Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, Различение симметричных пространств и L^∞ с помощью дифференциального базиса, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 515–523

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:17:29

УДК 517.5

РАЗЛИЧЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ И L^∞ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО БАЗИСА

Е. И. Бережной, А. А. Перфильев

Одна из основных задач теории дифференцирования интегралов имеет вид: пусть X, Y – два различных в каком-нибудь смысле пространства. Существует ли дифференциальный базис, который дифференцирует X , т.е. все интегралы от функций из X , но не дифференцирует Y , т.е. найдется функция из Y , интеграл от которой данный базис не дифференцирует. В заметке строится дифференциальный базис, который дифференцирует L^∞ , а любое другое симметричное пространство $X \neq L^\infty$ не дифференцирует.

Библиография: 10 названий.

Одна из основных задач теории дифференцирования интегралов имеет вид: пусть X, Y – два различных в каком-нибудь смысле пространства. Можно ли эти два пространства различить с помощью дифференциальных базисов, т.е. существует ли дифференциальный базис, который дифференцирует все интегралы от функций из X , но найдется функция из Y , интеграл от которой данный базис не дифференцирует. Эта проблема еще далека от своего окончательного решения. Первый результат, имеющий отношение к этой проблеме, принадлежит Хейесу [1, с. 155], который показал, что можно различить пространства L^p и L^q при $p \neq q$, построив соответствующий дифференциальный базис. Далее, Стоколос [2], [3] показал, что можно различить пространства Орлича, построив соответствующий дифференциальный базис. Последние достижения по проблеме различения пар симметричных пространств с помощью дифференциальных базисов представлены в [4], где предложен новый способ построения дифференциальных базисов. Базисы, построенные этим способом, позволяют различать симметричные пространства с различным поведением фундаментальных функций в нуле, как в случае Хейеса и Стоколоса, и даже позволяют различать пространства Лоренца и Марцинкевича или пространства Лебега и Марцинкевича, у которых фундаментальные функции одинаковы. Наряду с задачей различения пары пространств можно рассматривать задачу различения пространства X и набора пространств $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ с помощью одного дифференциального базиса. Если вернуться к шкале пространств Лебега L^p , то Хейес показал [1, с. 165], что существует дифференциальный базис, который дифференцирует L^∞ , но не дифференцирует L^p при $1 \leq p < \infty$. Впрочем, справедливы непрерывные вложения $L^\infty \subset \exp(L) \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p$, где $\exp(L)$ есть пространство Орлича, построенное по выпуклой функции $h(t) = \exp(|t|) - 1$, и поэтому задачу различения L^∞ и набора $\{L^p : 1 \leq p < \infty\}$ можно свести к задаче различения двух симметричных пространств L^∞ и $\exp(L)$ с разным поведением в нуле фундаментальных функций. Поэтому последний результат Хейеса можно получить и из [4].

В этой заметке решается гораздо более сложная задача. А именно, строится дифференциальный базис, который дифференцирует L^∞ , а любое другое симметричное пространство $X \neq L^\infty$ не дифференцирует.

Напомним некоторые определения, связанные с дифференциальными базисами. Эти определения можно найти в [1].

Дифференциальным базисом $B(t)$ в точке $t \in \mathbb{R}^n$ называется семейство содержащих t ограниченных измеримых множеств положительной меры таких, что найдется по крайней мере одна последовательность $\{B_k \in B(t)\}$, удовлетворяющая условию $\text{diam } B_k \rightarrow 0$. *Дифференциальным базисом в $\mathbb{R}^n$* называется объединение указанных семейств $\mathbf{B} = \{\cup B(t) : t \in \mathbb{R}^n\}$.

Классическими примерами дифференциальных базисов являются базисы в $\mathbb{R}^n$, обозначаемые обычно через $\mathbf{B}_s(\mathbb{R}^n)$, $s = 1, 2, \dots, n$, состоящие из всех прямоугольных параллелепипедов B вида

$$B = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i < t_i < \alpha_i + \gamma_i, i = 1, \dots, n\},$$

удовлетворяющих условию $\gamma_j = \gamma_1, j = 1, \dots, s, \alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{R}_+$.

Базис $\mathbf{B}$, образованный открытыми множествами, называется *базисом Буземана–Феллера* (*BF-базисом*), если из условий $B \in \mathbf{B}$ и $t \in B$ следует, что $B \in B(t)$. Смысл введения BF-базисов состоит в том, что возникающие в теории дифференцирования по базисам вопросы измеримости легко решаются для BF-базисов. Основная масса задач и утверждений в теории дифференцирования интегралов заключается в проверке справедливости почти всюду какого-либо факта. Поэтому естественно рассматривать дифференциальные базисы, определенные не для всех точек, а лишь почти всюду.

Определим теперь верхнюю и нижнюю производные интеграла от локально интегрируемой функции f в точке $t \in \mathbb{R}^n$ относительно базиса $\mathbf{B}$ с помощью равенств

$$\overline{D_{\mathbf{B}}}(f, t) = \sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} f \, ds : B_k \in B(t), \text{diam } B_k \rightarrow 0 \right\},$$

$$\underline{D_{\mathbf{B}}}(f, t) = \inf \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} f \, ds : B_k \in B(t), \text{diam } B_k \rightarrow 0 \right\}.$$

Говорят, что *базис $\mathbf{B}$ дифференцирует интеграл от f* , если почти всюду выполнены равенства

$$\overline{D_{\mathbf{B}}}(f, t) = \underline{D_{\mathbf{B}}}(f, t) = f(t).$$

Если $\mathbf{B}$ дифференцирует интеграл от любой функции f из пространства X , то говорят, что *базис $\mathbf{B}$ дифференцирует пространство X* .

Если базис $\mathbf{B}$ дифференцирует L^∞ , то он называется *плотностным*.

Следующие классические результаты явились фундаментом теории дифференцирования интегралов в $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{B}_s$ дифференцирует $L(\text{Log}^+ L)^{n-s}$ (случай $s = n$ – Лебег [5], случай $s = 1$ – Ессен, Марцинкевич, Зигмунд [6], случай произвольного s – Зигмунд [7]). Для $s = 1$ неустойчивость этого результата показал в 1935 году Сакс [8]. При других s точность вышеупомянутых теорем была показана Мелеро [9].

Теперь напомним некоторые сведения из теории симметричных пространств функций. Теория симметричных пространств функций подробно описана в [10].

Пусть $Q_0 = [0, 1]^n$ есть единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с обычной мерой Лебега. Для $f: Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения, соответствующую функции f :

$$\lambda(f, \gamma) = |\{t : |f(t)| > \gamma\}|.$$

Банахово пространство X , состоящее из измеримых функций, называется *симметричным*, если для измеримых функций $x, y, y \in X$, из выполнения при всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ неравенства $\lambda(x, \gamma) \leq \lambda(y, \gamma)$ следует, что $\|x\|_X \leq \|y\|_X$. Для каждого симметричного пространства X с помощью равенства $\psi(X, t) = \{\|\chi(D)|X\| : |D| = t\}$ ($\chi(D, s)$ – характеристическая функция множества D , причем аргумент s у этой функции мы будем опускать) определена фундаментальная функция. Эта функция не убывает, а $t^{-1}\psi(X, t)$ не возрастает. Классическими примерами симметричных пространств являются пространства Лебега, Орлича, Марцинкевича, Лоренца. Поскольку пространства Лоренца $\Lambda(\psi)$ будут использованы ниже, напомним их определение. Обозначим через U множество возрастающих вогнутых функций $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, каждая из которых непрерывна на $[0, 1]$, и $\varphi(0) = 0$. Тогда *пространство Лоренца* $\Lambda(\varphi)$ состоит из тех f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^\infty \varphi(\lambda(f, s)) ds.$$

Для фундаментальной функции пространства Лоренца выполнено $\psi(\Lambda(\varphi), t) = \varphi(t)$.

Теперь мы переходим к построению дифференциальных базисов. Для наглядности продемонстрируем конструкцию для $n = 2$ и единичного квадрата.

Построение соответствующего базиса $\mathbf{B}$ мы начнем с построения некоторого набора $\{W(i)\}_{i=1}^\infty$ множеств из квадрата $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$, объединение которых и будет составлять базис $\mathbf{B}$.

Пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $P = \{p_i\}_{i=1}^\infty$, для элементов которой при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$p_i > 2i. \quad (1)$$

При фиксированном i множество $W(i)$ в свою очередь будет состоять из объединения некоторых наборов множеств: $W(i) = \bigcup_{j=1}^i U(i, j)$. Элементы набора $U(i, j)$ строятся следующим образом. Разобьем квадрат Q_0 на 2^{2j} равных квадратов и перенумеруем их $Q(j, m, l)$, $m = 1, 2, \dots, 2^j$, $l = 1, 2, \dots, 2^j$, причем индекс m будет означать номер горизонтали, а индекс l будет означать номер вертикали, на пересечении которых лежит $Q(j, m, l)$. Сразу же отметим, что при всех $m = \overline{1, 2^j}$ и $l = \overline{1, 2^j}$ выполняется равенство

$$|Q(j, m, l)| = 2^{-2j}. \quad (2)$$

Зафиксируем m и рассмотрим пару соседних квадратов $Q(j, m, 2l-1), Q(j, m, 2l)$, $l = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$. Опишем теперь элементы $U(i, j)$, принадлежащие $Q(j, m, 2l-1) \cup Q(j, m, 2l)$.

Квадрат $Q(j, m, 2l-1)$ поделим на $2^{2(p_i-j)}$ равных квадратов и в крайней левой вертикали выберем j -й квадрат, который мы будем называть *выделенным* и обозначать $B(i, j, m, 2l-1)$. Подразделение квадрата $Q(j, m, 2l-1)$ на $2^{2(p_i-j)}$ равных квадратов эквивалентно разбиению исходного квадрата Q_0 на 2^{2p_i} равных квадратов. Заметим, что эта процедура не зависит от номера j .

Соседний квадрат $Q(j, m, 2l)$ поделим на $2^{2(p_i-2j)}$ равных квадратов $Q(i, j, m, 2l, k)$, $k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}$. Далее, к выделенному квадрату $B(i, j, m, 2l-1)$ из $Q(j, m, 2l-1)$ будем добавлять поочередно квадраты $Q(i, j, m, 2l, k)$. В результате образуем множества

$$V(i, j, m, 2l-1, k) = B(i, j, m, 2l-1) \cup Q(i, j, m, 2l, k), \quad k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}.$$

По аналогии с конструкцией множеств $V(i, j, m, 2l-1, k)$ строятся множества $V(i, j, m, 2l, k)$. Для этого квадрат $Q(j, m, 2l)$ поделим на $2^{2(p_i-j)}$ равных квадратов и в крайней правой вертикали берем j -й квадрат, который мы будем называть *выделенным* и обозначать $B(i, j, m, 2l)$. Квадрат $Q(j, m, 2l-1)$ поделим на $2^{2(p_i-2j)}$ равных квадратов $Q(i, j, m, 2l-1, k)$, $k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}$. Далее, к выделенному квадрату $B(i, j, m, 2l)$ из $Q(j, m, 2l)$ будем добавлять поочередно квадраты $Q(i, j, m, 2l-1, k)$. В результате образуем множества

$$V(i, j, m, 2l, k) = B(i, j, m, 2l) \cup Q(i, j, m, 2l-1, k), \quad k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}.$$

Объединяя семейства множеств $\{V(i, j, m, 2l-1, k) : k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}\}$ и $\{V(i, j, m, 2l, k) : k = 1, 2, \dots, 2^{2(p_i-2j)}\}$, получим все элементы набора $U(i, j)$, принадлежащие $Q(j, m, 2l-1) \cup Q(j, m, 2l)$. Прделаем аналогичную процедуру для остальных пар квадратов на данной горизонтали, потом повторим построение для всех остальных горизонталей и образуем набор множеств $U(i, j)$ с помощью равенства

$$U(i, j) = \bigcup_{m=1}^{2^j} \left\{ \bigcup_{l=1}^{2^j} \left(\bigcup_{k=1}^{2^{2(p_i-2j)}} \{V(i, j, m, l, k)\} \right) \right\}.$$

Отметим важные свойства элементов набора $U(i, j)$:

- 1) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq m \leq 2^{2j}$, $1 \leq l \leq 2^{2j}$ выполнено равенство

$$|B(i, j, m, l)| = 2^{-2p_i}; \quad (3)$$

- 2) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq m \leq 2^j$, $1 \leq l \leq 2^j$, $1 \leq k \leq 2^{2(p_i-2j)}$ выполнено равенство

$$|Q(i, j, m, l, k)| = 2^{-2p_i+2j}; \quad (4)$$

- 3) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq m \leq 2^j$, $1 \leq l \leq 2^j$, $1 \leq k \leq 2^{2(p_i-2j)}$ выполнено равенство

$$|V(i, j, m, l, k)| = 2^{-2p_i}(1 + 2^{2j}); \quad (5)$$

- 4) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$, $1 \leq m, l \leq 2^{2j}$, $1 \leq k \leq 2^{2(p_i-2j)}$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{diam } Q(j, 1, 1) \leq \text{diam } (V(i, j, m, l, k)) \leq \sqrt{2.5} \text{diam } Q(j, 1, 1),$$

или согласно (2)

$$2^{-j} \leq \text{diam } (V(i, j, m, l, k)) \leq 2^{-j}\sqrt{5}; \quad (6)$$

5) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$ выполнено равенство

$$\sum_{m=1}^{2^j} \sum_{l=1}^{2^j} |B(i, j, m, l)| = 2^{2(j-p_i)}; \quad (7)$$

6) для любого $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^{2^j} \sum_{l=1}^{2^j} |B(i, j, m, l)| \leq 2^{2(i+1-p_i)}; \quad (8)$$

7) для любых $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq i$ выполнено равенство

$$Q_0 = \bigcup_{m=1}^{2^j} \left\{ \bigcup_{l=1}^{2^j} \left(\bigcup_{k=1}^{2^{2(p_i-2j)}} V(i, j, m, l, k) \right) \right\}. \quad (9)$$

Объединив теперь наборы множеств $W(1), W(2), \dots, W(i), \dots$, получим набор, который в силу (6) и (9) можно считать дифференциальным BF -базисом $\mathbf{B}$.

По дифференциальному базису $\mathbf{B}$ и $\delta > 0$ построим максимальный оператор

$$\overline{M}_\delta x(t) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |x(t)| dt : t \in B \in \mathbf{B}, \text{diam } B < \delta \right\}.$$

Напомним, что через $\mathbf{B}_2(Q_0)$ обозначается дифференциальный базис, элементами которого являются все квадраты в Q_0 со сторонами, параллельными осям координат. По дифференциальному базису $\mathbf{B}_2(Q_0)$ и $\delta > 0$ построим свой максимальный оператор

$$M_\delta x(t) = \sup \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |x(t)| dt : t \in B \in \mathbf{B}_2(Q_0), \text{diam } B < \delta \right\}.$$

Для максимального оператора M_δ хорошо известно [1, с. 40] неравенство слабого типа

$$|\{t : M_\delta x(t) > \lambda\}| < \frac{c_0}{|\lambda|} \int_{Q_0} |x(t)| dt. \quad (10)$$

Наша ближайшая цель – получение эффективной оценки максимального оператора $\overline{M}_\delta$.

ЛЕММА. Пусть по последовательности натуральных чисел $P = \{p_i\}_{i=1}^\infty$, для элементов которой при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства (1), построены наборы множеств $W(1), \dots, W(i), \dots$ и дифференциальный базис $\mathbf{B}$.

Пусть фиксированное число λ удовлетворяет неравенствам $2^{-2k_0+1} \leq \lambda < 2^{-2k_0+2}$, $k_0 \in \mathbb{N}$.

Если $k_1 > k_0$, $k_1 \in \mathbb{N}$, то при всех $\delta < 2^{-k_1}$ для любого множества $A \subseteq Q_0$ справедлива оценка

$$|\{t : \overline{M}_\delta \chi(A) > \lambda\}| < \frac{2c_0}{|\lambda|} |A| + \frac{16}{9} 2^{-2(k_1+1)}, \quad (11)$$

где константа c_0 взята из неравенства (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия на δ и (6) следует, что множества из наборов $W(i)$ при $i \leq k_1$ не будут участвовать при вычислении $\overline{M_\delta \chi}(A)$, а при $i > k_1$ из наборов $U(i, j)$ при вычислении $\overline{M_\delta \chi}(A)$ будут участвовать лишь те, у которых $j > k_1$.

Покажем, что выполняется вложение

$$\begin{aligned} & \{t : \overline{M_\delta \chi}(A) > \lambda\} \\ & \subseteq \left\{t : M_\delta \chi(A) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{\bigcup_{k_1 < i} \left\{\bigcup_{k_1 < j \leq i} \left\{\bigcup_{1 \leq m \leq 2^{2j}} \left\{\bigcup_{1 \leq l \leq 2^{2j}} B(i, j, m, l)\right\}\right\}\right\}\right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Действительно, если $s \in \{t : \overline{M_\delta \chi}(A) > \lambda\}$, то найдется $B \in \mathbf{B}$, для которого выполнены условия

$$s \in B, \quad \text{diam } B < \delta, \quad \frac{1}{|B|} \int_B \chi(A) dt > \lambda. \quad (13)$$

Тогда $B \in U(i, j) \in W(i)$ при некоторых $i > k_1$ и $j > k_1$. Поэтому $B = B(i, j, m, l) \cup Q(i, j, m, l, k)$ при некоторых m, l, k .

Если $s \in B(i, j, m, l)$, то

$$s \in \left\{\bigcup_{k_1 < i} \left\{\bigcup_{k_1 < j \leq i} \left\{\bigcup_{1 \leq m \leq 2^{2j}} \left\{\bigcup_{1 \leq l \leq 2^{2j}} B(i, j, m, l)\right\}\right\}\right\}\right\}$$

и для таких s вложение (12) доказано. Пусть теперь $s \in Q(i, j, m, l, k)$. Тогда согласно (5) верно равенство $|B| = (2^{2j} + 1)2^{-2p_i}$. Из (13), используя (3) и (4), получим неравенство

$$\begin{aligned} \lambda & < \frac{1}{(2^{2j} + 1)2^{-2p_i}} \int_{B(i, j, m, l) \cup Q(i, j, m, l, k)} \chi(A) dt \\ & = \frac{1}{(2^{2j} + 1)2^{-2p_i}} \left(\int_{B(i, j, m, l)} \chi(A) dt \right) + \frac{1}{(2^{2j} + 1)2^{-2p_i}} \left(\int_{Q(i, j, m, l, k)} \chi(A) dt \right) \\ & \leq \frac{1}{2^{2j} 2^{-2p_i}} |B(i, j, m, l)| + \frac{1}{2^{2j} 2^{-2p_i}} \left(\int_{Q(i, j, m, l, k)} \chi(A) dt \right) \\ & \leq 2^{-2j} + \frac{1}{|Q(i, j, m, l, k)|} \left(\int_{Q(i, j, m, l, k)} \chi(A) dt \right). \end{aligned}$$

Откуда в силу условий на k_0 и k_1 следует неравенство

$$\frac{1}{|Q(i, j, m, l, k)|} \int_{Q(i, j, m, l, k)} \chi(A) dt > \lambda - 2^{-2k_1} > \frac{\lambda}{2}. \quad (14)$$

Из (14) получим, что $s \in \{t : M_\delta \chi(A) > \lambda/2\}$.

Таким образом, (12) доказано.

Из (10) получим неравенство

$$\left| \left\{t : M_\delta \chi(A) > \frac{\lambda}{2}\right\} \right| \leq \frac{2c_0}{|\lambda|} \int_{Q_0} \chi(A) dt = \frac{2c_0}{|\lambda|} |A|, \quad (15)$$

а из (7) и (1) придем к неравенству

$$\left| \left\{ \bigcup_{k_1 < i} \left\{ \bigcup_{k_1 < j \leq i} \left\{ \bigcup_{1 \leq m \leq 2^{2j}} \left\{ \bigcup_{1 \leq l \leq 2^{2j}} B(i, j, m, l) \right\} \right\} \right\} \right\} \right| \\ \leq \sum_{i=k_1+1}^{\infty} \sum_{j=k_1+1}^i \left(\sum_{m=1}^{2^j} \sum_{l=1}^{2^j} |B(i, j, m, l)| \right) = \sum_{i=k_1+1}^{\infty} \sum_{j=k_1+1}^i 2^{2(j-p_i)} \leq \frac{16}{9} 2^{-2(k_1+1)}. \quad (16)$$

Из соотношений (12), (15) и (16) следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть последовательность натуральных чисел $P = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет (1), и по ней построены наборы множеств $W(1), \dots, W(i), \dots$ и дифференциальный базис $\mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{B}$ является плотностным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно критерию из теоремы 1.1 из [1, с. 66] для доказательства утверждения следствия достаточно для фиксированного $\lambda \in (0, 1)$ доказать равенство

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, |A| \rightarrow 0} |\{t : \overline{M}_{\delta} \chi(A) > \lambda\}| = 0. \quad (17)$$

Равенство (17) немедленно следует из (11).

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 1. Пусть по последовательности натуральных чисел $P = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющей (1), построены наборы множеств $W(1), \dots, W(i), \dots$ и дифференциальный базис $\mathbf{B}$. Пусть по $\varphi \in U$ построено пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$. Тогда $\mathbf{B}$ не дифференцирует $\Lambda(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и выберем $i(j) \in \mathbb{N}$, $i(j) \geq j$, так чтобы

$$\varphi(2^{2(j-p_{i(j)})}) \leq 4^{-2j}. \quad (18)$$

Для каждой пары $(i(j), j)$ объединим все выделенные квадраты набора $U(i(j), j)$, организуем множество

$$D(i(j), j) = \bigcup_{m=1}^{2^j} \left\{ \bigcup_{l=1}^{2^j} B(i(j), j, m, l) \right\}$$

и положим

$$g_j(t) = (1 + 2^{2j}) \chi(D(i(j), j)).$$

Тогда из явного вида g_j , соотношений (8) и (18) и определения нормы в пространстве Лоренца следует неравенство

$$\|g_j|_{\Lambda(\varphi)}\| = (1 + 2^{2j}) \varphi(|D(i(j), j)|) \leq (1 + 2^{2j}) \varphi \left(\sum_{m=1}^{2^j} \sum_{l=1}^{2^j} |B(i(j), j, m, l)| \right) \\ = (1 + 2^{2j}) \varphi(2^{2(j-p_{i(j)})}) \leq (1 + 2^{2j}) 4^{-2j}. \quad (19)$$

С другой стороны, опять же из явного вида g_j для любых множеств $V(i(j), j, m, 2l, k)$ ($1 \leq m \leq 2^{2j}$, $1 \leq l \leq 2^{2j}$, $1 \leq k \leq 2^{2(p_i - 2j)}$) из набора $U(i(j), j)$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|V(i(j), j, m, l, k)|} \int_{V(i(j), j, m, l, k)} g_j(t) dt \\ & \geq \frac{1}{(2^{2j} + 1)|B(i(j), j, m, l)|} \int_{B(i(j), j, m, l)} g_j(t) dt \geq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Положим

$$f_{j_0}(t) = \sum_{j=j_0}^{\infty} g_j(t).$$

Тогда из (19) следует, что

$$\lim_{j_0 \rightarrow \infty} \|f_{j_0}\| \Lambda(\varphi) = 0. \quad (21)$$

С другой стороны, из (20) и (9) следует неравенство

$$\overline{D}f_{j_0}(t) \geq \chi(Q_0). \quad (22)$$

Соотношения (21) и (22) показывают, что $\mathbf{B}$ не дифференцирует $\Lambda(\varphi)$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Существует плотностный дифференциальный базис $\mathbf{B}$, который не дифференцирует любое симметричное пространство X , отличное от L^∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность натуральных чисел $P = \{p_i\}_{i=1}^\infty$, удовлетворяющую (1), и построим по ней наборы множеств $W(1), \dots, W(i), \dots$, по которым построим дифференциальный базис $\mathbf{B}$. Покажем, что таким образом построенный дифференциальный базис искомый.

Согласно следствию к лемме базис $\mathbf{B}$ является плотностным. Покажем, что $\mathbf{B}$ не дифференцирует отличные от L^∞ симметричные пространства.

Пусть X – симметричное пространство, не совпадающее с L^∞ , и $\psi(t)$ – его фундаментальная функция. Если $L^\infty \neq X$, то найдется неограниченная на Q_0 функция $x \in X$. Положим $M_l = \{t \in Q_0 : |x(t)| > l\}$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда $|M_l| > 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$ и $\lim_{l \rightarrow \infty} |M_l| = 0$. Из неравенств $\infty > \|x\|_X \geq l\|\chi(M_l)\|_X = l\psi(|M_l|)$ и квазивогнутости фундаментальной функции получим, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \psi(|M_l|) = 0$ и, следовательно, $\psi(t)$ эквивалентна некоторой функции $\psi_0 \in U$. Согласно теореме 1 базис $\mathbf{B}$ не дифференцирует $\Lambda(\psi_0)$, а согласно теореме вложения Семенова [10, с. 160], справедливо вложение $\Lambda(\psi_0) \subseteq X$. Поэтому дифференциальный базис $\mathbf{B}$ не дифференцирует X .

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
- [2] Stokolos A. M. On the differentiation of integrals of functions from $L\Phi(L)$ // *Studia Math.* 1988. V. 88. P. 103–120.
- [3] Stokolos A. M. On the differentiation of integrals of functions from Orlicz classes // *Studia Math.* 1989. V. 94. P. 35–50.
- [4] Бережной Е. И. О дифференцировании интегралов от функций из симметричных пространств дифференциальными базисами // *Analysis Mathematica*. 1996. V. 22. P. 267–288.
- [5] Lebesgue A. Sur l'integration des fonctions discontinues // *Ann. Sci. 'Ecole Norm. Sup.* 1910. V. 27. P. 361–450.
- [6] Jessen B., Marzinkiewicz J., Zygmund A. Note on the differentiability of multiple integrals // *Fund. Math.* 1935. V. 25. P. 217–234.
- [7] Zygmund A. A note on the differentiability of multiple integrals // *Collog. Math.* 1967. V. 16. P. 199–204.
- [8] Saks S. On the strong derivatives of functions of integrals // *Fund. Math.* 1935. V. 25. P. 235–252.
- [9] Melero B. A negative result in differentiation theory // *Studia Math.* 1982. V. 72. P. 173–182.
- [10] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: smirn@gw.yspu.yar.ru

Поступило
28.02.1999