Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Вдовин, Максимальные порядки абелевых подгрупп
в конечных группах Шевалле, *Матем. заметки*, 2001,
том 69, выпуск 4, 524–549

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:14:09

УДК 512.542.5

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ

Е. П. Вдовин

В настоящей работе для любой конечной группы G лиева типа (кроме ${}^2F_4(q)$) найден порядок $a(G)$ большой абелевой подгруппы или даны его нижняя и верхняя оценки (в группах $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ и ${}^2E_6(q^2)$). В тех группах, в которых число $a(G)$ найдено точно, большая абелева подгруппа совпадает с большой унитарной или большой полупростой абелевой подгруппой. В группах $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ и ${}^2E_6(q^2)$ доказано, что если абелева подгруппа содержит нецентральный полупростой элемент, то ее порядок меньше порядка некоторой абелевой унитарной группы. Поэтому в этих группах большие абелевы подгруппы унитарны, и для того чтобы найти значение чисел $a(G)$ в этих группах, необходимо найти порядки больших унитарных абелевых подгрупп. Таким образом, доказано, что в любой конечной группе лиева типа (кроме ${}^2F_4(q)$) большая абелева подгруппа является большой унитарной или большой полупростой абелевой подгруппой.

Библиография: 21 название.

1. Введение. В данной работе изучаются строение и порядки больших абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле. Различные специальные абелевы подгруппы в конечных группах лиева типа изучались многими авторами. Так, например, Картер [1], [2] получил строение связанных централизаторов в алгебраических группах над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, а также строение и порядки их подгрупп неподвижных точек относительно автоморфизма Фробениуса. В частности, он нашел порядки максимальных торов во всех конечных классических односвязных группах Шевалле. Изучение порядков связанных централизаторов в исключительных группах Шевалле закончил Деризиотис в своих работах [3], [4]. В нескольких последовательных статьях [5]–[8] Барри и Уонг получили порядки и строение больших унитарных абелевых подгрупп в конечных классических группах Шевалле.

В настоящей работе для любой конечной группы G лиева типа (кроме ${}^2F_4(q)$) найден порядок $a(G)$ большой абелевой подгруппы или дана его нижняя и верхняя оценка (в группах $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ и ${}^2E_6(q^2)$). В тех группах, в которых число $a(G)$ найдено точно, большая абелева подгруппа совпадает с большой унитарной или большой полупростой абелевой подгруппой. В группах $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$ и ${}^2E_6(q^2)$ доказано, что если абелева подгруппа содержит нецентральный полупростой элемент,

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Интеграция", проект № 274, Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00550, и СО РАН, грант для коллективов молодых ученых, постановление Президиума № 83 от 10.03.2000.

то ее порядок меньше порядка некоторой абелевой унитарной группы. Поэтому в этих группах большие абелевы подгруппы унитарны, и для того, чтобы найти значение чисел $a(G)$ в этих группах, необходимо найти порядки больших унитарных абелевых подгрупп.

Обозначения и определения, используемые в данной работе, можно найти в [9]–[11]. Если φ – гомоморфизм группы G , g – элемент группы G , то G^φ , g^φ – образы группы G и элемента g относительно гомоморфизма φ соответственно.

Обозначения, связанные с конечными группами лиева типа, выбраны так же, как в [10]. Под группой Шевалле, если не оговорено противное, понимается как универсальная группа Шевалле, так и любая ее факторгруппа по подгруппе из центра. При изучении групп Шевалле $GF(q)$ будет обозначать поле порядка q , p – его характеристику, $GF(q)^*$ – мультипликативную группу поля $GF(q)$, $K = \overline{GF(q)}$ – алгебраическое замыкание поля $GF(q)$. Группа Шевалле, соответствующая корневой системе Φ над полем $GF(q)$, обозначается через $\Phi(q)$. Группа Вейля, соответствующая корневой системе Φ , обозначается $W(\Phi)$. Скрученные группы будут обозначаться символами ${}^2A_n(q^2)$, ${}^2D_n(q^2)$, ${}^2E_n(q^2)$, ${}^3D_4(q^3)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^2F_4(q)$; Φ^+ (Φ^-) обозначает множество положительных (отрицательных) корней корневой системы Φ , $\Delta = \{r_1, \dots, r_k\}$ – множество фундаментальных корней, причем нумерация выбирается, как в [10, формула (3.4)]. Элемент группы Шевалле $\Phi(q)$ называется *полупростым*, если его порядок взаимно прост с p , и *унитарным*, если его порядок является степенью p . Аналогично, *полупростая* и *унитарная подгруппы* группы $\Phi(q)$ определяются как подгруппы, порядок которых взаимно прост с p (p' -подгруппы) и является степенью p соответственно. *Расширенной диаграммой Дынкина* группы Шевалле называется диаграмма, которая получается после добавления к исходной диаграмме Дынкина корня $-r_0$ (здесь r_0 – корень наибольшего веса) и присоединения его к остальным вершинам по обычному правилу. Расширенные диаграммы Дынкина для всех типов корневых систем приведены в [3].

Для конечной группы G через $a(G)$ обозначен максимум порядков ее абелевых подгрупп. Если G – конечная группа лиева типа, то через $a_u(G)$ и $a_s(G)$ обозначены максимальные порядки унитарных абелевых и полупростых абелевых подгрупп соответственно. Множество абелевых подгрупп из G , порядок которых совпадает с $a(G)$, $a_u(G)$ или $a_s(G)$, будут обозначаться через $A(G)$, $A_u(G)$ или $A_s(G)$ соответственно. Элементы множеств $A(G)$, $A_u(G)$ и $A_s(G)$ будем называть большими абелевыми, большими унитарными абелевыми и большими полупростыми абелевыми подгруппами соответственно.

Автор выражает искреннюю благодарность Мазурову Виктору Даниловичу за полезные консультации и ценные замечания. Автор также благодарен Васильеву Андрею Викторовичу за чтение и обсуждение рукописи, которое позволило исправить многие ошибки и неточности первоначального варианта. Автор благодарит рецензента за полезные замечания.

2. Вспомогательные результаты о линейных алгебраических группах. В

этом разделе будут приведены необходимые сведения о строении линейных алгебраических групп, а также будут получены вспомогательные утверждения, которые мы используем для получения оценок порядков абелевых подгрупп. Основные определения и результаты о строении и свойствах линейных алгебраических групп можно найти в [11]. Если G – линейная алгебраическая группа, то через G^0 обозначена компонента единицы

группы G . Линейная алгебраическая группа называется *полупростой*, если ее радикал тривиален, и линейная алгебраическая группа называется *редуктивной*, если ее унипотентный радикал тривиален; в обоих случаях не предполагается, что линейная алгебраическая группа связна. Хорошо известно (см., например, [11]), что связная полупростая линейная алгебраическая группа – это центральное произведение связных простых линейных алгебраических групп, а связная редуктивная линейная алгебраическая группа G – это центральное произведение тора S и полупростой группы M , причем $S = Z(G)^0$, $M = [R, R]$ и группа $S \cap M$ конечна.

Пусть G – связная редуктивная линейная алгебраическая группа, T – ее максимальный тор (под *тором* всегда понимается связная диагонализируемая группа), B – ее подгруппа Бореля, содержащая тор T . В G существует такая борелевская подгруппа B^- , что $B \cap B^- = T$. Пусть Φ – корневая система группы G относительно тора T , $\varphi: N_G(T) \rightarrow N_G(T)/T = W$ – канонический гомоморфизм на группу Вейля W группы G , X_α ($\alpha \in \Phi$) – корневые подгруппы относительно тора T (одномерные T -инвариантные унипотентные подгруппы групп B и B^-). Действие группы Вейля W на корневой системе Φ определяется следующим образом [11, п. 24.1]. Пусть для каждого элемента w из W зафиксирован некоторый его представитель n_w из группы G . Тогда группа Вейля действует на корнях корневой системы Φ по правилу $\alpha^w(t) = \alpha(t^{n_w})$ для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in T$. Хорошо известно, что $B = TU$, где $U = \langle X_\alpha : \alpha \in \Phi^+ \rangle$ – максимальная унипотентная подгруппа группы G , а $B^- = TU^-$, где через U^- обозначена группа $\langle X_\alpha : \alpha \in \Phi^- \rangle$. Если на Φ^+ задать порядок, то любой элемент из U единственным образом записывается в виде произведения элементов из корневых подгрупп U_α (взятых в заданном порядке).

Любой элемент группы G единственным образом представим в виде un_wtv , где $v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_w U^- n_w^{-1}$ (см., например, [11, теорема 28.3]). Такое представление элементов группы G называется их *разложением Бруа*.

Пусть G – связная простая алгебраическая группа, π – ее некоторое точное рациональное представление, Γ_π – решетка, порожденная весами представления π . Через Γ_{ad} обозначается решетка, порожденная корнями системы Φ , через Γ_{sc} – решетка, порожденная фундаментальными весами. Решетки Γ_{sc} , Γ_π и Γ_{ad} не зависят от конкретного представления группы G , и справедливы следующие включения $\Gamma_{ad} \leq \Gamma_\pi \leq \Gamma_{sc}$.

Известно, что для корневой системы данного типа существует несколько различных простых алгебраических групп, которые называются *изогениями*. Они различаются строением группы Γ_π и порядком конечного центра. В том случае, когда решетка Γ_π совпадает с Γ_{sc} , говорят, что группа G односвязна, и она обозначается через G_{sc} . Если решетка Γ_π совпадает с Γ_{ad} , то говорят, что группа G имеет присоединенный тип, и она обозначается через G_{ad} . Любая линейная алгебраическая группа с корневой системой Φ получается как факторгруппа группы G_{sc} по подгруппе из ее центра. Центр группы G_{ad} тривиален, и она проста как абстрактная группа.

Пусть c_i – коэффициент, с которым фундаментальный корень r_i входит в разложение корня r_0 . Простые числа, делящие коэффициенты c_i , называются *плохими* простыми числами.

Далее напомним фундаментальный результат о строении алгебраических групп.

ЛЕММА 2.1 [11, пп. 21.3, 22.2]. *Пусть G – связная линейная алгебраическая группа. Тогда все подгруппы Бореля группы G сопряжены. Более того, максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы в G – это в точнос-*

ти максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы групп Бореля. Кроме того, все максимальные торы и максимальные связные унипотентные подгруппы сопряжены и любой полупростой (соответственно унипотентный) элемент лежит в некотором максимальном торе (соответственно максимальной связной унипотентной подгруппе).

Теперь напомним, каким образом связаны конечные группы лиева типа и простые линейные алгебраические группы. Пусть G – связная простая линейная алгебраическая группа, определенная над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, σ – эндоморфизм группы G такой, что множество его неподвижных точек G_σ конечно. Эндоморфизм σ с таким условием в дальнейшем будет называться *автоморфизмом Фробениуса*, хотя он может и не совпадать с классическим автоморфизмом Фробениуса. Отметим, что σ является автоморфизмом, если группа G рассматривается как абстрактная группа, и σ является эндоморфизмом, если G рассматривается как алгебраическая группа. В общем случае σ имеет вид $q\sigma_0$, где $q = p^\alpha$ – возведение в q -ую степень, а σ_0 – графовый автоморфизм порядка 1, 2 или 3. Тогда $Op'(G_\sigma)$ – группа лиева типа над конечным полем характеристики p , и любую группу лиева типа (нормальную или скрученную) можно получить таким образом. Далее σ всегда будет обозначать некоторый автоморфизм Фробениуса.

Пусть T – максимальный σ -инвариантный тор связной простой алгебраической группы G . В дальнейшем *максимальным тором* группы G_σ (соответственно $Op'(G_\sigma)$) будем называть группу вида T_σ (соответственно $T_\sigma \cap Op'(G_\sigma)$). Отметим (см, например, [10, гл. 7]), что для любого максимального σ -инвариантного тора T справедливо равенство $G_\sigma = T_\sigma Op'(G_\sigma)$. (В [10] G_σ обозначена через $\hat{G}$.)

В дальнейшем нам потребуется следующая

ЛЕММА 2.2. Пусть $R = S * M$ – σ -инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга связной простой группы G , где S – центральный тор, а M – полупростая подгруппа в G . Пусть простые компоненты группы M_σ – это $G_1, \dots, G_k$. Пусть $z_{i,j} = |Z(G_i) \cap Z(G_j)|$, $z_i = |Z(G_i) \cap S_\sigma|$. Тогда

$$Op'(R_\sigma) = G_1 * \dots * G_k * S_\sigma \quad \text{и} \quad |R_\sigma : Op'(R_\sigma)| \leq \prod_{i \neq j} z_{i,j} \prod_i z_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $Op'(R_\sigma) = G_1 * \dots * G_k * (S_\sigma)$ хорошо известно, поэтому докажем лишь второе неравенство. В работе [3, предложение 2.4.2] доказано, что $|R_\sigma| = |M_\sigma| \cdot |S_\sigma| = |G_1| \cdot \dots \cdot |G_k| \cdot |S_\sigma|$. Поскольку $G_i \cap G_j = Z(G_i) \cap Z(G_j)$ при $i \neq j$, $|G_1 * \dots * G_k * (S_\sigma)| \leq |R_\sigma| / (\prod_{i \neq j} z_{i,j} \prod_i z_i)$, откуда немедленно следует требуемое неравенство.

Далее мы докажем вспомогательный результат, который будет использоваться при изучении абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле.

ЛЕММА 2.3. Пусть G – связная редуктивная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики p , R – ее редуктивная (не обязательно связная) подгруппа максимального ранга, причем $(|R : R^0|, p) = 1$, $s \in R^0$ – некоторый полупростой элемент; T – произвольный максимальный тор

в R^0 , содержащий элемент s . Тогда группа $C_R(s)$ редуuktивна (хотя не обязательно связна). Она порождается тором T вместе с теми корневыми подгруппами U_α , для которых $\alpha(s) = 1$, и теми представителями элементов группы Вейля $n_w \in N_R(T)$, которые коммутируют с s . Компонента единицы $C_R(s)^0$ порождается тором T и теми U_α , для которых $\alpha(s) = 1$. В частности, группа $C_R(s)/C_R(s)^0$ изоморфна некоторой секции группы Вейля для G . Более того, все унитарные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_R(s)^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем подгруппу Бореля B группы R^0 , содержащую T . Ясно, что все указанные в лемме порождающие лежат в $C_R(s)$. Докажем, что $C_R(x)$ порождается указанными в лемме элементами. Покажем сначала, что в группе R (которая не обязательно связна) имеет место разложение Брюа. Пусть x – произвольный элемент из R . Тогда B^x – некоторая подгруппа Бореля группы R^0 . В силу леммы 2.1 существует такой элемент $s \in R^0$, что $B^x = B^s$. Тогда элемент xs^{-1} нормализует подгруппу B . Тор $T^{xs^{-1}}$ является максимальным тором группы B . Поскольку все максимальные торы в B сопряжены (лемма 2.1), существует такой элемент g из B , что $T^{xs^{-1}} = T^g$. Поэтому можно считать, что xs^{-1} нормализует тор T . Тогда $xs^{-1} = n_w t$ для некоторого $n_w \in N_R(T)$, $t \in T$. Поскольку t нормализует B и xs^{-1} нормализует B , элемент n_w также нормализует B ; значит, он нормализует U – максимальную (связную) унитарную подгруппу группы B . Поскольку s лежит в R^0 , для него существует разложение Брюа, т.е. он представим в виде $u_1 n_{w_1} t_1 v_1$, где $u_1 \in U \cap n_{w_1} U^{-1} n_{w_1}^{-1}$, $n_{w_1} \in N_R^0(T)$, $t_1 \in T$ и $v_1 \in U$. Поэтому элемент x представим в виде $x = n_w t u_1 n_{w_1} t_1 v_1$. Поскольку элементы t и n_w нормализуют U , мы получаем представление элемента x в виде $x = u_2 n_{w_2} t_2 v_2$, причем $u_2 \in U \cap n_{w_2} U^{-1} n_{w_2}^{-1}$, $n_{w_2} \in N_R(T)$, $t_2 \in T$ и $v_2 \in U$. Поскольку это разложение Брюа совпадает с разложением Брюа элемента x в группе G , такое разложение единственно.

Если $x \in C_R(s)$, то с помощью разложения Брюа можно записать $x = u n_w t v$, где $v \in U$, $t \in T$, $u \in U \cap n_w U^{-1} n_w^{-1}$. Поскольку s нормализует U , $N(T)$, U^- и коммутирует с x , единственность разложения влечет, что каждый из u , n_w , v коммутирует с s . Более того, поскольку s нормализует каждую корневую подгруппу U_α , единственность разложения группы U в произведение корневых подгрупп U_α ($\alpha > 0$) влечет, что $\alpha(s) = 1$, как только u или v содержит нетривиальный множитель из U_α . Таким образом, x лежит в группе, порожденной тором T и теми U_α , n_w , которые перестановочны с s .

Поскольку T и все U_α с $\alpha(s) = 1$ связны, то подгруппа H , порожденная ими, замкнута, связна и нормальна в $C_R(s)$. Так как группа Вейля конечна, $|G_R(s) : H| < \infty$; значит, $H = C_R(s)^0$.

Так как корни группы $C_R(s)$ относительно тора T возникают парами (т.е. если $\alpha(s) = 1$, то и $-\alpha(s) = 1$), группа $C_R(s)$ редуuktивна. Действительно, если $C_R(s)$ имеет нетривиальный унитарный радикал V , то он нормализуется тором T , значит, содержит некоторую корневую подгруппу U_α . Радикал V нормализуется корневой группой $U_{-\alpha}$, что дает неунитарный элемент в V ; получили противоречие.

Поскольку $(|R : R^0|, p) = 1$, все унитарные элементы из группы R лежат в R^0 , поэтому все унитарные элементы из $C_R(s)$ лежат в $C_{R^0}(s)$. Тот факт, что в связной редуuktивной группе R^0 любой унитарный элемент из $C_{R^0}(s)$ лежит в $C_{R^0}(s)^0$, хорошо известен (см., например, [12, п. 2.2]).

Пусть x – полупростой элемент в связной редуuktивной линейной алгебраической группе G . Тогда в силу леммы 2.3 $C_G(x)^0$ – связная редуuktивная подгруппа максималь-

ного ранга и $[C_G(x)^0, C_G(x)^0]$ – полупростая группа, корневая система которой является аддитивно замкнутой подсистемой корневой системы группы G . Такие подгруппы в дальнейшем будут называться *подсистемными* подгруппами. Поскольку в данной работе изучаются конечные группы, особый интерес представляют элементы простого порядка $r \neq p$. Оказывается, что имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 2.4 [13, п. 14.1]. *Пусть G – простая связная линейная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ и элемент $x \in G$ имеет простой порядок $r \neq p$. Пусть*

$$C' = [C_G(x)^0, C_G(x)^0]$$

– подсистемная подгруппа. Если Δ – диаграмма Дынкина корневой системы группы C' , то справедливо одно из следующих утверждений:

- 1) *диаграмма Δ получается удалением вершин из диаграммы Дынкина группы G ;*
- 2) *диаграмма Δ получается из расширенной диаграммы Дынкина группы G удалением одной вершины r_i , где $r = c_i$ – коэффициент при корне r_i в разложении корня r_0 .*

В частности, если r не является простым числом для группы G , то $\dim(Z(C_G(x)^0)) \geq 1$.

В конце данного раздела напомним алгоритм нахождения всех подсистем системы корней Φ , принадлежащий Борелю и ди Зибенталю [14]. Рассматривается расширенная диаграмма Дынкина системы Φ . Диаграммы всех возможных подсистем системы Φ получаются вычеркиванием некоторого количества вершин из расширенной диаграммы Дынкина для Φ .

3. Общее строение абелевых подгрупп в связных редуктивных линейных алгебраических группах, конечных группах Шевалле и группах Вейля.

ЛЕММА 3.1. *Пусть G – связная редуктивная линейная алгебраическая группа, A – ее замкнутая абелева подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) *группа A представима в виде $A_s \times A_u$ – прямого произведения своей полупростой и унипотентной частей соответственно (см. [11, п. 15.5]);*
- 2) *существует такая редуктивная подгруппа R максимального ранга группы G , что*

$$A \leq R, \quad A_u \leq R^0 \quad \text{и} \quad A_s \cap R^0 = A_{s0} \leq Z(R^0);$$

- 3) *если $W_R = N_R(T)/T$, $W_{R0} = N_{R0}(T)/T$ для некоторого максимального тора T группы R , то группа A_s/A_{s0} изоморфно вкладывается в группу W_R/W_{R0} .*

Если A – конечная группа, состоящая из элементов, неподвижных относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ группы G , то R σ -инвариантна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s – некоторый полупростой элемент из A_s . Положим $R = C_G(s)$. Ясно, что $A \leq R$. В силу леммы 2.3 $A_u \leq R^0$ и R^0 – связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы G . Подгруппа R^0 нормальна в R , следовательно, любой элемент из R нормализует $Z(R^0)$ и, значит, нормализует $Z(R^0)^0$. В силу леммы 2.3 $(|R : R^0|, p) = 1$. Если существует такой полупростой элемент $s_1 \in A_s$, что $s_1 \in R^0$, но $s_1 \notin Z(R^0)$, то рассмотрим $C_R(s_1)$. Ясно, что $A \leq C_R(s_1)$. В силу леммы 2.3 $C_R(s_1)^0$ – связная редуктивная подгруппа максимального ранга группы G . Как и раньше, $A_u \leq C_R(s_1)^0$ и любой элемент из $C_R(s_1)$ нормализует $Z(C_R(s_1)^0)^0$. Заменяя группу R на $C_R(s_1)$, получим редуктивную подгруппу максимального ранга группы G , содержащую группу A , меньшей размерности. Размерность действительно уменьшается, поскольку уменьшается размерность компоненты единицы. Указанный выше процесс конечен, поскольку на каждом шаге размерность уменьшается, а размерность группы G конечна. Отметим, что если A – абелева подгруппа некоторой конечной группы лиева типа, то A состоит из неподвижных точек относительно некоторого автоморфизма Фробениуса σ и поэтому группы, получаемые на каждом шаге указанного выше процесса, σ -инвариантны. Следовательно, если $A \leq G_\sigma$, то группа R является σ -инвариантной.

Далее,

$$A_s/A_{s0} \cong A_s R^0/R^0 \leq R/R^0.$$

В силу леммы 2.3 любой элемент из R можно представить в виде $n_w x$, где $x \in R^0$; следовательно, группа R/R^0 изоморфна группе

$$N_R(T)/N_{R^0}(T) \cong W_R/W_{R0}$$

для любого максимального тора T из R^0 .

Отметим в качестве простого следствия леммы 3.1, что если $\Phi_R = \Phi$, то $A_s = A_{s0} \leq Z(G)$. Действительно, редуктивная группа R , о которой говорится в лемме, в этом случае совпадает с G (и совпадает с R^0), но $A_s \cap R^0 = A_s \leq Z(R^0)$.

В лемме 3.1 возникают секции группы Вейля, поэтому, необходимо найти порядки больших абелевых подгрупп в группах Вейля для всех простых алгебраических групп. Кроме того, в дальнейшем часто будет возникать ситуация, когда некоторая полупростая абелева подгруппа является множеством неподвижных точек относительно автоморфизма Фробениуса некоторого тора T размерности n . Для оценки порядков таких подгрупп нам потребуется следующая

ЛЕММА 3.2. Пусть S – σ -инвариантный тор связной простой алгебраической группы G , и его размерность равна n , где $\sigma = q\sigma_0$ – некоторый автоморфизм Фробениуса. Пусть S^g – некоторый сопряженный с ним σ -инвариантный тор группы G . Пусть $X(S)$ – группа рациональных характеров тора S . Тогда существует такой элемент w из группы Вейля W группы G , что $X(S)^w \subseteq X(S)$ и группа $(S^g)_\sigma$ изоморфна группе $X(S)/(\sigma w - 1)X(S)$. В частности, поскольку элемент $\sigma_0 w$ имеет конечный порядок, $|(S^g)_\sigma| \leq (q + 1)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку тор S σ -инвариантен, его централизатор C в группе G – связная σ -инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга. Тогда группа C^g также σ -инвариантна. Группы C и C^g содержат некоторые σ -инвариантные максимальные торы T и T_1 [15, п. 10.10]; без ограничения общности можно считать, что они также сопряжены с помощью элемента g . Пусть W_1 – группа Вейля группы C . В [1,

следствие из предложения 2] утверждается, что тогда элемент $g^\sigma g^{-1}$ лежит в $N_G(T)$, а его образ относительно канонического гомоморфизма группы $N_G(T)$ на группу Вейля лежит в $N_W(W_1)$. Предложение 8 из работы [1] утверждает, что тогда $(T^g)_\sigma \cong X(T)/(\sigma w - 1)X(T)$. Поскольку $S \leq Z(C)$, S лежит в T . В силу взаимно однозначного соответствия между замкнутыми подгруппами тора T и подгруппами его группы характеров $X(T)$ (см. [16, гл. III]) имеем $(S^g)_\sigma \cong X(S)/(\sigma w - 1)X(S)$.

В таблице 1 ниже мы приведем порядки больших абелевых подгрупп в группах Вейля классических простых групп. Группа $W(A_n)$ изоморфна группе S_{n+1} , порядки и строение больших абелевых подгрупп в этой группе найдены в работе [17], и мы приведем их в таблице 1 без доказательства.

Группы $W(B_n)$ и $W(C_n)$ изоморфны, поэтому мы рассмотрим лишь группу $W(B_n)$. Если Φ – корневая система типа B_n и $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства, в котором лежит система B_n , то Φ можно записать в виде

$$\{\pm e_i \pm e_j, i \neq j, \pm e_i; i, j = 1, \dots, n\}.$$

Группа Вейля $W(B_n)$ действует точно на множестве $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ из $2n$ векторов. Пусть A – некоторая абелева подгруппа группы $W(B_n)$; тогда $I_1, \dots, I_k$ – все A -орбиты из $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. Рассмотрим группу G преобразований евклидова пространства, натянутого на векторы $e_1, \dots, e_n$, относительно которой множество $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ инвариантно. Ясно, что $W(B_n) \leq G$. Более того, эти группы изоморфны, но нам не требуется изоморфность этих групп. Найдем $a(G)$ и докажем, что $a(G) = a(W(B_n))$. Из доказательства теоремы 1.1 из [17] следует, что

$$|A| \leq |I_1| \times \dots \times |I_k|.$$

Пусть $f(2n)$ – порядок большой абелевой подгруппы в группе G .

Предположим, что среди множеств $I_1, \dots, I_k$ имеются множества нечетного порядка. Без ограничения общности можно считать, что таким множеством является множество I_1 и базисный вектор e_1 лежит в I_1 . Тогда вектор $-e_1$ не лежит в множестве I_1 . Действительно, предположим, что вектор $-e_1$ лежит в I_1 . Тогда в группе A существует элемент σ , переводящий e_1 в $-e_1$. Но тогда порядок элемента σ четен, и можно считать, что σ – 2-элемент. Кроме того, σ не лежит в стабилизаторе орбиты I_1 в $A = \text{St}_A(I_1)$. Значит, его образ относительно естественного гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow A/\text{St}_A(I_1)$ также имеет четный порядок. Но $|A/\text{St}_A(I_1)| = |I_1|$ нечетен; противоречие. Таким образом, элемент $-e_1$ лежит в некотором другом множестве, без ограничения общности можно считать, что это множество I_2 . Так как G является группой линейных преобразований евклидова пространства, для любого $\sigma \in G$ справедливо $\sigma(-e_1) = -\sigma(e_1)$. Поскольку группа A действует транзитивно на множествах $I_1, \dots, I_k$, отсюда следует, что если $\sigma \in \text{St}_A(I_1)$, то $\sigma \in \text{St}_A(I_1) \cap \text{St}_A(I_2)$ и для любого $v \in I_1$ вектор $-v$ лежит в I_2 . Пусть $m = |I_1| = |I_2|$. Тогда в силу предыдущих рассуждений

$$|A| \leq m \cdot f(2n - 2m).$$

Рассмотрим группу A_1 , которая на орбитах $I_3, \dots, I_k$ действует так же, как группа A , а множество $I_1 \cup I_2$ относительно действия группы A_1 распадается на орбиты из двух элементов $-\pm v$. По построению $A_1 \leq G$ и группа A_1 абелева. Кроме того,

$$|A| = m \cdot |\text{St}_A(I_1)| < 2^m \cdot |\text{St}_A(I_1)| = |A_1|.$$

Поэтому относительно действия группы $A \in A(G)$ множество $\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$ распадается на орбиты четного порядка. С помощью индукции по n покажем, что все орбиты имеют порядок 2 или 4 и, следовательно, $f(2n) \leq 2^n$. Действительно, если порядок некоторой орбиты группы A больше либо равен 6, то, как и в нечетном случае, можно построить абелеву подгруппу порядка $2^3 \cdot 2^{n-3}$, откуда $|A| \leq 6 \cdot 2^{n-3} < 2^3 \cdot 2^{n-3}$. Поэтому

$$f(2n) \leq 2^n.$$

С другой стороны, существует абелева подгруппа группы $W(B_n)$ и, значит, группы G , переводящая e_i в $\pm e_i$ для всех i . Ее порядок равен 2^n , значит, $a(W(B_n)) = 2^n$.

Заметим, что $W(D_n)$ изоморфно вкладывается в группу $W(B_n)$ как подгруппа индекса 2, поэтому

$$a(W(D_n)) \leq a(W(B_n)).$$

При четном n эта оценка достигается, а при нечетном – нет. Для дальнейших рассуждений нам достаточно существования этой оценки сверху, хотя нетрудно найти и точную оценку.

ТАБЛИЦА 1

Тип группы G	Порядок $a(W)$
A_n	3^k , если $n = 3k - 1$
	$4 \cdot 3^{k-1}$, если $n = 3k$
	$2 \cdot 3^k$, если $n = 3k + 1$
B_n, C_n, D_n	$\leq 2^n$

Далее мы приведем известные оценки порядков больших унитарных абелевых подгрупп.

ЛЕММА 3.3 [5]–[8]. Пусть $q = p^\alpha$. Тогда

- 1) [5] $a_u(A_n(q)) = q^{[(n+1)^2/4]}$;
- 2) [5], [6], [8] $a_u(C_n(q)) = q^{n(n+1)/2}$;
- 3) [5], [7] $a_u(B_n(q)) = q^{n(n-1)/2+1}$ при $n \geq 4$, $p \neq 2$;
- 4) [5], [7] $a_u(B_3(q)) = q^5$ при $p \neq 2$;
- 5) [5], [7] $a_u(D_n(q)) = q^{n(n-1)/2}$ при $n \geq 4$;
- 6) [7] $a_u({}^2D_n(q^2)) = q^{(n-2)(n-1)/2+2}$ при $n \geq 5$;
- 7) [7] $a_u({}^2D_4(q^2)) = q^6$;
- 8) [8] $a_u({}^2A_n(q^2)) = q^{[(n+1)^2/4]}$.

В указанных работах изучались абелевы унитарные подгруппы данных групп. Кроме того, в этих же работах приводится строение больших унитарных абелевых подгрупп.

ЛЕММА 3.4 [17, лемма 4.5]. Пусть q – степень нечетного простого числа p . Тогда справедливы следующие оценки:

- 1) $q^9 \leq a_u(F_4(q)) \leq q^{14}$;
- 2) $q^{16} \leq a_u(E_6(q)) \leq q^{20}$;
- 3) $q^{27} \leq a_u(E_7(q)) \leq q^{32}$;
- 4) $q^{36} \leq a_u(E_8(q)) \leq q^{61}$;
- 5) $q^{12} \leq a_u({}^2E_6(q^2)) \leq q^{20}$.

Доказательство леммы 3.4 в [17] для групп $E_6(q)$, $E_7(q)$ и $E_8(q)$ не использует нечетности q , поэтому оценки, указанные для этих групп в лемме, справедливы в любой характеристике. Оценки для остальных исключительных групп (кроме ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^2F_4(q)$) приведены в следующей лемме.

ЛЕММА 3.5. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $a_u({}^3D_4(q^3)) = q^5$;
- 2) $q^{12} \leq a_u({}^2E_6(q^2)) \leq q^{20}$;
- 3) $a_u(G_2(q)) = q^3$, если q не делится на 3;
- 4) $a_u(G_2(q)) = q^4$, если q делится на 3;
- 5) $q^{11} \leq a_u(F_4(q)) \leq q^{17}$, если q четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см., например, [18]), что в группе $G_2(q)$ существует унитарная абелева подгруппа порядка q^3 , если q не делится на 3, и абелева подгруппа порядка q^4 , если q делится на 3. В группе ${}^3D_4(q^3)$ существует абелева унитарная подгруппа порядка q^5 , в группе ${}^2E_6(q^2)$ существует абелева подгруппа порядка q^{12} , в группе $F_4(q)$ для четного q существует абелева подгруппа порядка q^{12} , поэтому мы докажем во всех группах лишь оценку сверху.

Рассмотрим сначала группу $G_2(q)$. Рассмотрим параболическую подгруппу P , фактор Леви которой порождается коротким фундаментальным корнем r_1 . Тогда $P = HA_1(q)U_{r_2}$, где $U_{r_2} = \langle X_r : r \geq r_2 \rangle$. Здесь под порядком понимается частичный порядок, заданный правилом

$$r = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 \geq 0 \iff \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0.$$

Заметим, что $[U_{r_2}, U_{r_2}] = X_{r_0}$, поэтому группа $U_{r_2}/X_{r_0} = \overline{U_{r_2}}$ абелева. Ее можно снабдить антисимметричной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по правилу

$$[u, v] = x_{r_0}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle) \quad \text{для } u, v \in U_{r_2}.$$

В [10, с. 211] приведена таблица констант, участвующих в коммутаторных соотношениях Шевалле в группе $G_2(q)$, из которой следует, что данная форма невырождена, если q не делится на 3. Размерность пространства $\overline{U_{r_2}}$ равна 4, векторы

$$\overline{x_{r_2}(1)} = x_1, \quad \overline{x_{r_1+r_2}(1)} = x_2, \quad \overline{x_{2r_1+r_2}(1)} = x_3, \quad \overline{x_{3r_1+r_2}(1)} = x_4$$

образуют базу этого пространства. Таким образом, вся унитарная подгруппа U группы $G_2(q)$ представима в виде $X_{r_1}U_{r_2}$. Пусть A – большая абелева подгруппа группы U . Ясно, что $X_{r_0} = Z(U) \leq A$. Предположим, что образ группы A относительно естественного гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow A/(A \cap U_{r_2})$ не равен единице. Пусть x – некоторый элемент из A , образ которого x^φ неединичен. Тогда можно определить действие элемента x^φ на пространстве $\overline{U_{r_2}}$ сопряжением; кроме того, существует единственный элемент $x_{r_1}(t)$ такой, что $x^\varphi = x_{r_1}^\varphi(t)$. Поскольку группа A абелева, пространство $A \cap U_{r_2}/X_{r_0}$ содержится в пространстве собственных векторов преобразования x^φ . Для любого нетривиального элемента x^φ его матрица в базе x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид (структурные константы выбираются так же, как в [10])

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $p > 3$, то пространство собственных векторов элемента x^φ имеет размерность 1. Таким образом,

$$|A| = |A/(A \cap U_{r_2})| \cdot |(A \cap U_{r_2})/X_{r_0}| \cdot |X_{r_0}| \leq q^3.$$

Если $A^\varphi = \{1\}$, то $A \leq U_{r_2}$. В этом случае группа A/X_{r_0} – это изотропное подпространство пространства $\overline{U_{r_2}}$, следовательно, его размерность не превосходит 2. Поэтому

$$|A| = |A/X_{r_0}| \cdot |X_{r_0}| \leq q^3.$$

Если q делится на 3, то тогда антисимметричная форма, заданная на пространстве $\overline{U_{r_2}}$, вырождена. Пусть $L(x_2, x_3)$ – линейная оболочка векторов x_2 и x_3 . Факторпространство $\overline{U_{r_2}}/L(x_2, x_3)$ обладает невырожденной антисимметричной формой, индуцированной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть A – большая абелева подгруппа группы U . Если в A существует элемент x такой, что $x^\varphi \neq 1$, то группа $(A \cap U_{r_2})/X_{r_0}$ содержится в пространстве неподвижных точек преобразования x^φ . Из матрицы преобразования x^φ , полученной ранее, следует, что пространство неподвижных относительно x^φ векторов имеет размерность не более 2. Таким образом,

$$|A| = |A/(A \cap U_{r_2})| \cdot |(A \cap U_{r_2})/X_{r_0}| \cdot |X_{r_0}| \leq q^4.$$

Если $A \leq U_{r_2}$, то образ группы A относительно гомоморфизма

$$A/X_{r_0} \rightarrow (A/X_{r_0})/(A/X_{r_0} \cap L(x_2, x_3))$$

– изотропное пространство, следовательно, его размерность равна 1. Поэтому

$$|A| = |(A/X_{r_0})/(A/X_{r_0} \cap L(x_2, x_3))| \cdot |L(x_2, x_3)| \cdot |X_{r_0}| \leq q^4.$$

Пусть, наконец, $p = 2$. В этом случае размерность подпространства собственных векторов относительно действия любого нетривиального элемента x из $A \setminus (A \cap U_{r_2})$ равняется 2. Антисимметричная билинейная форма, определенная ранее, на этом подпространстве невырождена, следовательно, образ абелевой группы $A \cap U_{r_2}$ относительно естественного гомоморфизма

$$\varphi: A \cap U_{r_2} \rightarrow (A \cap U_{r_2})/X_{r_0}$$

– изотропное пространство, размерность которого равна 1. Таким образом,

$$|A| = |A/(A \cap U_{r_2})| \cdot |(A \cap U_{r_2})/X_{r_0}| \cdot |X_{r_0}| \leq q^3.$$

Группа $G_2(q)$ рассмотрена.

Рассмотрим группу ${}^3D_4(q^3)$. Рассмотрим параболическую подгруппу P группы $D_4(q^3)$, диаграмма Дынкина фактора Леви которой получается после удаления вершины r_2 из диаграммы Дынкина группы $D_4(q^3)$. Тогда подгруппа P τ -инвариантна (здесь τ – скручивающий автоморфизм порядка 3). Ее подгруппа неподвижных точек имеет вид LU_1 , где L – фактор Леви, изоморфный $A_1(q^3)H$. Группа U_1 обладает свойством $[U_1, U_1] = (X_{r_0})_\sigma = X$. Поэтому группа $U_1/X = \overline{U_1}$ абелева. Ее можно записать в виде

$\overline{U_2} \oplus \overline{U_3}$, где $\overline{U_2}$ – векторное пространство размерности 2 над полем $GF(q)$, а $\overline{U_3}$ – векторное пространство размерности 2 над полем $GF(q^3)$. Как и в случае группы $G_2(q)$, каждое из этих пространств можно снабдить невырожденной антисимметричной билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по правилу

$$[u, v] = x_{r_0}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle).$$

Эта форма будет невырожденной, поскольку в корневой системе типа D_4 все корни имеют одинаковую длину и, следовательно, все константы, участвующие в коммутаторных соотношениях Шевалле, по модулю равны 1. Как и в случае группы $G_2(q)$, определяется действие группы L на $\overline{U_1}$. Тогда для любого нетривиального унитарного элемента из L его подгруппа неподвижных точек в $\overline{U_1}$ имеет порядок не более, чем q . Таким образом, неравенства, аналогичные неравенствам, записанным в случае группы $G_2(q)$, доказывают утверждение леммы для группы ${}^3D_4(q^3)$.

Рассмотрим группу ${}^2E_6(q^2)$. Рассмотрим в группе $E_6(q^2)$ параболическую подгруппу, фактор Леви которой изоморфен группе $A_5(q^2)H$. Тогда эта параболическая подгруппа τ -инвариантна, где τ – скручивающий автоморфизм порядка 2. Подгруппу ее неподвижных точек можно записать в виде LU_1 , где L – фактор Леви, изоморфный группе ${}^2A_5(q^2)H$, а U_1 – унитарный радикал, обладающий свойством

$$[U_1, U_1] = (X_{r_0})_\tau = X = Z(U_1).$$

Вновь группа $U_1/X = \overline{U_1}$ представима в виде $\overline{U_2} \oplus \overline{U_3}$, где $\overline{U_2}$ – векторное пространство размерности 12 над полем $GF(q)$, а $\overline{U_3}$ – векторное пространство размерности 4 над полем $GF(q^2)$. Каждое из этих пространств можно снабдить невырожденной билинейной антисимметричной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, определенной правилом

$$[u, v] = x_{r_0}(\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle).$$

Тогда любая унитарная абелева группа A представима в виде A_1A_2 , где $A_2 = A \cap U_1$, $A_1 \leq {}^2A_5(q^2)$, причем образ группы A_2 относительно естественного гомоморфизма $A_2 \rightarrow A_2/X$ – прямая сумма изотропных подпространств. Таким образом,

$$|A| \leq |A_1| \cdot |A_2| \leq q^9 \cdot q^6 \cdot q^4 \cdot q \leq q^{20}.$$

Рассмотрим, наконец, группу $F_4(q)$, где q четно. В ней существует параболическая подгруппа $P = LU_{r_1}$, диаграмма Дынкина фактора Леви которой получается удалением длинного корня r_1 . Тогда фактор Леви L этой группы изоморфен $C_3(q)H$. Группа U_{r_1} обладает свойством $[U_{r_1}, U_{r_1}] = X_{r_0}$. Кроме того, $|Z(U_{r_1})| = q^7$. Факторгруппа $U_{r_1}/Z(U_{r_1}) = \overline{U_{r_1}}$ элементарная абелева, и ее можно рассматривать как векторное пространство размерности 8 над полем $GF(q)$. На пространстве $\overline{U_{r_1}}$ вновь можно задать антисимметричную билинейную форму. Тогда если A – некоторая унитарная абелева подгруппа группы $F_4(q)$, то A представима в виде A_1A_2 , где $A_1 \leq C_3(q)$, а $A_2 \leq U_{r_1}$. Образ группы A_2 относительно естественного гомоморфизма $A \rightarrow A/(A \cap Z(U_{r_2}))$ – изотропное подпространство; следовательно,

$$|A| \leq |A_1| \cdot |A_2| \leq q^6 \cdot q^4 \cdot q^7 \leq q^{17}.$$

4. Большие абелевы подгруппы конечных групп лиева типа. В данном разделе результаты, изложенные ранее, будут применяться при изучении конечных групп лиева типа. Будет доказано, что большая абелева подгруппа в конечных простых группах лиева типа, за исключением групп небольшого ранга, совпадает с большей унипотентной абелевой подгруппой. В непростых группах лиева типа большая абелева подгруппа равна произведению большой абелевой унипотентной подгруппы и центра соответствующей группы. Отметим, что большие абелевы подгруппы для групп $A_n(q)$ и $C_l(q)$, $l \geq 3$, найдены в работе [17]. Группы ${}^2B_2(2^{2n+1})$ и ${}^2G_2(3^{2n+1})$ изучены в работах [19] и [20]. Группы ${}^2F_4(q)$ в данной работе изучаться не будут.

Далее напомним строение σ -неподвижных точек редутивных σ -инвариантных подгрупп максимального ранга в линейных простых алгебраических группах (см. [1, предложения 1, 2, 6 и 8]).

ЛЕММА 4.1. Пусть G – простая связная линейная алгебраическая группа; σ – ее автоморфизм Фробениуса; $G_1 = M * S$ – σ -инвариантная связная редутивная подгруппа максимального ранга, где M полупроста, а S – центральный тор; G_1^g – некоторая сопряженная с ней σ -инвариантная подгруппа. Пусть Δ_1 – диаграмма Дынкина группы G_1 и W_1 – группа Вейля группы G_1 . Тогда

$$g^\sigma g^{-1} \in N_G(G_1) \cap N_G(T) = N$$

(для некоторого максимального тора T из G_1) и существует биекция

$$\pi: N \rightarrow N_W(W_1)/W_1.$$

Пусть $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$; τ обозначает образ элемента w относительно естественного гомоморфизма $\varphi: N_W(W_1) \rightarrow \text{Aut}_W(\Delta_1)$, а также графовый автоморфизм группы M , соответствующий данной симметрии τ . Тогда $(M^g)_\sigma \cong M_{\sigma\tau}$.

Пусть $\overline{P}_1$ – подрешетка группы $X(T)$, порожденная всеми рациональными линейными комбинациями корней из Δ_1 . Тогда

$$(S^g)_\sigma \cong (X(T)/\overline{P}_1)/(\sigma w - 1)(X(T)/\overline{P}_1).$$

Кроме того, $|(G_1^g)_\sigma| = |M_\sigma^g| \cdot |S_\sigma^g|$.

Отметим, что в лемме 4.1 рассматривается группа G_σ . В том случае, когда G не является односвязной группой, конечная группа $O^{p'}(G_\sigma)$ не совпадает с G_σ , поэтому порядок группы $(G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)$ меньше, чем тот, что указан в лемме. В этом случае $G_\sigma = \hat{H}O^{p'}(G_\sigma)$, причем $|\hat{H} : H| = d_1/d$. Здесь $\hat{H}$ – максимальный тор группы G_σ ; H – максимальный тор группы $O^{p'}(G_\sigma)$; d_1 – порядок центра группы $O^{p'}(G_\sigma)$; d – порядок центра группы $(G_{sc})_\sigma$. Поэтому для того, чтобы получить порядок подгруппы $(G_1^g)_\sigma$ в группе $O^{p'}(G_\sigma)$, порядок, указанный в лемме, необходимо умножить на дробь d_1/d . Действительно, связная редутивная подгруппа максимального ранга содержит некоторый максимальный тор связной простой линейной алгебраической, и поэтому

$$(G_1^g)_\sigma = \hat{H}((G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)).$$

Значит,

$$|(G_1^g)_\sigma : ((G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma))| = \frac{d_1}{d};$$

следовательно,

$$|(G_1^g)_\sigma \cap O^{p'}(G_\sigma)| = \frac{d_1}{d} |(G_1^g)_\sigma|.$$

Рассмотрим различные типы конечных групп Шевалле. Пусть далее мы находимся в обозначениях леммы 4.1. Пусть G – простая связная линейная алгебраическая группа с системой корней Φ , σ – ее автоморфизм Фробениуса ($\sigma = q\sigma_0$, $q = p^\alpha$) и $G_0 = O^{p'}(G_\sigma)$. Пусть $A = A_s \times A_u$ – некоторая абелева подгруппа группы G_0 . Можно считать, что $A_s \not\leq Z(G_0)$. По лемме 3.1 в G есть связная редуктивная σ -инвариантная подгруппа R (R^0 в обозначениях леммы 3.1) максимального ранга, содержащая группу $A_0 = A_u \times A_{s0}$ ($A_{s0} = A_s \cap R$), причем группа A/A_0 изоморфна некоторой секции группы Вейля $W(\Phi)$, $A_{s0} \leq Z(R)$. Положим $S = Z(R)^0$.

Тип 2A_n .

ЛЕММА 4.2 [2, предложение 8]. В обозначениях леммы 4.1 пусть G – группа типа A_n и пусть G_σ – скрученный вид группы G . Пусть G_1 – σ -инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга в группе G , соответствующая разбиению λ числа $n+1$. Пусть G_1^g – σ -инвариантная редуктивная подгруппа группы G , полученная скручиванием группы G_1 элементом $w \in W$, определенным правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, что w переходит в τ относительно гомоморфизма $N_W(W_1) \rightarrow \text{Aut}_W(\Delta_1)$. Пусть n_i – количество частей разбиения λ , равных i , так что $\text{Aut}_W(\Delta_1) \cong S_{n_2} \times S_{n_3} \times \dots$. Предположим, что $\sigma_0\tau$ ($|\sigma_0| = 2$) дает разбиения $\mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \dots$ чисел $n_2, n_3, \dots$ соответственно. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип $A_{i-1}(q^{\mu_j^{(i)}})$ для четных $\mu_j^{(i)}$ и тип ${}^2A_{i-1}(q^{2\mu_j^{(i)}})$ для нечетного $\mu_j^{(i)}$.

Порядок полупростой части $(S^g)_\sigma$ группы $(G_1^g)_\sigma$ дается формулой

$$(q+1)|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j;\mu_j^{(i)} \text{ четно}} (q^{\mu_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j;\mu_j^{(i)} \text{ нечетно}} (q^{\mu_j^{(i)}} + 1).$$

Поскольку группа A/A_0 изоморфна некоторой секции группы Вейля $W(A_n) \cong S_{n+1}$, из таблицы 1 следует, что $|A/A_0| \leq 3^{(n+1)/3}$. Поэтому, используя леммы 3.3 и 4.2, можно записать следующую оценку:

$$\begin{aligned} (q+1)|A| &\leq \frac{d_1}{d} 3^{(n+1)/3} \prod_{i,j;\mu_j^{(i)} \text{ четно}} (q^{\mu_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j;\mu_j^{(i)} \text{ нечетно}} (q^{\mu_j^{(i)}} + 1) \\ &\times \prod_{i,j} (i, q^{\mu_j^{(i)}} - 1) q^{\mu_j^{(i)} [i^2/4]}. \end{aligned} \quad (1)$$

Положим $S = Z(R)^0$. Поскольку для корневой системы типа A_n нет плохих простых чисел, из леммы 2.4 следует, что $\dim(S) \geq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim(S) = 1$. Тогда группа R имеет лишь две простые компоненты, поскольку в противном случае размерность центрального тора будет больше 1. Следовательно,

$$R = A_{m_1-1}(K) * A_{m_2-1}(K) * S,$$

причем $m_1 + m_2 = n+1$. Покажем, что в этом случае $R = C_{A_n(K)}(S)$. Действительно, централизатор тора в связной редуктивной группе связан, поэтому $R \leq C_{A_n(K)}(S)$.

С другой стороны, единственная подсистемная связная подгруппа, содержащая $A_{n_1-1}(K) * A_{n_2-1}(K)$, — это $A_n(K)$. Поскольку ее центр имеет размерность 0, он не совпадает с S . Таким образом, любой элемент из $A_n(K)$, централизующий S , лежит в R .

Предположим, что $A_s \neq A_{s_0}$. Поскольку группа A_s нормализует S и $A_{s_0} \in R$, мы получаем действие группы A_s/A_{s_0} на группе характеров $X(S)$ тора S (как группы автоморфизмов) по следующему правилу. Если $x \in A_s/A_{s_0}$ и $\chi \in X(S)$, то для любого $s \in S$ имеет место равенство $\chi^x(s) = \chi(s^x)$. Здесь под s^x понимается сопряжение любым представителем элемента x в группе A_s . Ясно, что это сопряжение не зависит от выбора представителя, поскольку A_{s_0} централизует S . Действие элемента x является автоморфизмом группы $X(S)$. Действительно, сохранение операции очевидно, так что x является гомоморфизмом группы $X(S)$. Поскольку у каждого элемента в группе существует обратный, действие элемента x биективно, значит, является автоморфизмом группы $X(S)$. Поскольку размерность тора S равна единице, группа $X(S)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Единственный нетривиальный автоморфизм группы $\mathbb{Z}$ — это автоморфизм порядка 2. Таким образом, если группа A_s/A_{s_0} нетривиальна, то ее порядок равен 2.

Кроме того, в этом случае $|A_{s_0} \cap S| \leq 2$. Действительно, A_s — абелева группа, поэтому любой элемент из A_{s_0} неподвижен относительно действия элемента x . В силу определения действия элемента x на $X(S)$ отсюда следует, что для порождающего характера χ группы $X(S)$ и любого $t \in A_{s_0} \cap S$ выполняется равенство

$$\chi(t) = \chi^{-1}(t^x) = \chi^{-1}(t) = \chi(t^{-1}),$$

т.е. $t^{-1} = t$, в частности, $|A_{s_0} \cap S| \leq 2$. Поскольку $d_1/d \leq 1$, множитель d_1/d можно заменить на единицу. Множитель $3^{(n+1)/3}$ возникал при оценке порядка группы A/A_0 . Поскольку в нашем случае $|A/A_0| = 2$, множитель $3^{(n+1)/3}$ заменяется на 2. Кроме того, поскольку $|S \cap A_0| \leq 2$, вместо $|S|$, участвующего в неравенстве (1), также можно оставить 2. Таким образом, ввиду (1)

$$|A| \leq 4(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]},$$

либо

$$|A| \leq 4\left(\frac{n+1}{2} - 1, q^2 - 1\right)q^{2[(n+1)/16]}$$

(вторая возможность возникает, когда $m_1 = m_2$, т.е. $n+1$ четно). Покажем, что при $n \neq 2$ и $q \neq 3$ в обоих случаях $|A| \leq q^{[(n+1)^2/4]}$.

При $n \geq 14$ имеем

$$\begin{aligned} 4(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} &\leq 4(q+1)^2 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \leq q^6 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+7-1} \leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+n/2-1} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+m_1m_2/2-1} \leq q^{[(n+1)^2/4]}. \end{aligned}$$

Если $8 \leq n \leq 13$, $m_1, m_2 > 1$, то

$$\begin{aligned} 4(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} &\leq 4(q+1)^2 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \leq q^6 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+8-2} \leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+n-2} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+m_1m_2/2-1} \leq q^{[(n+1)^2/4]}. \end{aligned}$$

Если $6 \leq n \leq 7$, $q > 2$ и $m_1, m_2 > 1$, то

$$\begin{aligned} 4(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]} \cdot (m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} &\leq 4(q+1)^2 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \leq q^4 \cdot q^{m_1^2/4+m_2^2/4} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+6-2} \leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+n-2} \\ &\leq q^{m_1^2/4+m_2^2/4+m_1m_2/2-1} \leq q^{[(n+1)^2/4]}. \end{aligned}$$

Если $8 \leq n \leq 13$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то

$$4(n, q+1)q^{[n^2/4]} \leq 4(q+1) \cdot q^{n^2/4} \leq q^3 \cdot q^{n^2/4} \leq q^{n^2/4+4-1} \leq q^{[(n+1)^2/4]}.$$

Если $n = 7$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4(7, q+1)q^{12} < q^{16}$. Если $n = 6$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4(6, q+1)q^9 < q^{12}$. Если $n = 5$, $q > 2$ и $m_1 = 1$, то $4(5, q+1)q^6 < q^9$. Если $n = 5$, $q > 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, то $4(2, q+1)q(4, q+1)q^4 < q^9$. Если $n = 5$, $q > 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$, то $4(3, q+1)q^2(3, q+1)q^2 < q^9$. Аналогичным образом разбираются оставшиеся случаи. Далее в подобных ситуациях мы будем опускать вычисления и записывать лишь результат.

Рассмотрим отдельно группу ${}^2A_2(3^2)$, при этом $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Порядок ее большой абелевой подгруппы равен 16 (это некоторый максимальный тор, который изоморфен $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ и единственен с точностью до сопряжения). Она содержится в группе $A_2(K)$, где K – алгебраически замкнутое поле характеристики 3, причем $A_2(K)$ односвязна, т.е. $\Gamma_\pi = \Gamma_{sc}$. Группа $R = M * S$, где M – полупростая группа типа A_1 , S – тор размерности 1 и $M \cap S$ конечна. Если M – группа присоединенного типа, то ее центр тривиален и тогда $|A| \leq |S| \cdot |a(A_1(3))| \leq 4 \cdot 3 < 16$. Если M односвязна, то ее центр нетривиален и его порядок равен 2. Покажем, что в этом случае пересечение $M \cap S$ совпадает с центром группы M . Действительно, $M = \langle X_r, X_{-r} \rangle$, r – некоторый корень корневой системы типа A_2 . Пусть P – решетка, порожденная корнем r , $\bar{P}$ – подрешетка решетки Γ_{sc} , порожденная всеми возможными рациональными комбинациями корня r . Тогда $S = \bar{P}^\perp$. В алгебраической группе типа A_2 $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 3$. Группа $\bar{P}$ циклическая, пусть χ – ее порождающий элемент. Тогда либо $\chi \in P$, либо $\chi^3 \in P$. Пусть x – нетривиальный элемент из центра группы M . Поскольку $|Z(M)| = 2$, $x^2 = 1$. Тогда $x^r = 1$, значит,

$$1 = x^{\chi^3} = x^{\chi^2} x^\chi = (x^2)^\chi x^\chi = x^\chi = 1,$$

поэтому $x \in S$. Следовательно, и в этом случае $|A| \leq 4 \cdot 3 < 16$.

Пусть теперь $A_s = A_{s0}$. В силу леммы 3.1 A_{s0} содержится в центре группы R , поэтому порядок группы A оценивается следующим образом:

$$|A| \leq (q+1)(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]}(m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]},$$

либо

$$|A| \leq (q-1) \left(\frac{n+1}{2}, q^2-1 \right) q^{2[(n+1)^2/16]}.$$

Справедливо неравенство $|A| \leq q^{[(n+1)^2/4]}$, когда $n \geq 5$. Случаи $n = 2$, $n = 3$ нужно разбирать отдельно, а при $n = 4$ возможны следующие исключения: $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $q = 3$ и $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $q = 2$.

Рассмотрим случай $n = 2$. Если $(3, q+1) = 3$, то либо центр группы ${}^2A_2(q^2)$ нетривиален и тогда

$$|A| \leq (q+1)(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]}(m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} \leq 3q^2,$$

либо

$$|A| \leq \frac{1}{3}(q+1)(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]}(m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} \leq q^2.$$

Если $(3, q+1) = 1$, то группа ${}^2A_2(q^2)$ односвязна, но ее центр тривиален. Большая абелева подгруппа в этом случае – это максимальный тор порядка $(q+1)^2$, изоморфный $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$, который единственен с точностью до сопряжения. Вновь нужно разобрать случай, когда $m_1 = 1, m_2 = 2$. Как в случае группы ${}^2A_2(3^2)$, $M \cap S$ совпадает с центром группы M , поэтому

$$|A| \leq (q+1)q < (q+1)^2,$$

где $(q+1)^2$ – порядок большой абелевой подгруппы.

Пусть теперь $n = 3$. Если $n_1 = n_2 = 2$, то

$$|A| \leq (q+1)(2, q+1)(2, q+1)q^2 \leq q^4$$

при $q \neq 3$. В группе ${}^2A_3(3^2)$ имеются три возможности для центра. Центр может быть тривиален и тогда ${}^2A_3(3^2)$ имеет присоединенный тип. Поэтому

$$|A| \leq \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \leq 3^4.$$

Центр может быть порядка 2 и тогда

$$|A| \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \leq 2 \cdot 3^4.$$

И, наконец, центр может быть порядка 4 и тогда

$$|A| \leq 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3^2 \leq 4 \cdot 3^4.$$

Если $m_1 = 1, m_2 = 3$, то как в случае ${}^2A_2(3^2)$, $M \cap S$ совпадает с центром группы M , поэтому $|A| \leq (q+1)q^2 \leq q^4$.

Последние два случая ${}^2A_4(2^2)$ и ${}^2A_4(3^2)$ рассматриваются аналогично. Таким образом, случай, когда размерность центрального тора равна 1, разобран.

Пусть теперь размерность тора S больше 1. Для всех m и k справедливо неравенство

$$(q^k + (-1)^{k+1})(m, q^k + (-1)^{k+1})q^{k[m^2/4]} \leq (q+1)(mk, q+1)q^{[m^2k^2/4]}. \quad (2)$$

Кроме того, при $1 \leq m_1 \leq m_2$, кроме случаев $m_1 = 1, m_2 = 1$; $m_1 = 1, m_2 = 2$ и $m_1 = 1, m_2 = 3, q = 2$, справедливо неравенство

$$(q+1)(m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]}(q+1)(m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} \leq (q+1)(m_1 + m_2, q+1)q^{[(m_1 + m_2)^2/4]}. \quad (3)$$

Используя неравенства (2) и (3), выражение (1) приводится к одному из следующих видов:

$$(q+1)^2 3^{(n+1)/3} (m_1, q+1)q^{[m_1^2/4]} (m_2, q+1)q^{[m_2^2/4]} (m_3, q+1)q^{[m_3^2/4]} \quad (4)$$

$$(m_1 + m_2 + m_3 = n+1),$$

$$(q+1)^{n-1} 3^{(n+1)/3} (2, q+1)q, \quad (5)$$

$$(q+1)^{n-3} 3^{(n+1)/3} (2, q+1)^2 q^2, \quad (6)$$

$$3^{n+(n+1)/3} 2^2, \quad (7)$$

$$3^{n+(n+1)/3-2} 2^4. \quad (8)$$

Последние два случая возможны лишь при $q = 2$. Выражения (4)–(8) не превосходят порядка большой абелевой подгруппы при $n \geq 5$. Таким образом, необходимо рассмотреть лишь группы ${}^2A_n(q^2)$ при $n \leq 4$ (при $n = 4$ – лишь группу ${}^2A_4(2^2)$). Все случаи разбираются однотипно, поэтому мы рассмотрим лишь случай $n = 3$. При $n = 3$ для связной редуктивной группы R существуют две различных возможности. Группа R либо является максимальным тором, либо равна центральному произведению тора размерности 2 и группы типа A_1 .

Пусть группа R является максимальным тором, т.е. $A = A_s$. Тогда R – это гомоморфный образ группы диагональных матриц относительно естественного гомоморфизма $SL_4(K) \rightarrow SL_4(K)/Z$, где $Z \leq Z(SL_4(K))$. Поскольку группа A_s нормализует R , определим действие группы A_s/A_{s0} на R правилом $s\bar{x} = s^x$, где $s \in R$, $x \in A_s$ и $\bar{x} \in A_s/A_{s0}$. Элементы из A_s/A_{s0} переставляют диагональные элементы группы R . Относительно действия группы A_s/A_{s0} множество $\{1, 2, 3, 4\}$ (множество диагональных мест) разбивается на орбиты. Поскольку группа A_s абелева, элементы из A_s/A_{s0} централизуют элементы из A_{s0} , следовательно, элементы, стоящие на местах, соответствующих одной орбите, могут отличаться лишь на множитель из Z . Значит, в группе A_{s0} существует подгруппа A_{s1} индекса не более чем $|Z|$ (а $|Z| \leq 4$), содержащаяся в торе, размерность которого на единицу меньше количества орбит группы A_s/A_{s0} . Если существуют четыре орбиты, то $A_s = A_{s0}$ и в силу леммы 3.2 $|A|$ не превосходит $(q+1)^3$, что не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2. Если существуют три орбиты, то тогда порядок группы A_s/A_{s0} равен 2, $|A_{s0}/A_{s1}| \leq (4, q+1)$, $|A_{s1}| \leq (q+1)^2$, т.е. $|A_s| \leq 2(4, q+1)(q+1)^2$, что вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2. Если существуют две орбиты, то $|A_s/A_{s0}| \leq 4$, $|A_{s0}/A_{s1}| \leq (4, q+1)$, $|A_{s1}| \leq q+1$, откуда следует, что $|A_s| \leq 4(4, q+1)(q+1)$, т.е. порядок группы A_s вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы. Если, наконец, существует лишь одна орбита, то $|A_s/A_{s0}| \leq 4$, $A_{s0}/A_{s1} = A_{s0} \leq Z$ и, значит, $|A_s| \leq 4(4, q+1)$.

Пусть теперь R – это центральное произведение тора S размерности 2 и простой связной группы M типа A_1 . В силу леммы 2.3 $A_s \leq N(R)$. Из [2, лемма 1] следует, что $N(R)/R \cong K \ltimes (W_R^\perp)$, где K изоморфна группе симметрий диаграммы Дынкина полупростой части группы R , а $W_R^\perp = \langle w_s \mid (s, r) = 0 \text{ для всех } r \in \Phi(R) \rangle$. Так как ранг M равен 1, группа K тривиальна, а $W_R^\perp \leq S_3$. Следовательно, $|A_s/A_{s0}| \leq 3$. Как и при доказательстве леммы 2.3, в R можно найти максимальный тор T , который нормализует группа A_s . Тор S содержится во всех максимальных торах, следовательно, он содержится в T . Как в предыдущем случае, определим действие группы A_s на T . В некоторой базе пространства K^4 тор T диагонализуем, и группа A_s/A_{s0} переставляет элементы, стоящие по диагонали. Если она нетривиальна, то в группе A_{s0} существует подгруппа индекса не более, чем порядок группы Z , которая лежит в торе размерности не более 1. Поэтому $|A| = |A_s| \cdot |A_u| \leq 4(4, q+1)(q+1)q$, что не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2. Если A_s совпадает с A_{s0} , то $|A| \leq (q+1)^2q$, что вновь не превосходит порядка большой абелевой подгруппы.

Тип D_l . Применение леммы 4.1 в случае алгебраической группы типа D_l дает следующий результат.

ЛЕММА 4.3 [2, предложение 10]. Пусть в обозначениях леммы 4.1 G – группа типа D_l над алгебраически замкнутым полем характеристики p и G_1 – σ -инвариантная редуктивная подгруппа максимального ранга в G , определенная парой разбиений λ, μ с условием $|\lambda| + |\mu| = l$. Пусть k_i – количество частей разбиения λ ,

равных i , и n_i – количество частей разбиения μ , равных i ($n_1 = 0$). Тогда

$$\text{Aut}_W(\Delta_1) \cong \begin{cases} S_{k_2} \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_3}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_4}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_2}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_3}) \times \cdots, \\ \text{если } k_1 > 0, \\ \text{подгруппе индекса 2 в ней,} \quad \text{если } k_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть G_1^g – σ -инвариантная подгруппа группы G , полученная скручиванием группы G_1 элементом $w \in W$, определенного правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, что w переходит в $\tau \in \text{Aut}_W(\Delta_1)$. Предположим, что $\sigma_0 \tau$ ($\sigma = q\sigma_0$) дает пары разбиений $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ с условием $|\xi^{(i)}| + |\eta^{(i)}| = k_i$ (где $\eta^{(i)}$ пусто, если $i = 2$) и пару разбиений $\zeta^{(i)}, \omega^{(i)}$ с условием $|\zeta^{(i)}| + |\omega^{(i)}| = n_i$. Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип

$$A_{i-1}(q^{\xi_j^{(i)}}), \quad 2A_{i-1}(q^{2\eta_j^{(i)}}), \quad D_i(q^{\zeta_j^{(i)}}), \quad 2D_i(q^{2\omega_j^{(i)}})$$

по одной компоненте для каждой части каждого из разбиений $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ и $\zeta^{(i)}, \omega^{(i)}$.

Если $k_1 = 0$, то общее количество компонент типа $2A_{i-1}$ с нечетным i и типа $2D_i$ четно, если $\sigma_0 = 1$, и нечетно, если $\sigma_0 \neq 1$.

Порядок тора $(S^g)_\sigma$ дается формулой

$$|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j} (q^{\xi_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j} (q^{\eta_j^{(i)}} + 1).$$

Ввиду таблицы 1 и лемм 3.3, 4.3 справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |A| &\leq 2^l \prod_{i,j} (q^{\xi_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j} (q^{\eta_j^{(i)}} + 1) \prod_{i,j} (i, q^{\xi_j^{(i)}} - 1) q^{\xi_j^{(i)} \lfloor i^2/4 \rfloor} \prod_{i,j} (i, q^{\eta_j^{(i)}} + 1) q^{\eta_j^{(i)} \lfloor i^2/4 \rfloor} \\ &\quad \times \prod_{i,j} (4, q^{\zeta_j^{(i)}} - 1) q^{\zeta_j^{(i)} \frac{i(i-1)}{2}} \prod_j (4, q^{\omega_j^{(4)}} + 1) q^{6\omega_j^{(4)}} \prod_{i>5,j} (4, q^{\omega_j^{(i)}} + 1) q^{\omega_j^{(i)} \frac{(i-1)(i-2)+2}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для любого $m \geq 3$ справедливо неравенство

$$(q^k - 1) \left(\frac{m}{k}, q^k - 1 \right) q^{k \lfloor m^2/4k^2 \rfloor} \leq q^{m(m-1)/2}, \quad (10)$$

и для любого $m \geq 4$ справедливо неравенство

$$(q^k + 1) \left(\frac{m}{k}, q^k + 1 \right) q^{k \lfloor m^2/4k^2 \rfloor} \leq q^{m(m-1)/2}. \quad (11)$$

Далее, для любого m выполняются неравенства

$$(4, q^k - 1) q^{k \frac{(m/k)(m/k-1)}{2}} \leq q^{m(m-1)/2}, \quad (12)$$

$$(4, q^k + 1) q^{k \frac{(m/k-1)(m/k-2)+2}{2}} \leq q^{((m-1)(m-2)+2)/2}. \quad (13)$$

Кроме того, для любых m_1, m_2 выполняются неравенства

$$(4, q-1)q^{m_1(m_1-1)/2}q^{m_2(m_2-1)/2} \leq q^{(m_1+m_2)(m_1+m_2-1)/2}, \quad (14)$$

$$(4, q+1)q^{((m_1-1)(m_1-2)+2)/2}q^{((m_2-1)(m_2-2)+2)/2} \leq q^{((m_1+m_2-1)(m_1+m_2-2)+2)/2}, \quad (15)$$

$$(4, q+1)q^6 \cdot q^{((m-1)(m-2)+2)/2} \leq q^{((m+4-1)(m+4-2)+2)/2}. \quad (16)$$

Пусть $\sigma_0 = 1$, т.е. $O^{p'}((D_l(K))_\sigma)$ – группа нормального типа. Тогда с помощью неравенств (10)–(16) правая часть выражения (9) приводится к виду

$$2^l(2(q-1)q)^{m_1}(2(q+1)q)^{m_2}((3, q+1)(q+1)q^2)^{m_3}(4, q-1)q^{m_4(m_4-1)/2} \times (4, q-1)q^{m_5(m_5-1)/2}(4, q+1)q^{((m_6-1)(m_6-2)+2)/2}, \quad (17)$$

где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = l$, $m_4, m_5, m_6 \geq 2$ (некоторые из m_i могут быть равны 0). При любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 выражение (17) не превосходит порядка большей абелевой подгруппы, указанного в таблице 2.

Пусть $\sigma_0 \neq 1$, т.е. $O^{p'}((D_l(K))_\sigma)$ – группа скрученного типа. С помощью неравенств (10)–(16) правая часть выражения (9) приводится к виду (17), но в силу леммы 4.3 $m_6 \neq 0$. Вновь при любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 выражение (17) не превосходит порядка большей абелевой подгруппы, указанного в таблице 2.

Тип B_l , q нечетно. В качестве следствия из леммы 4.1 получается следующий результат.

ЛЕММА 4.4 [2, предложение 11]. Пусть G – группа типа B_l над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. Пусть G_1 – редукируемая подгруппа максимального ранга группы G , определенная тройкой (λ, μ, ν) , где λ, μ – разбиения, ν – ненулевое целое и $|\lambda| + |\mu| + \nu = l$. Пусть k_i – количество частей разбиения λ , равных i , и n_i – количество частей разбиения μ , равных i ($n_1 = 0$). Тогда

$$\text{Aut}_W(\Delta_1) \cong S_{k_2} \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_3}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{k_4}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_2}) \times (\mathbb{Z}_2 \wr S_{n_3}) \times \cdots.$$

Пусть G_1^g – σ -инвариантная редукируемая подгруппа группы G , полученная скручиванием группы G_1 элементом $w \in W$, который определяется правилом $\pi(g^\sigma g^{-1}) = w$. Предположим, что w переходит в $\tau \in \text{Aut}_W(\Delta_1)$. Предположим, что τ дает пару разбиений $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ с условием $|\xi^{(i)}| + |\eta^{(i)}| = k_i$ и пару разбиений $\zeta^{(i)}, \omega^{(i)}$ с условием $|\zeta^{(i)}| + |\omega^{(i)}| = n_i$ таких, что части этих разбиений дают длины положительных и отрицательных циклов на компонентах τ . Тогда простые компоненты полупростой группы $(M^g)_\sigma$ имеют тип

$$A_{i-1}(q^{\xi_j^{(i)}}), \quad {}^2A_{i-1}(q^{2\eta_j^{(i)}}), \quad D_i(q^{\zeta_j^{(i)}}), \quad {}^2D_i(q^{2\omega_j^{(i)}}), \quad B_\nu(q)$$

с одной компонентой для каждой части разбиений $\xi^{(i)}, \eta^{(i)}$ и $\zeta^{(i)}, \omega^{(i)}$.

Порядок тора $(S^g)_\sigma$ дается формулой

$$|(S^g)_\sigma| = \prod_{i,j} (q^{\xi_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j} (q^{\eta_j^{(i)}} + 1).$$

Из таблицы 1 и лемм 3.3, 4.4 вытекает следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
 |A| \leq & 2^l \prod_{i,j} (q^{\xi_j^{(i)}} - 1) \prod_{i,j} (q^{\eta_j^{(i)}} + 1) \prod_{i,j} (i, q^{\xi_j^{(i)}} - 1) q^{\xi_j^{(i)} [i^2/4]} \prod_{i,j} (i, q^{\eta_j^{(i)}} + 1) q^{\eta_j^{(i)} [i^2/4]} \\
 & \times \prod_{i,j} (4, q^{\zeta_j^{(i)}} - 1) q^{\zeta_j^{(i)} i(i-1)/2} \prod_j (4, q^{\omega_j^{(4)}} + 1) q^{6\omega_j^{(i)}} \\
 & \times \prod_{i>5,j} (4, q^{\omega_j^{(i)}} + 1) q^{\omega_j^{(i)} ((i-1)(i-2)+2)/2} 2q^{(\nu(\nu-1)+1)/2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

С помощью неравенств (10)–(16) правая часть выражения (18) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & 2^l (2(q-1)q)^{m_1} (2(q+1)q)^{m_2} ((3, q+1)(q+1)q^2)^{m_3} (4, q-1)q^{m_4(m_4-1)/2} \\
 & \times (4, q+1)q^{((m_5-1)(m_5-2)+2)/2} 2q^{(m_6(m_6-1)+1)/2},
 \end{aligned} \tag{19}$$

где $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = l$, $m_4, m_5 \geq 2$. При любых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6 выражение (19) не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2.

Группы $B_2(2^n)$, $n \geq 2$. Поскольку характеристика поля K равна 2, в группе $B_2(K)$ нет полупростых элементов, порядок которых является плохим числом, и ее центр тривиален. Кроме того, $W(B_2)$ – 2-группа, поэтому $A_0 = A$. Следовательно, центральный тор S группы R имеет размерность не менее 1 и $A \leq R$. Тогда возможны два случая.

Пусть $\dim S = 1$. Тогда $R = S * A_1(K)$, причем $Z(A_1(K))$ тривиален. Следовательно, в силу лемм 3.2 и 3.3 $|A| \leq (q+1)q \leq q^3$, т.е. не превосходит порядка большой абелевой подгруппы, указанного в таблице 2.

Пусть $\dim S = 2$. Тогда $R = S$ и в силу леммы 3.2 $|A| \leq (q+1)^2 < q^3$, т.е. вновь меньше, чем порядок большой абелевой подгруппы, указанный в таблице 2.

Тип G_2 . Из доказательства леммы 3.1 следует, что группа A лежит в централизаторе некоторого полупростого элемента. Так как группа $G_2(K)$ односвязна, централизатор любого ее полупростого элемента связан (см., например, [12, теорема 2.11]). Следовательно, группа A лежит в множестве неподвижных относительно морфизма Фробениуса σ точек некоторой максимальной σ -инвариантной связной редуктивной подгруппы максимального ранга группы $G_2(K)$. В силу алгоритма Бореля и ди Зибенталья существуют лишь две максимальные связные редуктивные подгруппы R максимального ранга группы $G_2(K)$ – это группы $A_2(K)$ и $A_1(K) * A_1(K)$.

Пусть $R = A_2(K)$. Тогда по лемме 2.2 группа A содержит подгруппу A_0 индекса 3, которая лежит в группе $A_2(q)$ или в ${}^2A_2(q^2)$ (в силу [3, таблица 4, с. 138] возможны оба этих случая). Отметим, что оценка индекса, указанная в лемме 2.2, довольно грубая (особенно для небольшого числа простых множителей), так как на некоторые сомножители мы делим несколько раз. Так и в нашем случае, если группа $A_2(q)$ или ${}^2A_2(q^2)$ односвязна, то она совпадает с R_σ и потому подгруппа целиком лежит в $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$). Если же $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$) имеет присоединенный тип, то A содержит подгруппу индекса не более 3, которая лежит в $A_2(q)$ (или ${}^2A_2(q^2)$), но та, в свою очередь, имеет тривиальный центр. Приведенные рассуждения и результаты, полученные ранее для классических групп, показывают, что в любом случае порядок группы A не превосходит одного из следующих чисел: $3q^2$ или $(q+1)^2$, которые, очевидно, не превосходят

числа $a(G_2(q))$, указанного в таблице 2. Далее мы будем опускать подробный разбор в аналогичных ситуациях, ссылаясь на лемму 2.2 и понимая под этим не столько само утверждение леммы, сколько метод доказательства, с помощью которого в каждом конкретном случае можно получить значительно более точную оценку, чем та, что указана в лемме.

Пусть $R = A_1(K) * A_1(K)$. Тогда в силу леммы 2.2 $|A| \leq (2, q-1)q^2$ либо $|A| \leq (q+1)^2$, что не превосходит числа $a(G_2(q))$, указанного в таблице 2.

Тип F_4 . Поскольку группа $F_4(K)$ односвязна, централизатор любого полупростого элемента связан; поэтому группа A содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $F_4(K)$ максимального ранга.

В силу алгоритма Бореля и ди Зибенталья максимальные по включению собственные σ -инвариантные редуктивные связные подгруппы максимального ранга группы $F_4(K)$ — это

$$B_4(K), \quad A_2(K) * A_2(K), \quad A_1(K) * A_3(K), \quad C_3(K) * A_1(K).$$

Пусть группа A лежит в группе $R = B_4(K)$. Следовательно, по лемме 2.2 $|R_\sigma : Op'(R_\sigma)| \leq 2$. Таким образом, группа A содержит подгруппу индекса не более чем 2, которая лежит в группе $B_4(q)$. Поскольку число $a(B_4(q))$ уже найдено, имеем $|A| \leq 2q^7$, если q нечетно, и $|A| \leq q^{10}$, если q четно. В обоих случаях порядок группы A не превосходит нижней оценки числа $a(F_4(q))$.

Пусть теперь группа A лежит в группе $R = A_1(K) * C_3(K)$. Тогда из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 4q^7$, т.е. порядок группы A меньше нижней оценки числа $a(F_4(q))$.

Пусть A лежит в группе типа $R = A_1(K) * A_3(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп $A_1(q) * A_3(q)$ или $A_1(q) * {}^2A_3(q^2)$ (из [3, таблица 2, с. 133] следует, что могут быть выполнены оба случая). Отсюда (вновь с использованием леммы 2.2 и известных результатов для классических групп) следует, что $|A| \leq 8q^5$, что меньше, чем нижняя оценка числа $a(F_4(q))$.

Пусть A лежит в группе типа $R = A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна группе $A_2(q) * A_2(q)$, либо ${}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$ (вновь пользуемся информацией из [3, таблица 2, с. 133]). Отсюда вытекает оценка $|A| \leq 9q^4$, что меньше нижней оценки числа $a(F_4(q))$.

Тип E_6 . Хорошо известно [21, лекция Ивахори, предложение 5], что для любого полупростого элемента s из связной простой алгебраической группы G группа $C_G(s)/C_G^0(s)$ изоморфно вкладывается в группу $\Gamma_{sc}/\Gamma_\pi = \Omega_\pi$. Поскольку для корневой системы типа E_6 справедливо $|\Gamma_{sc} : \Gamma_\pi| = 3$, в группе A существует подгруппа A_0 индекса не более чем 3, которая содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $E_6(K)$ максимального ранга. В $E_6(K)$ существуют следующие максимальные по включению связные редуктивные подгруппы максимального ранга:

$$A_1(K) * A_5(K), \quad A_2(K) * A_2(K) * A_2(K), \quad S * D_5(K).$$

Пусть A_0 лежит в группе $R = A_1(K) * A_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = A_1(q) * A_5(q)$ (см. [3, случай $E_6(q)$]). Тогда по лемме 2.2 $|A_0| \leq 12q^{10}$, откуда $|A| \leq 36q^{10}$, что меньше нижней оценки числа $a(E_6(q))$.

Пусть A_0 лежит в группе $R = A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп: $A_2(q) * A_2(q) * A_2(q)$, $A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$ или $A_2(q^3)$ (см. [3,

случай $E_6(q)$). Во всех случаях лемма 2.2 дает оценку $|A_0| \leq 27q^9$ (при $q = 2 - 9 \cdot 2^6$). Отсюда следует, что $|A|$ меньше нижней оценки числа $a(E_6(q))$.

Пусть, наконец, A_0 лежит в группе $R = S * D_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = (S_\sigma) * D_5(q)$. Из леммы 2.2 следует, что $|A_0| \leq 4(q-1)q^{10}$. Отсюда $|A|$ меньше нижней оценки числа $a(E_6(q))$.

Тип 2E_6 . Индекс $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 3$, поэтому группа A содержит подгруппу A_0 индекса не более 3, которая лежит в некоторой собственной связной σ -инвариантной редуктивной подгруппе R группы $E_6(K)$ максимального ранга. Максимальными σ -инвариантными связными редуктивными подгруппами группы $E_6(K)$ в этом случае будут группы

$$A_1(K) * A_5(K), \quad S * D_5(K), \quad A_2(K) * A_2(K) * A_2(K).$$

Если характеристика поля K четна, то в $E_6(K)$ не существует полупростого элемента, централизатор которого совпадал бы с $A_1(K) * A_5(K)$, в этом случае необходимо рассмотреть две дополнительные связные редуктивные σ -инвариантные подгруппы максимального ранга группы $E_6(q)$ — это группы $A_5(K) * S$ и $A_4(K) * A_1(K) * S$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K) * A_5(K)$ (напомним, что в этом случае q нечетно). Тогда $Op'(R_\sigma) = A_1(q) * {}^2A_5(q^2)$ (см. [3, таблица 1, с. 127]). В силу леммы 2.2 $|A| \leq 24q^{10}$, что меньше нижней оценки для $a({}^2E_6(q^2))$ при $q > 3$. При $q = 3$ замечаем, что группу $E_6(K)$ можно взять односвязной (так как группы ${}^2E_6(3^2)_{sc}$ и ${}^2E_6(3^2)_{ad}$ в этом случае изоморфны). Поэтому группа A содержится в R (а не ее подгруппа индекса 3). Кроме того, лемма 2.2 в данном случае дает оценку $|A| \leq 4q^{10}$, что меньше нижней оценки для $a({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = S * D_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = (S_\sigma) * {}^2D_5(q^2)$ (см. [3, таблица 1, с. 127]). Следовательно, $|A| \leq 12(q+1)q^8$ ($|A| \leq 3q^8$, если q четно), т.е. порядок группы A не превосходит нижней оценки числа $a({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_2(K) * A_2(K) * A_2(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ совпадает с одной из следующих групп $A_2(q^2) * A_2(q)$, ${}^2A_2(q^6)$, либо с ${}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2) * {}^2A_2(q^2)$ (см. [3, таблица 1, с. 127]). В любом случае справедлива оценка $|A| \leq 27q^6$, что меньше, чем нижняя оценка для $a({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_5(K) * S$ (этот случай мы рассматриваем лишь для поля K характеристики 2). Тогда $Op'(R_\sigma)$ совпадает с группой ${}^2A_5(q^2) * S_\sigma$. Отсюда следует, что порядок группы A не превосходит $6(q+1)q^9$ ($3q^9$, если $q = 2$), что меньше нижней оценки числа $a({}^2E_6(q^2))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_4(K) * A_1(K) * S$ (вновь предполагается, что характеристика поля K четна). Тогда $Op'(R_\sigma)$ совпадает с ${}^2A_4(q^2) * A_1(q) * S_\sigma$, откуда $|A| \leq 15(q+1)^2q^6$ ($|A| \leq 3^2 \cdot 2^6$, если $q = 2$), что меньше, чем нижняя оценка для $a({}^2E_6(q^2))$.

Тип E_7 . Индекс $|\Gamma_{sc} : \Gamma_{ad}| = 2$, поэтому группа A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая лежит в собственной связной редуктивной подгруппе R группы $E_7(K)$. Максимальная по включению связная редуктивная подгруппа максимального ранга в $E_7(K)$ — это одна из следующих групп:

$$A_7(K), \quad A_1(K) * D_6(K), \quad A_1(K) * A_3(K) * A_3(K), \quad A_2(K) * A_5(K), \quad S * E_6(K).$$

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_7(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = A_7(q)$ либо $Op'(R_\sigma) = {}^2A_7(q^2)$ (см. [4, таблица 1]). Из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 16q^{16}$, т.е. порядок группы A не превосходит нижней оценки числа $a(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K) * D_6(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ совпадает с $A_1(q) * D_6(q)$ (см. [4, таблица 1]). В любом случае $|A| \leq 16q^{16}$, что меньше нижней оценки числа $a(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $R = A_1(K) * A_3(K) * A_3(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп: $A_1(q) * A_3(q) * A_3(q)$ либо $A_1(q) * A_3(q^2)$ (см. [4, таблица 1]). В любом случае лемма 2.2 дает $|A| \leq 64q^9$, что не превосходит нижней оценки числа $a(E_7(q))$.

Пусть группа A_0 лежит в $A_2(K) * A_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп: $A_2(q) * A_5(q)$ либо ${}^2A_2(q^2) * {}^2A_5(q^2)$ (см. [4, таблица 1]). Следовательно, справедливо неравенство $|A| \leq 36q^{11} < a(E_7(q))$.

Пусть, наконец, группа A лежит в $R = S * E_6(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из групп $(S_\sigma) * E_6(q)$ или $(S_\sigma) * {}^2E_6(q^2)$. В любом случае $|A| \leq 6(q-1)q^{20} < a(E_7(q))$.

Тип E_8 . Поскольку $\Gamma_{sc} = \Gamma_{ad}$, централизатор любого полупростого элемента связан, следовательно, группа A содержится в некоторой собственной связной редуктивной подгруппе группы $E_8(K)$ максимального ранга. Максимальная связная редуктивная подгруппа в $E_8(K)$ – это одна из следующих групп:

$$D_8(K), \quad A_8(K), \quad A_1(K) * A_2(K) * A_5(K), \\ A_4(K) * A_4(K), \quad A_3(K) * D_5(K), \quad A_2(K) * E_6(K), \quad A_1(K) * E_7(K).$$

Пусть группа A лежит в $R = D_8(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = D_8(q)$ (см. [4, таблица 2]). Из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 4q^{27} < a(E_8(q))$. Здесь и далее в качестве числа $a(E_8(q))$ мы берем нижнюю оценку этого числа из таблицы 2.

Пусть группа A лежит в $R = A_8(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = A_8(q)$ либо $Op'(R_\sigma) = {}^2A_8(q^2)$ (см. [4, таблица 2]). Применяя лемму 2.2, получаем $|A| \leq 9q^{20} < a(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_1(K) * A_2(K) * A_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ – это одна из следующих групп: $A_1(q) * A_2(q) * A_5(q)$ либо $A_1(q) * {}^2A_2(q^2) * {}^2A_5(q^2)$ (см. [4, таблица 2]). Вновь из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 36q^{12} < a(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_4(K) * A_4(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ – это одна из следующих групп: $A_4(q) * A_4(q)$, ${}^2A_4(q^2) * {}^2A_4(q^2)$ или ${}^2A_4(q^4)$ (см. [4, таблица 2]). Из леммы 2.2 вытекает, что $|A| \leq 25q^{12} < a(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_3(K) * D_5(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ изоморфна одной из следующих групп: $A_3(q) * D_5(q)$ или ${}^2A_3(q^2) * {}^2D_5(q^2)$ (см. [4, таблица 2]). Применяя лемму 2.2, получаем $|A| \leq 16q^{19} < a(E_8(q))$.

Пусть группа A лежит в $R = A_2(K) * E_6(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma)$ – это одна из следующих групп: $A_2(q) * E_6(q)$ или ${}^2A_2(q^2) * {}^2E_6(q^2)$. Справедливо неравенство $|A| \leq 9q^{22} < a(E_8(q))$.

Пусть, наконец, группа A лежит в $R = A_1(K) * E_7(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = A_1(q) * E_7(q)$. В силу леммы 2.2 $|A| \leq 4q^{33} < a(E_8(q))$.

Тип 3D_4 . В $D_4(K)$ существуют лишь две максимальные связанные σ -инвариантные редуктивные подгруппы максимального ранга:

$$A_1(K) * A_1(K) * A_1(K) * A_1(K) \quad \text{и} \quad T * A_2(K),$$

где T – тор размерности 2.

Пусть группа A лежит в $R = A_1(K) * A_1(K) * A_1(K) * A_1(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = A_1(q) * A_1(q^3)$ (см. [3, таблица 7, с. 140]). Из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 4q^4$ ($|A| \leq 27$, если $q = 2$, и $|A| \leq 2q^4$, если $q = 3$), что меньше, чем $q^5 = a(^3D_4(q^3))$.

Пусть группа A лежит в $R = T * A_2(K)$. Тогда $Op'(R_\sigma) = (T_\sigma) * A_2(q)$ или $Op'(R_\sigma) = (T_\sigma) * ^2A_2(q^2)$ (см. [3, таблица 7, с. 140]). Из леммы 2.2 следует, что $|A| \leq 3(q^2 + q + 1)q^2$ ($|A| \leq 28$ при $q = 2$ и $|A| \leq 117$ при $q = 3$), что вновь не превосходит $q^5 = a(^3D_4(q^3))$.

ТАБЛИЦА 2

Группа G	$a(G)$	Источник
$A_n(q)$, кроме $A_1(q)$, q четно и $A_2(q)$, $(3, q-1) = 1$	$q^{[(n+1)^2/4]}$	[5]
$A_1(q)$, q четно	$q+1$	[17]
$A_2(q)$, $(3, q-1) = 1$	$q^2 + q + 1$	[17]
$B_n(q)$, $n \geq 4$, q нечетно	$q^{n(n-1)/2+1}$	[5] и [7]
$B_3(q)$, q нечетно	q^5	[5] и [7]
$C_n(q)$, кроме $C_2(2)$	$q^{n(n+1)/2}$	[5], [6] и [8]
$D_n(q)$	$q^{n(n-1)/2}$	[5] и [7]
$^2A_n(q^2)$, кроме $^2A_2(q^2)$, $(3, q+1) = 1$ и $^2A_3(2^2)$	$q^{[(n+1)^2/4]}$	[8]
$^2A_2(q^2)$, $(3, q+1) = 1$	$(q+1)^2$	[]
$^2A_3(2^2)$	27	[]
$^2D_n(q^2)$, $n \geq 5$	$q^{(n-1)(n-2)/2+2}$	[7]
$^2D_4(q^2)$	q^6	[7]
$G_2(q)$, q не делится на 3, кроме $G_2(2)$	q^3	[]
$G_2(q)$, q – степень тройки	q^4	[]
$F_4(q)$, q четно	$q^{11} \leq a(G) \leq q^{17}$	[]
$F_4(q)$, q нечетно	$q^9 \leq a(G) \leq q^{14}$	[17]
$E_6(q)$	$q^{16} \leq a(G) \leq q^{20}$	[17]
$E_7(q)$	$q^{27} \leq a(G) \leq q^{32}$	[17]
$E_8(q)$	$q^{36} \leq a(G) \leq q^{61}$	[17]
$^2B_2(2^{2n+1})$	2^{2n+2}	[19]
$^2G_2(q)$	q^2	[20]
$^3D_4(q^3)$	q^5	[]
$^2E_6(q^2)$	$q^{12} \leq a(G) \leq q^{20}$	[] и [17]

Порядки $a(G)$ больших абелевых подгрупп или их оценки во всех простых конечных группах лиева типа, кроме $^2F_4(q)$, приведены в таблице 2. В этой таблице в графе “Источник” указано, в какой работе изучались группы соответствующего порядка. В том случае, когда порядок указан точно, известно строение и количество всех классов не сопряженных больших абелевых групп. В том случае, когда указана оценка сверху и снизу, в настоящей работе доказано, что если некоторая абелева подгруппа A группы G содержит нецентральный полупростой элемент, то ее порядок меньше, чем порядок некоторой унитарной абелевой подгруппы. Таким образом, большая абелева подгруппа во всех конечных простых группах лиева типа, кроме $^2F_4(q)$, совпадает с большой полупростой или большой унитарной абелевой подгруппой. Если центр группы

лиева типа G нетривиален, т.е. группа G не является простой, то значение, указанное в таблице, необходимо умножить на порядок центра. Пустой ссылкой обозначена ссылка на результаты настоящей работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Carter R. W. Centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1978. V. 37. №3. P. 491–507.
- [2] Carter R. W. Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1981. V. 42. №1. P. 1–41.
- [3] Deriziotis D. I. Conjugacy classes and centralizers of semisimple elements in finite groups of Lie type. Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen. V. 11, 1984.
- [4] Deriziotis D. I. The centralizers of semisimple elements of the Chevalley groups E_7 and E_8 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6. №1. P. 191–216.
- [5] Barry M. J. J. Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. V. 27. №1. P. 59–87.
- [6] Barry M. J. J., Wong W. J. Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2 // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. V. 33. №3. P. 345–350.
- [7] Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. V. 32. №2. P. 223–245.
- [8] Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. V. 33. №3. P. 331–344.
- [9] Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
- [10] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. London: Wiley, 1972.
- [11] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
- [12] Humphreys J. E. Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups. Math. Survey and Monographs. V. 43. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1995.
- [13] Gorenstein D., Lyons R. The Local Structure of Finite Groups of Characteristic 2 Type. Memoirs Amer. Math. Soc. V. 276. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1983.
- [14] Borel A., de Siebental J. Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos // Comment. Math. Helv. 1949. V. 23. P. 200–221.
- [15] Steinberg R. Endomorphisms of Linear Algebraic Groups. Memoirs Amer. Math. Soc. V. 80. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1968.
- [16] Borel A. Linear Algebraic Groups. New York: Benjamin, 1969.
- [17] Вдовин Е. П. Порядки абелевых подгрупп в конечных простых группах // Алгебра и логика. 1999. Т. 38. №2. С. 131–160.
- [18] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // УМН. 1986. Т. 41. №1. С. 57–96.
- [19] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75. №1. P. 105–145.
- [20] Ward H. N. On Ree's series of simple groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. №1. P. 62–80.
- [21] Семинар по алгебраическим группам. Сб. статей. М.: Мир, 1973.

Новосибирский государственный университет
E-mail: 321vep@ccmath.nsu.ru

Поступило
10.06.1998
Исправленный вариант
01.10.2000