Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кротов, И. Н. Катковская, Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 580–591

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm52>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 10:59:09

УДК 517.98

НЕРАВЕНСТВО СИЛЬНОГО ТИПА ДЛЯ СВЕРТКИ С КОРНЕМ КВАДРАТНЫМ ИЗ ЯДРА ПУАССОНА

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов

Граничное поведение свертки с ядром Пуассона и с корнем квадратным из ядра Пуассона существенно различно. Первые имеют лишь некасательный предел. Для последних имеет место сходимость по областям, допускающим логарифмический порядок касания с границей (P. Sjögren, J.-O. Rönning). Этот результат был обобщен авторами на пространства однородного типа. Здесь мы доказываем ограниченность в L^p , $p > 1$, соответствующего максимального оператора. Ранее было известно лишь неравенство слабого типа.

Библиография: 12 названий.

1. Введение

Пусть

$$p(z, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2}$$

— ядро Пуассона в единичном круге B комплексной плоскости.

Хорошо известно (см., например, [1]), что для любой функции $f \in L^1[-\pi, \pi]$ ее интеграл Пуассона

$$Pf(z) = \int_{-\pi}^{\pi} p(z, \theta) f(\theta) d\theta$$

для почти всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$ сходится к $f(\varphi)$, когда z стремится к $e^{i\varphi}$, оставаясь в некасательной области¹

$$\{z: |z - e^{i\varphi}| < a(1 - |z|^2)\}, \quad a > 0. \quad (1)$$

Литтлвуд [2] (см. также [1]) показал, что это — наилучший результат в следующем смысле. Если C_0 — любая простая замкнутая кривая, проходящая через точку $z = 1$, расположенная целиком, за исключением этой точки, внутри B и касающаяся границы B в этой точке, кривая C_θ получается из C_0 поворотом вокруг $z = 0$ на угол θ , то существует произведение Бляшке, которое для почти всех θ не стремится ни к какому пределу, если $z \rightarrow e^{i\theta}$, оставаясь внутри C_θ .

¹В дальнейшем a означает произвольно фиксированную положительную постоянную, а через c (с индексами) мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров, но эта зависимость для нас несущественна.

В работе [3] было начато изучение граничного поведения сверток со степенями ядра Пуассона

$$P_l f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} [p(z, \theta)]^{l+1/2} f(\theta) d\theta, \quad l \geq 0. \quad (2)$$

Интерес к ним объясняется тем, что $P_l(z, \cdot)$ (и $P_l f(z)$) является решением уравнения

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left(l^2 - \frac{1}{4} \right) u$$

((1/4)(1 - |z|^2)²Δu — лапласиан в гиперболической метрике). Конечно, сходимости $P_l f(z)$ трудно ожидать без нормировки.

Пусть

$$\mathcal{P}_l f(z) = \frac{P_l f(z)}{P_l 1(z)}. \quad (3)$$

Отметим, что²

$$P_l 1(z) \asymp \begin{cases} (1 - |z|)^{1/2-l}, & l > 0, \\ (1 - |z|)^{1/2} \log \frac{2}{1-|z|}, & l = 0 \end{cases} \quad (4)$$

(не важно, по какому основанию берутся логарифмы, нам будет удобно всюду считать основание равным 2).

При $l > 0$ граничное поведение интегралов $\mathcal{P}_l f(z)$ такое же, как и при $l = 1/2$ (оно было описано выше). Иначе обстоит дело при $l = 0$. В этом случае граничное поведение операторов (3) изучалось в работах [3]–[7], где было показано, что $\mathcal{P}_l f(z)$ сходится к $f(\varphi)$, когда z стремится к $e^{i\varphi}$, оставаясь внутри области

$$\left\{ z \in \mathbb{C}: |z - e^{i\varphi}| < a(1 - |z|) \left(\log \frac{2}{1 - |z|} \right)^p \right\} \quad (5)$$

для каждой функции $f \in L^p[-\pi, \pi]$ при почти всех $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Случай $p = 1$ рассмотрен в [3], а $p > 1$ в [5], [6]. Отметим, что области (5) существенно шире некасательных областей (1) и допускают касательный подход к точке $e^{i\varphi}$, причем большему p соответствует большая степень касания.

Доказательство сходимости почти всюду в работах [3]–[6] опиралось на неравенство слабого типа

$$\mu\{\mathcal{L}_p(\mathcal{P}_0 f) > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^p_\mu(X)} \right)^p, \quad \lambda > 0, \quad (6)$$

для максимального оператора

$$\mathcal{L}_p f(e^{i\varphi}) = \sup \left\{ |f(z)| : |\arg z - \varphi| < a(1 - |z|) \left(\log \frac{2}{1 - |z|} \right)^p \right\},$$

соответствующего областям (5). Из (6) результаты о касательной сходимости почти всюду $\mathcal{P}_l f(z)$ выводятся стандартным способом. Кроме того, в [5], [6] показано также, что области подхода к границе (5) выбраны оптимально и не могут быть расширены.

²Запись $f \asymp g$ означает, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $1/c \leq f/g \leq c$.

В нашей работе [8] неравенство (6) было распространено на пространства однородного типа.

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d . Это означает, что функция $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad d(x, y) = d(y, x), \quad d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)] \quad (7)$$

для любых $x, y, z \in X$ (постоянная $a_d \geq 1$ не зависит от выбора элементов $x, y, z \in X$) и семейство открытых шаров

$$B(x, t) = \{y \in X: d(x, y) < t\}$$

образует базу окрестностей топологии X . В дальнейшем для простоты будем считать, что $\text{diam } X \leq 1$.

Пусть еще μ – положительная борелевская мера на X , удовлетворяющая условию однородности

$$\mu(B(x, t)) \asymp t^\gamma \quad (8)$$

порядка $\gamma > 0$ (постоянные слабой эквивалентности в (8) не зависят от $x \in X$ и $t \in (0, \text{diam } X]$). Обычно тройка (X, d, μ) называется *пространством однородного типа* [9]. Через $L_\mu^p(X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, построенные по мере μ .

В этой работе мы рассматриваем операторы

$$\mathcal{P}_0 f(x, t) = \left(\log \frac{2}{t}\right)^{-1} \int_X \frac{f(y)}{(d(x, y) + t)^\gamma} d\mu(y). \quad (9)$$

В частном случае $X = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, d – евклидова метрика и μ – мера Лебега (тогда $\gamma = 1$) эти операторы совпадают, по существу, с (3) при $l = 0$ (см. (4) и ниже раздел 3). Для нас эти операторы представляют интерес как предельный случай $\alpha = 0$ операторов типа потенциала на пространствах однородного типа

$$\int_X \frac{f(y)}{(d(x, y) + t)^{\gamma-\alpha}} d\mu(y), \quad 0 < \alpha < \gamma,$$

граничное поведение которых рассматривалось в нашей работе [8].

Введем максимальные функции

$$\mathcal{L}_\delta u(x) = \sup \left\{ |u(y, t)| : d(x, y) < at \left(\log \frac{2}{t}\right)^\delta \right\}, \quad a > 0, \quad x \in X, \quad (10)$$

зависящие от параметра $\delta \geq 0$. При $\delta = 0$ будем обозначать $\mathcal{L}_0 = N$ (это – “некасательная” максимальная функция).

В частности, в [8] неравенство слабого типа (6) было распространено на общий случай пространств однородного типа

$$\mu\{\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f) > \lambda\} \leq c \left(\frac{1}{\lambda} \|f\|_{L_\mu^p(X)}\right)^p, \quad \lambda > 0,$$

где $\delta = p/\gamma$. При этом в [8] использовался метод, отличный от применявшегося в [3]–[6].

Из теоремы 1 в [8] также можно вывести точные результаты о граничном поведении операторов (3) при $l < 0$.

2. Основная теорема и ее доказательство

Главной целью настоящей работы является доказательство того, что для $p > 1$ на самом деле справедливо большее – неравенство (6) можно усилить и заменить неравенством сильного типа, причем в общей ситуации. Именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если $p > 1$ и $\delta = p/\gamma$, то*

$$\|\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f)\|_{L_\mu^p(X)} \leq c_p \|f\|_{L_\mu^p(X)},$$

где постоянная c_p не зависит от $f \in L_\mu^p(X)$.

В дальнейшем для простоты считаем, что в (10) $a = 1$. Для доказательства нам понадобится ряд вспомогательных фактов. Начнем с хорошо известных.

ЛЕММА 1. *Пусть $E \subset X$ и $\{B\}$ – любое семейство шаров ограниченных радиусов, покрывающее E .*

Тогда существует конечное или счетное подсемейство $\{B_j\} \subset \{B\}$ со свойствами

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad E \subset \bigcup_j \rho_d B_j, \quad (11)$$

где $\rho_d \geq 1$ зависит только от d .

Здесь ρB – шар с тем же центром, что и B , радиуса в ρ раз больше. Доказательство леммы имеется в [9].

С помощью леммы 1 стандартным способом [9] выводятся обычные свойства максимальной функции Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y, t)$, содержащим точку $x \in X$.

ЛЕММА 2. *Для каждого $p \geq 1$ существует такая постоянная c_p , что*

1) *для всех функций $f \in L_\mu^1(X)$ и $\lambda > 0$*

$$\mu\{Mf > \lambda\} \leq \frac{c_1}{\lambda} \|f\|_{L_\mu^1(X)},$$

2) *для всех функций $f \in L_\mu^p(X)$*

$$\|Mf\|_{L_\mu^p(X)} \leq c_p \|f\|_{L_\mu^p(X)}.$$

Введем параметрическое семейство областей подхода к границе

$$D_{A,\delta}(x) = \left\{ (y, t) : d(x, y) < t \left(\log \frac{2}{t} \right)^\delta, \quad A < \left(\log \frac{2}{t} \right)^\delta \right\} \quad (12)$$

и отметим, что второе неравенство, определяющее $D_{A,\delta}(x)$, равносильно следующему неравенству:

$$t < \exp(1 - A^{1/\delta}) = \tau_A. \quad (13)$$

Определим также семейство максимальных функций

$$\mathcal{L}_{A,\delta} u(x) = \sup \left\{ \left(\log \frac{2}{t} \right)^{-1} u(y, At) : (y, t) \in D_{A,\delta}(x) \right\}, \quad (14)$$

с помощью которых можно оценить оператор $\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f)$. Это показывает лемма 3 ниже, в которой используется следующее обозначение:

$$u(y, t) = \frac{1}{\mu(B(y, t))} \int_{B(y, t)} |f| d\mu,$$

где $f \in L^1_\mu(X)$. Тогда ясно, что

$$Nu(x) = Mf(x), \quad x \in X. \quad (15)$$

ЛЕММА 3. *Существует такая постоянная c , что*

$$\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f)(x) \leq c \left(Mf(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{L}_{2^\nu, \delta} u(x) \right)$$

для всех $x \in X$ и $f \in L^1_\mu(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in X$ и пара $(y, t) \in X \times (0, 1)$ удовлетворяет условию

$$d(x, y) < \tau = t \left(\log \frac{2}{t} \right)^\delta.$$

Разобьем интеграл, определяющий оператор (9), на три части

$$\int_X \frac{f(z)}{(d(y, z) + t)^\gamma} d\mu(z) = \int_{B(y, t)} + \int_{t < d(x, y) \leq \tau} + \int_{d(x, y) > \tau} \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

и каждую из них будем оценивать отдельно.

Прежде всего заметим, что

$$|I_1| \leq u(y, t).$$

Кроме того, если $n = \lfloor \log_2(\tau/t) \rfloor + 2$, то

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{2^\nu t < d(y, z) \leq 2^{\nu+1} t} \frac{f(z)}{(d(y, z) + t)^\gamma} d\mu(z) \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} (2^\nu t)^\gamma \int_{B(y, 2^{\nu+1} t)} |f| d\mu \\ &\leq c \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\mu B(y, 2^{\nu+1} t)} \int_{B(y, 2^{\nu+1} t)} |f| d\mu \leq c \sum_{\nu=1}^n u(y, 2^\nu t). \end{aligned}$$

Наконец, если $m = [\log_2(1/\tau)] + 2$, то

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_{2^\nu \tau < d(y,z) \leq 2^{\nu+1} \tau} \frac{f(z)}{(d(y,z) + t)^\gamma} d\mu(z) \leq \sum_{\nu=0}^{m-1} (2^\nu \tau)^\gamma \int_{B(y, 2^{\nu+1} \tau)} |f| d\mu \\ &\leq c \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\mu B(y, 2^{\nu+1} \tau)} \int_{B(y, 2^{\nu+1} \tau)} |f| d\mu \leq cm M f(x) \leq c \log \frac{1}{\tau} M f(x). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств для I_1 , I_2 и I_3 легко вытекает утверждение леммы 3.

Следующая лемма играет ключевую роль. При ее доказательстве мы будем следовать схеме рассуждений из работы второго автора [10], видоизменяя ее соответственно рассматриваемой ситуации.

ЛЕММА 4 (основная). *Для каждого $p > 1$ существует такая постоянная c_p , что*

$$\|\mathcal{L}_{A,\delta} u\|_{L_\mu^p(X)} \leq c_p A^{-\gamma/p} \|f\|_{L_\mu^p(X)} \quad (16)$$

при всех $f \in L_\mu^p(X)$ и $A \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лебеговы множества максимального оператора (14)

$$E_A(\lambda) = \{x \in X : \mathcal{L}_{A,\delta} u(x) > \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Разобьем их на части следующим образом. Определим натуральное число k_A из условия $2^{-k_A-1} < \tau_A \leq 2^{-k_A}$, обозначим

$$t_A(x) = \sup \left\{ t < \tau_A : \exists (y, t) \in D_{A,\delta}(x), \left(\log \frac{2}{t} \right)^{-1} u(y, At) > \lambda \right\}$$

и для $k \geq k_A$ введем множества

$$E_{A,k}(\lambda) = \{x \in E_A(\lambda) : t_A(x) \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]\}.$$

Они измеримы и

$$E_{A,k}(\lambda) \cap E_{A,i}(\lambda) = \emptyset, \quad E_A(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{\infty} E_{A,k}(\lambda).$$

Введем также некоторую модификацию некасательной максимальной функции

$$N_A u(x) = \sup \left\{ u(y, A\tau) : d(x, y) < \frac{A\tau}{4a_d^2}, \quad \tau < \tau_A \right\}.$$

Тогда ясно, что

$$N_A(x) \leq N(x), \quad x \in X. \quad (17)$$

Как и выше, введем лебеговы множества

$$E(\lambda) = \{x \in X : N_A u(x) > \lambda\}$$

и разобьем их на части

$$E_k(\lambda) = \{x \in E(\lambda) : \tau(x) \in (2^{-k-1}, 2^{-k}]\},$$

где

$$\tau(x) = \sup \left\{ \tau < \tau_A : \exists y \quad d(x, y) < \frac{A\tau}{4a_d^2}, \quad u(y, A\tau) > \lambda \right\}.$$

Тогда множества $E_k(\lambda)$ измеримы и

$$E_k(\lambda) \cap E_i(\lambda) = \emptyset, \quad E(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{\infty} E_k(\lambda).$$

Оценим меру $\mu E_{A,k}(\lambda)$. Пусть $x \in E_{A,k}(\lambda)$; тогда существует такая пара $(y_x, t_x) \in X \times (2^{-k-1}, 2^{-k}]$, что

$$d(x, y_x) < t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^{\delta}, \quad u(y_x, A t_x) > \lambda \log \frac{2}{t_x} \geq k\lambda. \quad (18)$$

Рассмотрим семейство шаров

$$B_x = B \left(y_x, t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^{\delta} \right), \quad x \in E_{A,k}(\lambda).$$

По лемме 1 из него можно выделить конечное или счетное подсемейство $\{B_{x_j}\}$ со свойствами

$$B_{x_j} \cap B_{x_i} = \emptyset, \quad \mu E_{A,k}(\lambda) \leq c \sum_j \mu B_{x_j}.$$

Введем новое семейство шаров

$$B_{x_j}^* = B(y_{x_j}, A t_{x_j}), \quad j \geq 1.$$

Пусть

$$\varphi(t) = t \left(\log \frac{2}{t} \right)^{\delta};$$

тогда, как легко видеть, существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi(t) < \frac{\varphi(\tau)}{4a_d^2} \quad \text{при} \quad 2^{k_0} t < \tau \quad (19)$$

(см. (7)).

Покажем, что справедливы включения

$$B_{x_j}^* \subset \bigcup_{i=k-k_0}^k E_i(k\lambda), \quad k \geq k_0 + k_A. \quad (20)$$

Пусть $x \in B_{x_j}^*$ и пара (z, τ) такова, что

$$d(x, z) < \frac{A\tau}{2a_d^2}, \quad 2^{k_0-k} < \tau < \tau_A.$$

Тогда в силу (7), (13), (18) и (19)

$$\begin{aligned} d(x_j, z) &\leq a_d^2[d(x_j, y_j) + d(y_j, x) + d(x, z)] \\ &\leq a_d^2 \left[t_{x_j} \left(\log \frac{2}{t_{x_j}} \right)^\delta + At_{x_j} + \frac{A\tau}{2a_d^2} \right] < \tau \left(\log \frac{2}{\tau} \right)^\delta. \end{aligned}$$

Следовательно, $(z, \tau) \in D_{A, \delta}(x_j)$ (см. (12)), но $x_j \in E_{A, k}(\lambda)$ и $2^{k_0-k} < \tau < \tau_A$, поэтому

$$u(z, A\tau) \leq \lambda \log \frac{2}{\tau} < \lambda \log 2^{k-k_0+1} < k\lambda.$$

Это означает, что $x \notin E_i(k\lambda)$ при $i < k - k_0$.

С другой стороны, так как $t_{x_j} > 2^{-k-1}$, $d(x, y_j) < At_{x_j}$, то из второго неравенства (18) вытекает, что $x \notin E_i(k\lambda)$ при $i > k$. Таким образом, включение (20) доказано.

Теперь, используя (20), получаем при $k \geq k_0 + k_A$

$$\begin{aligned} \mu E_{A, k}(\lambda) &\leq c \sum_j \mu B_{x_j} = c \sum_j \frac{\mu B_{x_j}}{\mu B_{x_j}^*} \cdot \mu B_{x_j}^* = ck^p A^{-\gamma} \sum_j \mu B_{x_j}^* \\ &= ck^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_j B_{x_j}^* \right) \leq ck^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_{i=k-k_0}^k E_i(k\lambda) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Подобным образом, но с существенными упрощениями, доказывается и неравенство

$$\mu \left(\bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_{A, k}(\lambda) \right) \leq ck_A^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_{i=k_A}^{k_A+k_0-1} E_i(k\lambda) \right). \quad (22)$$

В самом деле, пусть для краткости

$$S_A(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_{A, k}(\lambda)$$

и $x \in S_A(\lambda)$, тогда существует такая пара $(y_x, t_x) \in X \times (2^{-k_A-k_0}, \tau_A]$, что

$$d(x, y_x) < t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^\delta, \quad u(y_x, At_x) > \lambda \log \frac{2}{t_x} \geq k\lambda. \quad (23)$$

Как и выше, рассмотрим семейство шаров

$$B_x = B \left(y_x, t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^\delta \right), \quad x \in E_{A, k}(\lambda).$$

По лемме 1 из него можно выделить конечное или счетное подсемейство $\{B_{x_j}\}$ со свойствами

$$B_{x_j} \cap B_{x_i} = \emptyset, \quad \mu S_A(\lambda) \leq c \sum_j \mu B_{x_j}.$$

Введем новое семейство шаров

$$B_{x_j}^* = B(y_{x_j}, At_{x_j}), \quad j \geq 1,$$

тогда в силу (23)

$$B_{x_j}^* \subset \bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_k(\lambda).$$

Повторяя доказательство неравенства (21), получим (22).

Из (21) и (22) нетрудно вывести оценку для нормы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A \delta u\|_{L_\mu^p(X)}^p &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu E_A(\lambda) d\lambda = p \sum_{k=k_A}^\infty \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu E_{A,k}(\lambda) d\lambda \\ &\leq c \sum_{k=k_A}^\infty k^p A^{-\gamma} \sum_{i=k-k_0}^k \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu E_i(k\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем интеграле $k\lambda$ на новое λ , получим (см. еще (17), (15) и лемму 2)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_A \delta u\|_{L_\mu^p(X)}^p &\leq c A^{-\gamma} \sum_{k=k_A}^\infty \int_0^\infty \lambda^{p-1} \sum_{i=k-k_0}^k \mu E_i(\lambda) d\lambda \\ &\leq c A^{-\gamma} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \sum_{i=0}^\infty \mu E_i(\lambda) d\lambda \\ &= c A^{-\gamma} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu E(\lambda) d\lambda = c A^{-\gamma} \|N_A u\|_{L_\mu^p(X)}^p = c A^{-\gamma} \|Mf\|_{L_\mu^p(X)}^p \\ &\leq c A^{-\gamma} \|f\|_{L_\mu^p(X)}^p, \end{aligned}$$

и лемма 4 доказана.

Утверждение теоремы 1 вытекает теперь непосредственно из лемм 2–4.

3. Некоторые обобщения и частные случаи

3.1. Локальная форма теоремы 1. Прежде всего отметим, что доказательство теоремы 1 носит локальный характер. Это позволяет доказать следующее обобщение теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G \subset X$ – открытое множество и $p > 1$. Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует такая постоянная $c_p(K)$, что для $f \in L_\mu^1(X) \cap L_\mu^p(G)$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f)\|_{L_\mu^p(K)} \leq c_p(K) (\|f\|_{L_\mu^1(X)} + \|f\|_{L_\mu^p(G)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в значительной степени повторяет рассуждения, проведенные выше. Поэтому мы остановимся кратко лишь на изменениях, которые надо сделать.

Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Разобьем оператор (9) на две части

$$\mathcal{P}_0 f(x, t) = \int_{B(x, \varepsilon)} \frac{f(y)}{(d(x, y) + t)^\gamma} d\mu(y) + \int_{X \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{f(y)}{(d(x, y) + t)^\gamma} d\mu(y).$$

Второе слагаемое оценивается сверху через $c\|f\|_{L_\mu^1(X)}$ равномерно по x и t , а первое оценивается точно так же, как и выше (см. леммы 3 и 4), только вместо максимальной функции Харди–Литтлвуда Mf будет участвовать усеченная максимальная функция

$$M_\varepsilon f(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y, t)$ радиуса $0 < t < \varepsilon$, содержащим точку $x \in X$.

3.2. Весовая форма теоремы 1. Используя то же доказательство, можно получить весовой вариант теоремы 1. Для формулировки нам понадобятся некоторые определения.

Неотрицательная функция ν , определенная на борелевских множествах из X , называется *внешней мерой*, если она монотонна и субаддитивна, т.е.

$$G_1 \subset G_2 \Rightarrow \nu(G_1) \leq \nu(G_2), \quad \nu\left(\bigcup_j G_j\right) \leq \sum_j \nu(G_j).$$

Если f – борелевская функция и ν – внешняя мера на X , то положим

$$\|f\|_{L_\nu^p(X)} = \left(p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{|f| > \lambda\} d\lambda \right)^{1/p}.$$

Для меры ν это обычная норма в $L_\nu^p(X)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > 1$, $0 \leq \delta \leq p/\gamma$, $\beta = p - \gamma\delta$ и ν – внешняя мера, удовлетворяющая условию

$$\nu(B(x, t)) \leq ct^\gamma \left(\log \frac{2}{t} \right)^\beta \quad (24)$$

(c не зависит от $x \in X$ и $t > 0$).

Тогда

$$\|\mathcal{L}_\delta(\mathcal{P}_0 f)\|_{L_\nu^p(X)} \leq c_p \|f\|_{L_\mu^p(X)},$$

где постоянная c_p не зависит от $f \in L_\mu^p(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО слово в слово копирует обоснование теоремы 1, лишь в момент оценки отношения мер νB_{x_j} и $\mu B_{x_j}^*$ в (21) и (22) надо дополнительно использовать (24). Тогда мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\nu B_{x_j}}{\mu B_{x_j}^*} &\leq \frac{1}{(At_j)^\gamma} \cdot ct_j^\gamma \left(\log \frac{2}{t_j} \right)^{\gamma\delta} \left(\log \frac{2}{t_j (\log(2/t_j))^\delta} \right)^\beta \leq \frac{c(\log(2/t_j))^{\gamma\delta+\beta}}{A^\gamma} \\ &\leq ck^{\gamma\delta+\beta} A^{-\gamma} = ck^p A^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства проходит без изменения.

Теорема 1 является частным случаем при $\beta = 0$ теоремы 3. Последней также можно придать локальный характер в духе теоремы 2.

3.3. Многомерные аналоги оператора (3). Рассмотрим, наконец, два частных случая оператора (9), каждый из которых обобщает оператор (3) с $\lambda = 0$ на многомерный случай. К ним применимы теоремы 1–3.

Пусть $X = S^{n-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, μ – поверхностная мера Лебега на S^{n-1} , нормированная условием $\mu(S^{n-1}) = 1$, $d(x, y) = |x - y|$ – евклидова метрика. Тогда в условии (8) $\gamma = n - 1$.

Многомерным аналогом (2) будет оператор

$$P_l f(x) = \int_{S^{n-1}} [p(x, \theta)]^{l+(n-1)/n} f(\theta) d\mu(\theta),$$

где

$$p(x, \theta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^n}$$

– ядро Пуассона для единичного шара (см., например, [11]). При выбранных обозначениях (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 f(x) &= \left(\log \frac{2}{1 - |x|} \right)^{-1} \int_{S^{n-1}} \frac{f(\eta)}{|x - \eta|^{n-1}} d\mu(\eta) \\ &\asymp \left(\log \frac{2}{t} \right)^{-1} \int_{S^{n-1}} \frac{f(\eta)}{(|\theta - \eta| + t)^{n-1}} d\mu(\eta), \end{aligned}$$

где $t = 1 - |x|$, $\theta = x/|x|$.

Пусть $X = S^{2n-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, μ – поверхностная мера Лебега, $\mu(S^{2n-1}) = 1$, $d(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|$ – неизотропная квазиметрика (здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – комплексное скалярное произведение). В этом случае $\gamma = n$.

Сейчас естественным является также инвариантное ядро Пуассона [12]

$$P_n(z, \zeta) = \frac{(1 - |z|^2)^n}{|1 - \langle z, \zeta \rangle|^{2n}}$$

и по аналогии с (2) мы приходим к

$$P_l f(z) = \int_{S^{2n-1}} [p(z, \eta)]^{l+1/2} f(\eta) d\mu(\eta).$$

Оператор (9) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_0 f(z) &= \left(\log \frac{2}{1-|z|} \right)^{-1} \int_{S^{2n-1}} \frac{f(\eta)}{|1-\langle z, \eta \rangle|^n} d\mu(\eta) \\ &\asymp \left(\log \frac{2}{t} \right)^{-1} \int_{S^{2n-1}} \frac{f(\eta)}{(|1-\langle \zeta, \eta \rangle| + t)^n} d\mu(\eta),\end{aligned}$$

где $t = 1 - |z|$, $\zeta = z/|z|$.

В заключение отметим, что возможны и другие приложения теорем 1–3. Примерами могут быть граничное поведение интегралов Пуассона в поликруге или на симметрических римановых пространствах (см. [5]–[7]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [2] Littlewood J. E. On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. 1927. V. 2. P. 172–176.
- [3] Sjögren P. Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique // Lecture Notes in Math. V. 1096. Berlin: Springer, 1984. P. 544–548.
- [4] Sjögren P. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Pacific J. Math. 1988. V. 131. P. 361–391.
- [5] Rönning J.-O. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Ph.D. Thesis. Göteborg: Chalmers Univ. Technology, 1993.
- [6] Rönning J.-O. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Math. Scand. 1997. V. 81. P. 219–235.
- [7] Sjögren P. Approach regions for the square root of the Poisson kernel and bounded functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. V. 55. P. 521–527.
- [8] Катковская И. Н., Кротов В. Г. О касательном граничном поведении потенциалов // Тр. ИМ НАН Беларуси. 2000. Т. 5. С. 80–83.
- [9] Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. №4. P. 569–645.
- [10] Кротов В. Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // Тр. МИАН. 1989. Т. 190. С. 117–138.
- [11] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [12] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в C^n . М.: Мир, 1984.

(И. Н. Катковская) Белорусский государственный
технический университет, г. Минск

Поступило
23.06.2003

(В. Г. Кротов) Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: krotov@bsu.by