторгруппой, действующей в связке прямых плоскости P_m° с центром A ;
- (1.3), (6.3) – расслоение нормальных линейных реперов $\mathcal{L}_{(n-m)^2}(P_n)$ с типовым слоем $\mathcal{L}_{(n-m)^2} = GL(n - m)$ – линейной факторгруппой, действующей в проективном факторпространстве $P_{n-m-1} = P_n/P_m^\circ$;
- (1.3), (6.1), (6.2) – расслоение центропроективных реперов $C_{m(m+1)}(P_n)$ с типовым слоем $C_{m(m+1)} = GA^*(m)$ – центропроективной (коаффинной) факторгруппой, действующей в центрированной плоскости P_m° ;

- (1.3), (6.1), (6.3), (6.4) – аффинное ассоциированное расслоение $H_{\bar{r}}(P_n)$ с типовым слоем $H_{\bar{r}}$, $\bar{r} = n(n-m) + m^2$, – аффинной факторгруппой [8] группы $G_r \subset GP(n)$, действующей в связке прямого пространства P_n с центром A , в которой выделяется связка прямых плоскости P_m° с тем же центром A .

ТЕОРЕМА 1. *Распределение S_n плоскостей P_m° в проективном пространстве P_n редуцирует расслоение центропроективных реперов $C_{n(n+1)}(P_n)$ до главного расслоения $G_r(P_n)$, которое имеет два простейших [1] факторрасслоения линейных реперов $L_{m^2}(P_n)$, $\mathcal{L}_{(n-m)^2}(P_n)$ и два простых [1] факторрасслоения $C_{m(m+1)}(P_n)$, $H_{\bar{r}}(P_n)$.*

7. Ассоциированное пространство групповой связности. Зададим групповую связность в главном расслоении $G_r(P_n)$ приемом Лумисте с помощью форм связности

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_j^i &= \omega_j^i - \Gamma_{jK}^i \omega^K, & \hat{\omega}_i &= \omega_i - \Gamma_{iJ} \omega^J, & \hat{\omega}_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta I}^\alpha \omega^I, \\ \hat{\omega}_\alpha^i &= \omega_\alpha^i - \Gamma_{\alpha J}^i \omega^J, & \hat{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha I} \omega^I,\end{aligned}\quad (7.1)$$

причем компоненты объекта групповой связности $\Gamma = \{\Gamma_{jK}^i, \Gamma_{iJ}, \Gamma_{\beta I}^\alpha, \Gamma_{\alpha J}^i, \Gamma_{\alpha I}\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям [7]:

$$\Delta \Gamma_{jK}^i + \omega_{jK}^i = \Gamma_{jKL}^i \omega^L, \quad (7.2)$$

$$\Delta \Gamma_{iJ} + \Gamma_{iJ}^k \omega_k + \omega_{iJ} = \Gamma_{iJK} \omega^K, \quad (7.3)$$

$$\Delta \Gamma_{\beta I}^\alpha + \omega_{\beta I}^\alpha = \Gamma_{\beta IJ}^\alpha \omega^J, \quad (7.4)$$

$$\Delta \Gamma_{\alpha J}^i - \Gamma_{jJ}^i \omega_\alpha^j + \Gamma_{\alpha J}^\beta \omega_\beta^i + \omega_{\alpha J}^i = \Gamma_{\alpha JK}^i \omega^K, \quad (7.5)$$

$$\Delta \Gamma_{\alpha I} - \Gamma_{iI} \omega_\alpha^i + \Gamma_{\alpha I}^i \omega_i + \Gamma_{\alpha I}^\beta \omega_\beta = \Gamma_{\alpha IJ} \omega^J. \quad (7.6)$$

Отсюда с учетом обозначений (6.6) вытекает [9]

ТЕОРЕМА 2. *Объект групповой связности Γ содержит два простейших [1] под-объекта: объект плоскостной линейной связности $\Gamma_1 = \{\Gamma_{jK}^i\}$, объект нормальной линейной связности $\Gamma_2 = \{\Gamma_{\beta I}^\alpha\}$ и два простых [1] подобъекта: объект центропроективной связности $\Gamma_3 = \{\Gamma_1, \Gamma_{iJ}\}$, объект аффинно-групповой связности $\Gamma_4 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{\alpha J}^i\}$, задающие связности в соответствующих факторрасслоениях $L_{m^2}(P_n)$, $\mathcal{L}_{(n-m)^2}(P_n)$, $C_{m(m+1)}(P_n)$, $H_{\bar{r}}(P_n)$. Объект Γ образует геометрический объект (точнее, квазитензор) лишь в совокупности с фундаментальным квазитензором Λ . Квазитензор $\{\Gamma, \Lambda\}$ содержит четыре простых подквазитензора $\{\Gamma_1, \Lambda\}$, $\{\Gamma_2, \Lambda\}$, $\{\Gamma_3, \Lambda\}$, $\{\Gamma_4, \Lambda\}$.*

Дифференциальные уравнения (7.2)–(7.6) компонент объекта связности Γ определяют структурные уравнения форм групповой связности (7.1):

$$D\hat{\omega}_j^i = \hat{\omega}_j^k \wedge \hat{\omega}_k^i + K_{jKL}^i \omega^K \wedge \omega^L, \quad (7.7)$$

$$D\hat{\omega}_i = \hat{\omega}_i^j \wedge \hat{\omega}_j - K_{iJK} \omega^J \wedge \omega^K, \quad (7.8)$$

$$D\hat{\omega}_\beta^\alpha = \hat{\omega}_\beta^\gamma \wedge \hat{\omega}_\gamma^\alpha + K_{\beta IJ}^\alpha \omega^I \wedge \omega^J, \quad (7.9)$$

$$D\hat{\omega}_\alpha^i = \hat{\omega}_\alpha^j \wedge \hat{\omega}_j^i + \hat{\omega}_\alpha^\beta \wedge \hat{\omega}_\beta^i + K_{\alpha JK}^i \omega^J \wedge \omega^K, \quad (7.10)$$

$$D\hat{\omega}_\alpha = \hat{\omega}_\alpha^i \wedge \hat{\omega}_i + \hat{\omega}_\alpha^\beta \wedge \hat{\omega}_\beta + K_{\alpha IJ} \omega^I \wedge \omega^J, \quad (7.11)$$

где компоненты объекта групповой кривизны $K = \{K_{jKL}^i, K_{iJK}, K_{\beta IJ}^\alpha, K_{\alpha JK}^i, K_{\alpha IJ}\}$ выражаются по формулам

$$\begin{aligned} K_{jKL}^i &= \Gamma_{j[KL]}^i - \Gamma_{j[K}^k \Gamma_{|k|L]}^i, & K_{iJK} &= \Gamma_{i[JK]} - \Gamma_{i[J}^j \Gamma_{|j|K]}, \\ K_{\beta IJ}^\alpha &= \Gamma_{\beta[IJ]}^\alpha - \Gamma_{\beta[I}^\gamma \Gamma_{| \gamma | J]}^\alpha, \\ K_{\alpha JK}^i &= \Gamma_{\alpha[JK]}^i - \Gamma_{\alpha[J}^j \Gamma_{|j|K]}^i - \Gamma_{\alpha[J}^\beta \Gamma_{| \beta | K]}^i, & K_{\alpha IJ} &= \Gamma_{\alpha[IJ]} - \Gamma_{\alpha[I}^i \Gamma_{|i|J]} - \Gamma_{\alpha[I}^\beta \Gamma_{| \beta | J]}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Задание групповой связности Γ в ассоциированном расслоении $G_r(P_n)$ превращает его в пространство групповой связности $G_{r,n}$ со структурными уравнениями (1.3), (7.7)–(7.11), которое имеет два простейших [1] факторпространства линейной связности $L_{m^2,n}$ (1.3), (7.7), $\mathcal{L}_{(n-m)^2,n}$ (1.3), (7.9) и два простых [1] факторпространства со связностями: пространство центропроективной (коэффинной) связности $C_{m(m+1),n}$ (1.3), (7.7), (7.8) и пространство аффинно-групповой связности $H_{r,n}$ (1.3), (7.7), (7.9), (7.10).*

8. Редукция объекта центропроективной связности. Представим дифференциальные уравнения (2.5), (2.6) компонент объекта центропроективной связности Π в более подробном виде, соответствующем компонентам объекта групповой связности Γ , в котором учтем уравнения (5.2) распределения S_n :

$$\Delta \Pi_{jK}^i + \Pi_{jK}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \omega_K - \delta_K^i \omega_j = (\Pi_{jKL}^i + \Pi_{\alpha K}^i \Lambda_{jL}^\alpha) \omega^L, \quad (8.1)$$

$$\Delta \Pi_{\beta K}^\alpha - \Pi_{iK}^\alpha \omega_\beta^i - \delta_\beta^\alpha \omega_K - \delta_K^\alpha \omega_\beta = (\Pi_{\beta KL}^\alpha - \Pi_{\beta K}^i \Lambda_{iL}^\alpha) \omega^L, \quad (8.2)$$

$$\Delta \Pi_{iK}^\alpha - \delta_K^\alpha \omega_i = (\Pi_{iKL}^\alpha - \Pi_{iK}^k \Lambda_{kL}^\alpha + \Pi_{\beta K}^\alpha \Lambda_{iL}^\beta) \omega^L, \quad (8.3)$$

$$\Delta \Pi_{\alpha K}^i + \Pi_{\alpha K}^\beta \omega_\beta^i - \Pi_{jK}^i \omega_\alpha^j - \delta_K^i \omega_\alpha = \Pi_{\alpha KL}^i \omega^L, \quad (8.4)$$

$$\Delta \Pi_{iJ} + \Pi_{iJ}^k \omega_k + \Pi_{iJ}^\alpha \omega_\alpha = (\Pi_{iJK} + \Pi_{\alpha J} \Lambda_{iK}^\alpha) \omega^K, \quad (8.5)$$

$$\Delta \Pi_{\alpha J} - \Pi_{iJ} \omega_\alpha^i + \Pi_{\alpha J}^i \omega_i + \Pi_{\alpha J}^\beta \omega_\beta = \Pi_{\alpha JK} \omega^K. \quad (8.6)$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (5.4) и (8.3), положим $\Pi_{iK}^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha$, т.е. охватим часть компонент объекта центропроективной связности Π в случае данного распределения S_n . Тогда объект Π сокращается до объекта $\bar{\Pi} = \{\Pi_{jK}^i, \Pi_{\beta K}^\alpha, \Pi_{\alpha K}^i, \Pi_{iJ}, \Pi_{\alpha J}\}$, который можно отождествить с объектом групповой связности Γ , что следует из сопоставления уравнений (8.1), (8.2), (8.4)–(8.6) и (7.2)–(7.6) с учетом обозначений (6.6).

ТЕОРЕМА 4. *Если в проективном пространстве P_n дано распределение плоскостей S_n , то объект центропроективной связности Π , задающий связность в проективной группе $GP(n)$, представленной как расслоение центропроективных реперов $C_{n(n+1)}(P_n)$, редуцируется к объекту групповой связности Γ , задающему связность в главном расслоении $G_r(P_n)$, ассоциированном с распределением S_n .*

9. Кручение аффинно-групповой связности. Запишем структурные уравнения (1.3) проективного пространства P_n в подробном виде:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^i, \quad (9.1)$$

$$D\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega_i^\alpha + \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha. \quad (9.2)$$

Подставим в структурные уравнения (9.2) уравнения (5.2) распределения S_n , но преобразуем их с помощью обобщенного символа Кронекера к другому по сравнению с (5.5) виду

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \delta_I^i \omega^I \wedge \Lambda_{iJ}^\alpha \omega^J. \quad (9.3)$$

Внесем формы $\widehat{\omega}_j^i, \widehat{\omega}_\alpha^i, \widehat{\omega}_\beta^\alpha$ аффинно-групповой связности Γ_4 в структурные уравнения (9.1), (9.3):

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \widehat{\omega}_j^i + \omega^\alpha \wedge \widehat{\omega}_\alpha^i + S_{JK}^i \omega^J \wedge \omega^K, \quad D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \widehat{\omega}_\beta^\alpha + S_{IJ}^\alpha \omega^I \wedge \omega^J, \quad (9.4)$$

где компоненты объекта $S = \{S_{JK}^i, S_{IJ}^\alpha\}$, который назовем объектом кручения аффинно-групповой связности, выражаются по формулам

$$S_{JK}^i = \delta_{[J}^i \Gamma_{|j|K]}^\alpha + \delta_{[J}^\alpha \Gamma_{|\alpha|K]}^i, \quad (9.5)$$

$$S_{IJ}^\alpha = \delta_{[I}^\alpha \Gamma_{|\beta|J]}^\alpha + \delta_{[I}^i \Lambda_{|i|J]}^\alpha. \quad (9.6)$$

Найдем дифференциальные уравнения для обобщенных символов Кронекера $\delta_J^i, \delta_J^\alpha$, исходя из уравнений для обычного символа Кронекера δ_J^I

$$\Delta \delta_J^I = 0, \quad (9.7)$$

которые проверяются непосредственно:

$$\Delta \delta_J^I = d\delta_J^I + \delta_J^K \omega_K^I - \delta_K^I \omega_J^K = 0 + \omega_J^I - \omega_J^I = 0.$$

Из уравнений (9.7) имеем

$$\Delta \delta_J^i + \delta_J^\alpha \omega_\alpha^i = 0, \quad (9.8)$$

$$\Delta \delta_J^\alpha + \delta_J^i \omega_i^\alpha = 0. \quad (9.9)$$

С учетом уравнений (5.2) уравнения (9.9) запишем короче

$$\Delta \delta_J^\alpha \overline{\omega} 0. \quad (9.10)$$

Уравнения (5.4), (7.2), (7.4), (7.5), (9.8), (9.10) с помощью выражений трехиндексных форм из (6.6) позволяют найти сравнения для компонент (9.5), (9.6)

$$\begin{aligned} \Delta S_{JK}^i + \delta_{[J}^j \Lambda_{|j|K]}^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_{[J}^i \omega_{K]}^\alpha - (\delta_{[J}^j \omega_{|j|}^\alpha + \delta_{[J}^\alpha \omega_{|\alpha|}^\alpha) \delta_{K]}^i + \delta_{[J}^\beta \Gamma_{|\beta|K]}^\alpha \omega_\alpha^i \overline{\omega} 0, \\ \Delta S_{IJ}^\alpha - \delta_{[I}^\beta \omega_{J]}^\alpha - (\delta_{[I}^\beta \omega_{|\beta|}^\alpha + \delta_{[I}^i \omega_{|i|}^\alpha) \delta_{J]}^\alpha \overline{\omega} 0. \end{aligned}$$

Слагаемые в круглых скобках запишем с помощью обычного символа Кронекера, приведем подобные члены и воспользуемся формулой (9.6)

$$\Delta S_{JK}^i + S_{JK}^\alpha \omega_\alpha^i \overline{\omega} 0, \quad \Delta S_{IJ}^\alpha \overline{\omega} 0. \quad (9.11)$$

ТЕОРЕМА 5. *Объект кручения S аффинно-групповой связности Γ_4 образует тензор, содержащий подтензор S_{IJ}^α – тензор кручения нормальной линейной связности $\Gamma_2 \subset \Gamma_4$.*

ТЕОРЕМА 6. *Распределение S_n в проективном пространстве P_n позволяет редуцировать тензор аффинного кручения T_{JK}^I центропроективной связности Π к тензору кручения S аффинно-групповой связности Γ_4 .*

Действительно, запишем равенства (3.2) подробнее с учетом уравнений (5.2):

$$\Delta T_{JK}^i + T_{JK}^\alpha \omega_\alpha^i \overline{\omega} 0, \quad \Delta T_{JK}^\alpha \overline{\omega} 0,$$

что совпадает с равенствами (9.11).

Вывод. В качестве структурных уравнений базы пространства групповой связности $G_{r,n}$ и его факторпространства аффинно-групповой связности $H_{\bar{r},n}$ лучше использовать не уравнения (1.3) для проективного пространства P_n , а уравнения (9.4), в которых учтены [10] уравнения (5.2) распределения S_n . Тогда структурные уравнения пространств групповой связности $G_{r,n}$ (9.4), (7.7)–(7.11) и аффинно-групповой связности $H_{\bar{r},n}$ (9.4), (7.7), (7.9), (7.10) замкнуты в смысле Лаптева [11], т.е. в их правых частях стоят внешние произведения тех форм, от которых в левых частях берутся внешние дифференциалы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. И. Шевченко, *Оснащения центропроективных многообразий*, Изд-во КГУ, Калининград, 2000.
- [2] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
- [3] Ю. И. Шевченко, “Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении”, *Дифференциальная геометрия многообразий фигур*, **37**, Изд-во КГУ, Калининград, 2006, 179–187.
- [4] Л. Е. Евтушик, Ю. Г. Лумисте, Н. М. Остиану, А. П. Широков, “Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях”, *Итоги науки и техники. Проблемы геометрии*, **9**, ВИНТИ, М., 1979, 5–247.
- [5] В. Г. Лемлейн, “Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии”, *Литовский матем. сб.*, **4**, № 1, 1964, 41–132.
- [6] Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану, “Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I”, *Тр. геом. семин.*, **3**, ВИНТИ, М., 1971, 49–94.
- [7] О. М. Омелян, “Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей”, *Дифференциальная геометрия многообразий фигур*, **33**, Изд-во КГУ, Калининград, 2002, 74–78.
- [8] Ю. И. Шевченко, “Аффинная, коаффинная и линейная факторгруппы в подгруппе проективной группы”, *Проблемы математических и физических наук*, Изд-во КГУ, Калининград, 2002, 38–39.
- [9] О. М. Омелян, “Об объекте кривизны групповой связности на распределении плоскостей”, *Тр. матем. центра им. Н. И. Лобачевского*, **18**, Изд-во Казанск. матем. об-ва, Казань, 2002, 69.
- [10] О. М. Omelyan, *The Object of Curvature of the Distributed Linear Connection*, Programme & Abstracts of Fourth European Congress of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2004.
- [11] Г. Ф. Лаптев, “Дифференциальная геометрия погруженных многообразий”, *Тр. ММО*, **2** (1953), 275–382.

О. М. Омелян

Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград

E-mail: olga_omelyan2002@mail.ru

Поступило

26.03.2007

Исправленный вариант

24.12.2007

Ю. И. Шевченко

Российский государственный университет им. И. Канта

E-mail: geometry@albertina.ru