Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Иванов, Д. В. Чертова, Ли Йонг Пинг, Теорема Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 1, 136–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 18:36:16

Теорема Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом

В. И. Иванов, Д. В. Чертова, Ли Йонг Пинг

Пусть $\lambda \geq -1/2$, $J_\lambda(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка λ , $0 < \mu_1 < \dots < \mu_k < \dots$ – положительные нули $J_\lambda(x)$,

$$j_\lambda(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda}, \quad j_\lambda(0) = 1,$$

– модифицированная функция Бесселя,

$$d\nu_\lambda(x) = |x|^{2\lambda+1} dx,$$

$$L_{2,\lambda}[-1, 1] = \left\{ f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{2,\lambda}^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 d\nu_\lambda(x) < \infty \right\}$$

– гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_\lambda = \int_{-1}^1 f(x)g(x) d\nu_\lambda(x).$$

Аналогично определяется пространство $L_{2,\lambda}[a, b]$ на отрезке $[a, b]$.

Полную ортогональную систему в пространстве $L_{2,\lambda}[-1, 1]$ образует система функций

$$\{\varphi_k(x) = j_\lambda(\mu_k x), \psi_k(x) = j'_\lambda(\mu_k x)\}_{k=1}^\infty. \quad (1)$$

Функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, являются собственными функциями задачи Штурма–Лиувилля

$$(x^{2\lambda+1}y'(x))' + \rho^2 x^{2\lambda+1}y(x) = 0, \quad y'(0) = y(1) = 0,$$

поэтому система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\lambda}[0, 1]$. Ее аппроксимативные свойства изучались в [1].

Функции $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, являются четными функциями и полиномы по ним плотны в подпространстве $L_{2,\lambda}[-1, 1]$ четных функций. Функции $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, являются нечетными функциями и полиномы по ним плотны в подпространстве $L_{2,\lambda}[-1, 1]$ нечетных функций. Отметим, что для $k = 1, 2, \dots$

$$(\varphi_k, \varphi_k)_\lambda = (\psi_k, \psi_k)_\lambda = \frac{1}{d_k}.$$

Любая функция $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ может быть разложена в ряд Фурье по системе (1)

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)), \quad a_k = d_k(f, \varphi_k)_\lambda, \quad b_k = d_k(f, \psi_k)_\lambda. \quad (2)$$

Равенство Парсеваля будет иметь вид

$$\|f\|_{2,\lambda}^2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{d_k} (a_k^2 + b_k^2).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 05-01-39005, 06-01-00372) и Национального фонда естественных наук Китая (грант № 10471010).

Величину наилучшего приближения функции $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ определим равенством

$$E_n(f)_{2,\lambda} = \min_{c_k, d_k} \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n (c_k \varphi_k(x) + d_k \psi_k(x)) \right\|_2. \quad (3)$$

Имеем

$$E_n^2(f)_{2,\lambda} = \left\| f(x) - \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)) \right\|_{2,\lambda}^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{d_k} (a_k^2 + b_k^2).$$

Наша цель – получить точную оценку для (3) через модуль непрерывности функции. Для определения модуля непрерывности нам необходим оператор обобщенного сдвига. Определим его равенством

$$T^t f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Так как $|\varphi_k(t)| \leq 1$, оператор T^t для всех t является ограниченным оператором из $L_{2,\lambda}[-1, 1]$ в $L_{2,\lambda}[-1, 1]$ и его норма $\|T^t\| = 1$. Приведем для (4) интегральную форму записи.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $a > 1$ и любой функции $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ ряд Фурье (2) сходится в пространстве $L_{2,\lambda}[-a, a]$.

Согласно теореме 1 ряд Фурье (2) осуществляет естественное продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[-1, 1]$ на всю прямую. Это продолжение, используемое в дальнейшем, также будем обозначать $f(x)$. Теорема 1 для $a = 3$ и четных функций была установлена в [2], в общем случае – Чертовой.

Для $\lambda > -1/2$ оператор (4) может быть записан в виде

$$T^t f(x) = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1/2)} \int_0^\pi \{f(A)(1 + B) + f(-A)(1 - B)\} \sin^{2\lambda} \varphi \, d\varphi, \quad (5)$$

где

$$A = \sqrt{x^2 + t^2 - 2xt \cos \varphi}, \quad B = \frac{(x - t \cos \varphi)}{A}.$$

Здесь $|x| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq A \leq 1 + |t|$ и мы используем в (5) естественное продолжение функции $f(x)$.

Формула (5) для оператора обобщенного сдвига в пространстве $L_{2,\lambda}(\mathbb{R})$ была получена в [3]. Для четных функций она хорошо известна и восходит к Гегенбауэру (см., например, [4]).

Для $\lambda = -1/2$ имеем

$$T^t f(x) = \frac{1}{2} \{f(x + t) + f(x - t)\}.$$

Далее для $\lambda > -1/2$ и функции $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ положим

$$\begin{aligned} \Omega^2(t, f)_{2,\lambda} &= \int_{-1}^1 (T_y^t |f(y) - f(x)|^2)_{|y=x} d\nu_\lambda(x) \\ &= \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1/2)} \int_{-1}^1 \int_0^\pi \{|f(A) - f(x)|^2(1 + B) + |f(-A) - f(x)|^2(1 - B)\} \\ &\quad \times \sin^{2\lambda} \varphi \, d\varphi \, d\nu_\lambda(x). \end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda = -1/2$ получим

$$\Omega^2(t, f)_{2,-1/2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \{|f(x + t) - f(x)|^2 + |f(x - t) - f(x)|^2\} dx = \int_{-1}^1 |f(x + t) - f(x)|^2 dx.$$

Модуль непрерывности функции $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ определим равенством

$$\omega(\delta, f)_{2,\lambda} = \sup\{\Omega(t, f)_{2,\lambda} : |t| \leq \delta\}.$$

Часто модуль непрерывности с помощью оператора обобщенного сдвига определяется и так

$$\omega_1(\delta, f)_{2,\lambda} = \sup\{\|(E - T^t)^{1/2} f(x)\|_{2,\lambda} : |t| \leq \delta\}.$$

Справедливо равенство

$$2\omega_1^2(\delta, f)_{2,\lambda} = \omega^2(\delta, f)_{2,\lambda}.$$

Мы доказываем следующее точное неравенство Джексона в пространстве $L_{2,\lambda}[-1, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\lambda \geq -1/2$ и любой функции $f \in L_{2,\lambda}[-1, 1]$ справедливо точное неравенство

$$E_n(f)_{2,\lambda} < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2\mu_1}{\mu_{n+1}}, f\right)_{2,\lambda}. \quad (6)$$

Для четных функций неравенство (6) было доказано в [2].

Для $\lambda = -1/2$, $\mu_k = \pi(k - 1/2)$

$$\varphi_k(x) = \cos \pi \left(k - \frac{1}{2}\right) x, \quad \psi_k(x) = \sin \pi \left(k - \frac{1}{2}\right) x,$$

а для $\lambda = 1/2$, $\mu_k = \pi k$

$$\varphi_k(x) = \frac{\sin \pi k x}{\pi k x}, \quad \psi_k(x) = \frac{\pi k x \cos \pi k x - \sin \pi k x}{(\pi k x)^2},$$

$k = 1, 2, \dots$, и из теоремы 2 получаем следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции $f \in L_2[-1, 1]$ справедливо точное неравенство

$$E_n(f)_{2,-1/2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2}{2n+1}, f\right)_{2,-1/2}. \quad (7)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любой функции $f \in L_{2,1/2}[-1, 1]$ справедливо точное неравенство

$$E_n(f)_{2,1/2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(\frac{2}{n+1}, f\right)_{2,1/2}.$$

Интересно сравнить неравенство (7) с известным точным неравенством Джексона в пространстве L_2 периодических функций, доказанным Черныхом [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2001, № 8, 3–9. [2] Ли Йонг Пинг, *Труды Международной летней математической школы С. Б. Стечкина по теории функций*, Изд-во ТулГУ, Тула, 2007, 180–190. [3] Д. В. Чертова, *Труды Международной летней математической школы С. Б. Стечкина по теории функций*, Изд-во ТулГУ, Тула, 2007, 160–161. [4] Б. М. Левитан, *Теория операторов обобщенного сдвига*, Наука, М., 1973. [5] Н. И. Черных, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН, **88**, 1967, 71–74.

В. И. Иванов

Тульский государственный университет

E-mail: ivaleryi@mail.ru

Поступило

19.02.2008

Д. В. Чертова

Тульский государственный университет

Ли Йонг Пинг

Beijing Normal University

E-mail: ypliu@bnu.edu.cn