Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Ле Хонг Ван, Нетривиальные критические сети. Особенности лагранжианов и критерий критичности, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 566–580

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:06:31

УДК 517

НЕТРИВИАЛЬНЫЕ КРИТИЧЕСКИЕ СЕТИ. ОСОБЕННОСТИ ЛАГРАНЖИАНОВ И КРИТЕРИЙ КРИТИЧНОСТИ

А. О. Иванов, Хонг Ван Ле, А. А. Тужилин

Выделен класс так называемых квазирегулярных лагранжианов, содержащих особенности на нулевом сечении кокасательной расслоения к многообразию, на котором рассматриваются экстремальные сети. Для таких лагранжианов доказан критерий экстремальности сети: на каждом ее ребре должны выполняться уравнения Эйлера–Лагранжа, а в вершинах – некоторые условия согласования.

Библиография: 4 названия.

Введение. В настоящей работе изучаются разветвленные экстремали (экстремальные сети) одномерных вариационных функционалов типа Лагранжа. При этом экстремальность понимается в следующем широком смысле: при деформации разрешается расщеплять вершины, меняя при этом топологию сети. Чтобы различать сети, для которых вершины расщеплять нельзя, и сети, допускающие расщепления, авторы называют первые – *параметрическими сетями*, т.е. сетями с фиксированной параметризацией, а вторые – *сетями-следами*, или просто *сетями*.

В центре внимания авторов следующие два вопроса:

- какие свойства лагранжианов приводят к существованию нетривиальных разветвлений его экстремальных сетей;
- какова локальная структура разветвленных экстремалей.

Отметим, что, вообще говоря, дополнительная свобода, возникающая из-за расщепления вершин, может существенно ограничить класс экстремалей по отношению к экстремальным параметрическим сетям и вообще привести к отсутствию экстремалей. Оказывается, наличие нетривиальных экстремалей тесно связано с наличием особенностей у лагранжиана, см. теорему 3.1 и следствия 3.1–3.4. Тривиальность экстремалей здесь понимается в следующем смысле: сеть называется *тривиально экстремальной*, если, во-первых, каждое ее ребро – экстремаль по отношению к произвольным деформациям (в частности, смещающим любые вершины сети) и, во-вторых, каждая точечная кривая, образ которой совпадает с произвольной вершиной сети, также является

Данная работа была выполнена авторами в Институте прикладной математики Макса Планка (г. Лейпциг, Германия), где А. О. Иванов и А. А. Тужилин работали по приглашению профессора Ю. Йоста в апреле–июне 1999 года. Работа первого и третьего авторов выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-15-96142 и № 98-01-00240, и фонда INTAS, грант № 97-0808.

экстремалью по отношению к любым деформациям. В частности, если разрезать тривиально экстремальную сеть по любому набору ее вершин, то в результате мы получим объединение сетей, вновь являющихся экстремальными. Авторами показано, что если лагранжиан является гладким, то соответствующий функционал не имеет нетривиальных экстремалей.

Авторами введен в рассмотрение класс *квазирегулярных лагранжианов*, т.е. лагранжианов, имеющих, в некотором смысле, простейшие особенности, приводящие к появлению нетривиальных разветвленных экстремалей. Для случая таких лагранжианов авторами получен критерий экстремальности сети, см. теорему 3.2. Основная трудность при доказательстве этой теоремы состоит в необходимости следить за всевозможными расщеплениями вершин сети, количество же таких расщеплений, вообще говоря, неограничено.

Кроме того, получен критерий экстремальности квазирегулярной параметрической сети (теорема 2.1), а также критерий экстремальности следа в предположении гладкости квазирегулярного лагранжиана (теорема 3.1).

Авторы пользуются случаем выразить свою глубокую признательность профессору Ю. Йосту за проявленный интерес к работе и предоставленную возможность плодотворно совместно поработать в MPI für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig. Авторы благодарны академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе.

1. Предварительные сведения. Мы будем рассматривать графы с топологической точки зрения. *Топологическим графом* G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_\alpha\}$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi: \bigsqcup_\alpha I_\alpha \rightarrow G$ – каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_α при отображении π называются *ребрами* графа G , а π -образы концевых точек отрезков I_α – *вершинами*. Если для каждого α фиксирован конкретный отрезок $[a_\alpha, b_\alpha] = I_\alpha$ числовой прямой, то такой граф называется *оснащенным*. Отметим, что так как концы произвольного отрезка $[a_\alpha, b_\alpha]$ естественным образом упорядочены, а именно, $a_\alpha < b_\alpha$, то тем самым фиксирована ориентация каждого ребра оснащенного графа и можно говорить о его *начальной* и *конечной* вершинах.

Гомеоморфизм $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ оснащенных графов называется *эквивалентностью*, если он переводит вершины в вершины и для каждого ребра $[a, b]$ графа G_1 $\varphi|_{[a, b]}$ есть тождественное отображение отрезка $[a, b]$ на себя. Оснащенные графы G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$.

Предположим, что в графе G выделено некоторое подмножество B множества его вершин. Такой граф G мы будем называть *графом с границей* $\partial G = B$. Вершины из ∂G будем называть *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными*. Ребра графа, инцидентные граничным вершинам, также назовем *граничными*, а ребро, не инцидентное никакой граничной вершине, назовем *внутренним*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – произвольный связный оснащенный граф и ∂G – его граница. *Параметрической (оснащенной) сетью топологии* G на многообразии W называется непрерывное отображение Γ из G в W . Граф G в этом случае называется *параметризующим графом параметрической сети* Γ или ее *топологией*.

Вся терминология теории графов, топологических пространств и их отображений непосредственно переносится на параметрические сети. Например, ограничение отображения Γ на вершины, ребра, границу, связный подграф параметризующего графа,

локальный граф и т.д. называются *вершинами*, *ребрами*, *границей*, *подсетью*, и т.д. параметрической сети Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Выше мы представили каждый оснащенный граф как набор отрезков, факторизованный по некоторой эквивалентности, отождествляющей концевые точки этих отрезков. Точно так же, параметрическую сеть можно представить как набор непрерывных кривых в многообразии, некоторые концевые точки которых отождествлены.

Параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ называется *гладкой* (*регулярной*, *кусочно-гладкой*, *кусочно-регулярной*), если ограничение отображения Γ на замыкание каждого ребра графа G является таковым. Отметим, что понятие гладкой параметрической сети естественным образом обобщает понятие гладкой кривой.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow X$ – произвольная параметрическая сеть и $I = [a, b]$ – некоторый отрезок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывное отображение $\Psi: G \times I \rightarrow W$ такое, что для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g, a) = \Gamma(g)$, называется *деформацией параметрической сети* Γ . Если исходная параметрическая сеть Γ является гладкой (регулярной, кусочно-гладкой, кусочно-регулярной), то мы будем предполагать, что каждая параметрическая сеть $\Psi(\cdot, t) = \Gamma_t$ является таковой и что для каждого замыкания $\bar{e}$ ребра e графа G ограничение отображения Ψ на $\bar{e} \times I$ является гладким или кусочно-гладким.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ – гладкая сеть на гладком многообразии W и $\Gamma_t, \Gamma_{t=0} = \Gamma$, – некоторая ее деформация. Рассмотрим произвольную точку $g \in G$, и пусть $\Gamma_t(g)$ – кривая, по которой движется точка $\Gamma(g)$ при деформации. Семейство векторов скоростей кривых $\Gamma_t(g)$ при $t = 0$ по всем точкам $g \in G$ называется *полем деформации* Γ_t .

Введем на классе всех параметрических сетей на W отношение эквивалентности ρ следующим образом. Будем говорить, что параметрическая сеть Γ_1 может быть *спроецирована* на Γ_2 , если существует проекция $\pi: G_1 \rightarrow G_2$ такая, что $\Gamma_2 \circ \pi = \Gamma_1$. Здесь под проекцией $\pi: G_1 \rightarrow G_2$ мы понимаем каноническую проекцию пространства G_1 на фактор-пространство $G_2 = G_1/H$, где H – некоторый связный подграф в G_1 . Проекция π индуцирует отображение $\pi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ одной сети в другую¹, которое мы также будем называть *проекцией*. Две параметрические сети $\Gamma_i: G_i \rightarrow X, i = 1, 2$, назовем ρ -смежными, если одна из них может быть спроецирована на другую. Отметим, что отношение ρ -смежности рефлексивно и симметрично, но не транзитивно. Расширим его до отношения эквивалентности следующим образом. Две параметрические сети Γ и Γ' назовем ρ -эквивалентными, если существует конечная последовательность $\{\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n = \Gamma'\}$ параметрических сетей такая, что каждые две соседних сети Γ_i и Γ_{i+1} в этой последовательности ρ -смежны. Классы ρ -эквивалентности называются (*оснащенными*) *сетями-следами* или просто (*оснащенными*) *сетями*. Если параметрическая сеть Γ содержится в следе Υ , то будем писать $\Upsilon = [\Gamma]$.

Каноническим представителем следа Υ называется такая параметрическая сеть $\Gamma \in \Upsilon$, что каждая параметрическая сеть Γ' из Υ может быть спроецирована на Γ . Можно показать, что у каждого следа существует единственный с точностью до эквивалентности канонический представитель (см. [1]).

¹Говоря про отображение одной сети в другую, мы имеем в виду отображение графиков, соответствующих этим сетям. Напомним, что сети – это по определению отображения, а графики – это множества, состоящие из пар.

(*Локальной деформацией следа* Υ назовем однопараметрическое семейство сетей $\Upsilon_t = [\Gamma_t]$, $t \in [t_1, t_2]$, где Γ_t – деформация некоторой параметрической сети $\Gamma = \Gamma_{t_1}$ из Υ такая, что все параметрические сети Γ_t при $t > t_1$ являются каноническими представителями сетей Υ_t .

2. Локальная структура экстремальных параметрических сетей. В этом пункте мы для простоты ограничиваемся рассмотрением лишь автономных лагранжианов, хотя все те же результаты могут быть получены и в неавтономном случае.

Пусть W – гладкое многообразие, $\pi: TW \rightarrow W$ – касательное расслоение, $L: TW \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывный лагранжиан. Пусть Ω – пространство всех кусочно-гладких кривых на W и $\psi_L: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – классический вариационный функционал, соответствующий лагранжиану L , т.е.

$$\psi_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

где $\gamma: [a, b] \rightarrow W$ – кривая из Ω .

Пусть G – оснащенный граф, ∂G – его граница, $\beta: \partial G \rightarrow W$ – произвольное отображение, $\Gamma: G \rightarrow W$ – произвольная кусочно-гладкая параметрическая сеть с границей $\partial \Gamma = \beta$. На множестве таких сетей определен функционал Ψ_L , значение которого на сети Γ равно сумме значений функционала ψ_L на ребрах этой сети.

Пусть (x, ξ) – произвольная точка из TW . Предположим, что лагранжиан L дважды непрерывно дифференцируем в точке (x, ξ) . Обозначим через $p(x, \xi) = L_\xi(x, \xi)$ точку из кокасательного пространства T_x^*W , определенную следующим образом. Если x^i – координаты на W в окрестности точки x , а ξ^i – соответствующие координаты в касательном пространстве $T_x W$, то i -я координата ковектора $p(x, \xi)$ имеет вид

$$p(x, \xi)_i = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}(x, \xi).$$

Ковектор $p(x, \xi)$ называется (обобщенным) *импульсом в точке* (x, ξ) . Далее, определим другой ковектор $[L](x, \xi)$ следующим образом. Рассмотрим произвольную гладкую кривую $x(t)$, для которой $\dot{x}(0) = \xi$. Положим

$$[L](x, \xi)_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \{p_i(x(t), \dot{x}(t))\} - \frac{\partial L}{\partial x^i}(x(0), \dot{x}(0)).$$

Хорошо известно, что это определение не зависит от выбора кривой $x(t)$, см. [2]. Ковектор $[L]$ называется *производной Лагранжа функции* L .

Кривую $\gamma(t)$ назовем *квазирегулярной*, если она либо регулярна, либо является отображением в точку. Параметрическую сеть Γ назовем *квазирегулярной*, если все ее ребра – квазирегулярные кривые. Ребро графа G , параметризующее регулярное (точечное) ребро сети Γ , также будем называть *регулярным* (соответственно *точечным*).

Лагранжиан L назовем *квазирегулярным*, если выполнены следующие условия:

- 1) функция L является гладкой на всем TW , кроме, быть может, нулевого сечения $W_0 \subset TW$;
- 2) ограничение функции L на нулевое сечение $W_0 \subset TW$ равно нулю;
- 3) для любого вектора $\zeta \in T_{(P, \xi)}(TW)$ существует производная $\zeta(L)$ функции L по направлению² вектора ζ ;

²Здесь и всюду ниже производная функции по направлению понимается как односторонний предел. В частности, производные функции по противоположным направлениям, вообще говоря, не обязаны быть противоположны.

- 4) для произвольной гладкой деформации γ_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, точечной кривой γ_0 такой, что все кривые γ_ε , $\varepsilon > 0$, являются регулярными, функция $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t))$ непрерывна по совокупности переменных (t, ε) в области определения (это условие будем называть *условием согласованности*).

Примером квазирегулярного не всюду гладкого лагранжиана является лагранжиан, соответствующий функционалу длины на римановом многообразии. Более общий пример такого лагранжиана задается гладко зависящей от точки и не нулевого касательного вектора нормой на касательном пространстве к многообразию. Отметим, что строгая выпуклость нормы не предполагается.

Свойства, определяющие квазирегулярный лагранжиан, возникли при попытке понять, какие характеристики функционала длины приводят к наличию нетривиальных экстремалей. Из первого свойства вытекает, что регулярные ребра экстремальных сетей удовлетворяют стандартным уравнениям Эйлера–Лагранжа. Второе условие необходимо для того, чтобы функционал был корректно определен на сетях-следах (для этого необходимо равенство функционала нулю на точечных ребрах). Третье и четвертое свойства представляются необходимыми для использования стандартных приемов математического анализа, таких как дифференцирование интегралов, зависящих от параметра.

Следующее утверждение вычисляет производную по направлению от функционала ψ_L с квазирегулярным лагранжианом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть L – квазирегулярный лагранжиан и ψ_L – соответствующий классический вариационный функционал. Пусть $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$, – произвольная квазирегулярная кривая и γ_ε , $\varepsilon \in [0, 1]$, – гладкая деформация кривой γ такая, что при $\varepsilon > 0$ все кривые γ_ε регулярны. Обозначим через $\eta(t)$ поле деформации γ_ε , т.е. $\eta(t) = d/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} \gamma_\varepsilon(t)$. Тогда если кривая $\gamma(t)$ регулярна, то выполнено равенство

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta) \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b [L](\gamma, \dot{\gamma})(\eta) dt.$$

В противном случае, т.е. если кривая γ точечная, выполнено равенство

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = \int_a^b \zeta(L)(\gamma, 0) dt,$$

где $\zeta = (\eta, \dot{\eta})$ – векторное поле вдоль кривой $t \mapsto (\gamma(t), 0)$ в TW . Если дополнительно предположить, что лагранжиан L является гладким в окрестности точки $(x, 0)$, где $x = \gamma(t)$, то

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi_L(\gamma_\varepsilon) = p(x, 0)(\eta) \Big|_{t=a}^{t=b} + \int_a^b [L](x, 0)(\eta) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение хорошо известно, см., например [2].

Докажем второе утверждение. Рассмотрим функцию

$$f(t, \varepsilon) = L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t)),$$

где $t \in [a, b]$ и $\varepsilon \in [0, 1]$. Частная производная $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \varepsilon)$ функции $f(t, \varepsilon)$ по параметру ε равна $\zeta(L)(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$. Из условия квазирегулярности лагранжиана L вытекает, что функция $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \varepsilon)$ непрерывна по совокупности переменных. Поэтому

$$\frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(\gamma_\varepsilon(t), \dot{\gamma}_\varepsilon(t)) dt = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, \varepsilon) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, \varepsilon) dt = \int_a^b \zeta(L)(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

что и требовалось.

Квазирегулярная (параметрическая) сеть Γ называется *экстремальной* по отношению к функционалу Ψ_L с квазирегулярным лагранжианом, если для произвольной деформации $\Gamma_\varepsilon, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, сети $\Gamma = \Gamma_0$ имеет место неравенство

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \Psi_L(\Gamma_\varepsilon) \geq 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы не загромождать изложение, мы определяем экстремальность как неотрицательность производной по направлению. Сети, определяемые с помощью противоположного неравенства, тоже, конечно, следует называть экстремальными. Однако, мы, очевидно, не сужаем класса экстремальных сетей, так как одни получаются из других заменой знака лагранжиана.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ – произвольная квазирегулярная параметрическая сеть. Максимальные связные подграфы графа G , все ребра которых – точечные, назовем *точечными компонентами графа G* . Приведенные компоненты графа G – это или его точечные компоненты, или его вершины, не инцидентные точечным ребрам. Соответствующие элементы параметрической сети назовем так же.

Для каждой приведенной компоненты $H \subset \Gamma$ обозначим через E_H множество ребер сети H , через I_H – множество смежных с H ребер из $\Gamma \setminus H$, конечные вершины которых лежат в H , а через O_H – множество смежных с H ребер из $\Gamma \setminus H$, начальные вершины которых лежат в H . Отметим, что I_H и O_H могут пересекаться. Кроме того, объединение всех множеств I_H и O_H по всем приведенным компонентам H сети Γ совпадает с множеством всех регулярных ребер сети Γ . Наконец, если γ – ребро сети Γ , то через $[a_\gamma, b_\gamma]$ обозначим отрезок, параметризующий это ребро. Через ∂H обозначим множество вершин из H , являющихся граничными в сети Γ . Через $\bar{\partial} H$ обозначим множество вершин из H , инцидентных регулярным ребрам сети Γ . Далее, для каждой вершины $x \in \bar{\partial} H$ обозначим через $I_H(x)$ и $O_H(x)$ подмножества из I_H и O_H соответственно, состоящие из всех ребер, инцидентных x . Положим $N_H(x) = I_H(x) \cup O_H(x)$.

Удобно ввести следующее обозначение. Положим $p_x(\gamma)$ равным $\pm p(\gamma, \dot{\gamma})$ в концевой вершине x ребра γ сети Γ , где знак “плюс” выбирается, если x – конечная вершина ребра γ , и знак “минус” – в противном случае.

Из утверждения 2.1 легко получается следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.1 (о локальной структуре). Пусть L – квазирегулярный лагранжиан. Квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала Ψ_L , если и только если каждое регулярное ребро $\gamma: [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow W$ сети Γ есть экстремаль функционала ψ_L , т.е. $[L](\gamma, \dot{\gamma}) = 0$, и

для каждой приведенной компоненты $H: G_H \rightarrow W$ сети Γ и любой гладкой сети $\eta: G_H \rightarrow TW$, где $\pi \circ \eta = \Gamma|_{G_H}$ и $\eta(\partial G_H) \subset W_0$, следующее выражение неотрицательно:

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in I_H} p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta_\gamma) \Big|_{t=b_\gamma} - \sum_{\gamma \in O_H} p(\gamma, \dot{\gamma})(\eta_\gamma) \Big|_{t=a_\gamma} + \sum_{\gamma \in E_H} \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \zeta_\gamma(L)(\gamma, \dot{\gamma}) dt \\ &= \sum_{x \in \partial H} \left[\sum_{\gamma \in N_H(x)} p_x(\gamma) \right] (\eta(x)) + \sum_{\gamma \in E_H} \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \zeta_\gamma(L)(\gamma, \dot{\gamma}) dt, \end{aligned}$$

где η_γ – ребро $\eta|_{[a_\gamma, b_\gamma]}$ сети η , а $\zeta_\gamma = (\eta_\gamma, \dot{\eta}_\gamma)$ – векторное поле вдоль кривой $(\gamma, \dot{\gamma})$ в TW .

Определим *поднятие* параметрической сети $\Gamma: G \rightarrow W$ в касательное расслоение как множество кривых $\{(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\}$ по всем ребрам γ сети Γ .

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть в предположениях теоремы 2.1 лагранжиан L является гладким в окрестности поднятия сети (например, это имеет место, если сеть Γ регулярна). Тогда квазирегулярная параметрическая сеть $\Gamma: G \rightarrow W$ с границей β является экстремалью функционала Ψ_L , если и только если каждое ребро $\gamma: [a_\gamma, b_\gamma] \rightarrow W$ сети Γ есть экстремаль функционала ψ_L , т.е. $[L](\gamma, \dot{\gamma}) = 0$, и для каждой подвижной вершины x сети Γ имеет место равенство

$$\sum_{\gamma} p_x(\gamma) = 0,$$

где сумма берется по всем ребрам γ , инцидентным вершине x .

3. Локальная структура экстремальных сетей. В этом пункте мы рассмотрим экстремальные сети-следы и изучим их локальную структуру. Оказывается, нетривиальность локальной структуры связана в первую очередь с негладкостью лагранжиана L , соответствующего классическому вариационному функционалу.

Пусть L – квазирегулярный лагранжиан. Тогда функционал Ψ_L , заданный на параметрических квазирегулярных сетях, порождает функционал на множестве соответствующих сетей-следов, который мы обозначим той же буквой. Отметим, что канонические представители таких сетей являются регулярными сетями. Мы начнем с разбора ситуации, когда лагранжиан L является гладким.

3.1. Гладкие лагранжианы. Пусть лагранжиан L гладкий на всем TW . Предположим также, что L равен нулю на нулевом сечении W_0 . Тогда L , в частности, является квазирегулярным лагранжианом. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Сеть Υ является экстремалью для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$, если и только если выполняются следующие свойства:

- 1) каждое ребро γ сети Υ является экстремалью функционала ψ_L ;
- 2) для любой вершины x сети Υ и любого ребра γ , инцидентного x , имеют место равенства $p(x, 0) = 0$ и $p_x(\gamma) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению сеть Υ является экстремальной сетью, если и только если любой ее представитель Γ является экстремальной сетью для соответствующего функционала на параметрических сетях. В частности, канонический представитель Γ сети Υ удовлетворяет условия теоремы 2.1, поэтому его ребра – экстремали функционала ψ_L , что доказывает необходимость первого условия.

Аналогично, воспользовавшись утверждением 2.1, можно показать, что каждое точечное ребро произвольного представителя Γ сети Υ является экстремалью функционала ψ_L , т.е. удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа.

Далее, пусть γ – произвольное ребро сети Υ , инцидентное вершине x . Рассмотрим представитель Γ сети Υ такой, что

- 1) приведенная компонента вершины x сети Γ состоит из одного ребра γ' ;
- 2) ребро γ' инцидентно вершине x' , имеющей в Γ степень 2 и инцидентной в свою очередь ребру γ .

Построенная параметрическая сеть Γ является экстремальной, поэтому в силу следствия 2.1, примененного к вершине x' , имеет место равенство $p_{x'}(\gamma) \pm p(x', 0) = 0$, где знак выбирается в зависимости от ориентации ребра γ' . Так как эта ориентация может быть выбрана любой и так как $p_{x'}(\gamma) = p_x(\gamma)$, отсюда вытекает, что

$$p_x(\gamma) = p(x', 0) = -p(x', 0) = p(x, 0) = 0,$$

что и требовалось.

Обратное утверждение немедленно вытекает из следствия 2.1, так как все импульсы равны нулю по условию. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть Υ – экстремальная сеть для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Тогда каждое ребро сети Υ есть экстремаль функционала ψ_L по отношению к произвольным деформациям, и каждая точечная кривая, образ которой совпадает с произвольной вершиной сети Υ , также является экстремалью функционала ψ_L по отношению к любым деформациям. Другими словами, каждая экстремальная сеть функционала Ψ_L является тривиально экстремальной.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть Υ – экстремальная сеть для функционала Ψ_L с гладким лагранжианом L , равным нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Пусть x – вершина сети Υ , а $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ – инцидентные x ребра сети Υ . Обозначим через ξ_i , $i = 1, \dots, k$, вектор скорости ребра γ_i в вершине x . Тогда каждая точка (x, ξ_i) , а также точка $(x, 0)$, является стационарной точкой ограничения лагранжиана L на $T_x W$.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть L – гладкий лагранжиан, равный нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Если лагранжиан L , ограниченный на $T_x W$, не имеет стационарных точек вне $0 \in T_x W$ для любого $x \in W$, то каждая экстремальная сеть функционала Ψ_L – точечная.

ПРИМЕР. Пусть $L(x, \xi) = \langle \xi, \xi \rangle$ – лагранжиан, соответствующий функционалу энергии на римановом многообразии W . Из следствия 3.3 вытекает, что в классе следов этот функционал не имеет экстремалей, отличных от точечных.

ПРИМЕР. Пусть $L(x, \xi) = T(\xi) - U(x)$ – лагранжиан, соответствующий функционалу, описывающему движение материальной точки в поле консервативных сил с потенциалом $U(x)$ на римановом многообразии W . Из следствия 3.3 вытекает, что в классе следов этот функционал не имеет экстремалей, отличных от точечных.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть L – гладкий лагранжиан, равный нулю на нулевом сечении $W_0 \subset TW$. Предположим, что решение задачи Коши для уравнения Эйлера–Лагранжа с лагранжианом L локально единственно. Тогда если лагранжиан L , ограниченный на $T_x W$, имеет не более двух стационарных точек для любого $x \in W$, то каждая экстремальная сеть функционала Ψ_L – либо точка, либо кривая (канонический представитель имеет лишь вершины степени 1 и 2).

3.2. Квазирегулярные лагранжианы. Вернемся к случаю квазирегулярных лагранжианов общего вида.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть L – квазирегулярный лагранжиан и Υ – экстремальная сеть для функционала Ψ_L . Тогда $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$ для любой вершины $x \in \Upsilon$ и любого вектора $\zeta \in T_{(x,0)}TW$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно, пусть в некоторой вершине x для некоторого $\zeta_0 \in T_{(x,0)}TW$ имеет место неравенство $\zeta_0(L)(x, 0) < 0$. Рассмотрим представитель Γ сети Υ , прообраз вершины x которого состоит из одного ребра $\gamma: [0, \delta] \rightarrow x$, инцидентного вершине степени 1, которая соответствует концу δ параметризующего отрезка $[0, \delta]$.

Фиксируем в окрестности точки x на многообразии W произвольные локальные координаты x^i . Тем самым, у нас заданы локальные координаты (x^i, ξ^j) на расслоении TW . Пусть в этих координатах вектор ζ_0 имеет вид $\zeta = \alpha^i \partial_{x^i} + \beta^i \partial_{\xi^i}$. Положим $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ и $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$, где $n = \dim W$. Построим деформацию метрической сети Γ , постоянную на всех ее ребрах, кроме ребра γ , а на ребре γ зададим ее так: $\gamma_\varepsilon(t) = x + \varepsilon(\alpha + t\beta)$. Тогда поле $\eta(t)$ этой деформации имеет вид $\eta(t) = \alpha + t\beta$, а соответствующее поле $\zeta(t)$ равно $(\eta(t), \dot{\eta}(t)) = (\alpha + t\beta, \beta)$. В частности, $\zeta(0) = \zeta_0$. Следовательно, выбрав δ достаточно малым и воспользовавшись условием согласованности, получим:

$$\int_0^\delta \zeta(L) dt < 0.$$

Последнее противоречит критичности сети Γ , см. теорему 2.1. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть L – квазирегулярный лагранжиан и Υ – экстремальная сеть для функционала Ψ_L . Тогда в каждой подвижной вершине x сети Υ сумма импульсов $p_x(\gamma)$ по всем инцидентным x ребрам γ из Υ равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это так в силу следствия 2.1, поскольку канонический представитель является регулярной критической сетью.

Обозначим через $V(TW)$ подрасслоение в расслоении $T(TW) \rightarrow TW$, каждый слой которого состоит из всех векторов, касательных к слою касательного расслоения $TW \rightarrow W$. Обозначим через $H(W_0)$ распределение касательных плоскостей к нулевому сечению $W_0 \subset TW$. В каждой точке x из W касательное пространство $T_{(x,0)}TW$ раскладывается в прямую сумму подпространств $V_{(x,0)}TW$ и $H_{(x,0)}W_0$. Плоскости $H_{(x,0)}W_0$ назовем *горизонтальными плоскостями*.

Отметим, что каждый вектор $\zeta \in T_{(x,0)}TW$ может быть однозначно разложен в сумму своих *вертикальной* $\zeta_v \in V_{(x,0)}TW$ и *горизонтальной* $\zeta_h \in H_{(x,0)}W_0$ составляющих.

Будем говорить, что квазирегулярный лагранжиан L *дифференцируем вдоль базы* W , если для каждого $x \in W$ и каждого вектора $\zeta \in T_{(x,0)}TW$ имеет место равенство

$$\zeta(L) = \zeta_v(L) + \zeta_h(L),$$

причем $\zeta_h(L)$ – линейная функция от $\zeta_h \in H_{(x,0)}W_0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть L – квазирегулярный лагранжиан и Υ – экстремальная сеть для функционала Ψ_L . Предположим, что лагранжиан L дифференцируем вдоль базы. Тогда для каждой вершины x сети Υ ограничение функции $\zeta(L)$ на горизонтальную плоскость $H_{(x,0)}W_0$ равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 3.1 имеем $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$ для любого $\zeta \in T_{(x,0)}TW$, в частности, для всех ζ из горизонтальной плоскости $H_{(x,0)}W_0$. Из дифференцируемости лагранжиана L вдоль базы вытекает, что ограничение функции $\zeta(L)(x, 0)$ на плоскость $H_{(x,0)}W_0$ есть линейная функция, которая тем самым равна нулю. Доказательство закончено.

Квазирегулярный лагранжиан L назовем *правильным*, если для каждой точки $x \in W$ функция $f(\zeta) = \zeta(L)(x, 0)$ на $T_{(x,0)}TW$ является гладкой вне $\zeta = 0$.

Вершину x следа Υ (соответствующую вершину канонического представителя для Υ) назовем *свободной*, если импульсы $p_x(\gamma)$ инцидентных ей ребер γ равны нулю.

Напомним, что существует канонический изоморфизм μ между касательными пространствами $T_x W$ к многообразию W и соответствующими вертикальными пространствами $V_{(x,0)}TW$. Этот изоморфизм определяется так. Пусть ξ – произвольный вектор из $T_x W$. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t) = (x, t\xi)$ в TW , выходящую из точки $\gamma(0) = (x, 0)$. Вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ по определению лежит в $V_{(x,0)}TW$. Изоморфизм μ сопоставляет вектору ξ вектор $\dot{\gamma}(0)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Пусть Υ – сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L – правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Пусть x – несвободная подвижная вершина сети Υ . Тогда ограничение функции $f(\zeta) = \zeta(L)(x, 0)$ на $V_{(x,0)}TW \setminus \{0\}$ положительно. При этом $\zeta(L)(x, 0) = \zeta_v(L)(x, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 3.3 следует равенство $\zeta(L)(x, 0) = \zeta_v(L)(x, 0)$. Кроме того, из утверждения 3.1 следует, что $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$. Таким образом, для доказательства утверждения достаточно проверить, что $\zeta(L)(x, 0)$ не может равняться нулю для вертикальных ненулевых векторов $\zeta \in V_{(x,0)}TW$.

Предположим противное, т.е. пусть в некоторой несвободной вершине x сети Υ для некоторого вертикального вектора $\zeta_0 \neq 0$ имеет место равенство $\zeta_0(L)(x, 0) = 0$. Так как вершина x несвободна, существует такое инцидентное x ребро γ , что его импульс $p_x(\gamma)$ отличен от нуля. Рассмотрим представитель Γ сети Υ , для которого прообраз вершины x состоит из одного ребра $\gamma': [-a, a] \rightarrow x$. При этом одна из инцидентных γ' вершин, которую мы обозначим через x' , инцидентна ребру γ , а другая, обозначаемая через x'' , – всем остальным ребрам $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, инцидентным вершине x в Υ .

Положим $\mu^{-1}(\zeta_0) = \nu_0$. Построим деформацию сети Γ' , оставляющую на месте все вершины сети Γ' , кроме вершин ребра γ' .

Предположим сначала, что $p_x(\gamma)(\nu_0) \neq 0$. Если $p_x(\gamma)(\nu_0) > 0$, то ребро γ' выберем так, чтобы точка $-a$ из параметризующего отрезка $[-a, a]$ соответствовала x' . Если же $p_x(\gamma)(\nu_0) < 0$, то будем предполагать, что $-a$ соответствует вершине x'' . Для определенности будем предполагать, что имеет место вторая возможность.

Пусть в окрестности точки $(x, 0)$ касательного расслоения TW заданы локальные координаты (x^i, ξ^j) , порожденные некоторыми координатами x^i на W . Деформацию на ребре γ' зададим так: $\gamma'_\varepsilon(t) = \varepsilon\nu_0(t+a)/(2a)$, где $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Тогда поле деформации $\eta(t)$ ребра γ' имеет вид: $\eta(t) = \nu_0(t+a)/(2a)$, а его поднятие $\zeta(t)$ равно

$$(\eta(t), \dot{\eta}(t)) = \left(\frac{t+a}{2a}\nu_0, \frac{1}{2a}\nu_0 \right).$$

Вертикальная составляющая поля $\zeta(t)$, равная $\dot{\eta}(t)$, имеет вид $\nu_0/(2a)$, откуда $\zeta_v(L)(x, 0) = 0$.

С другой стороны, $\eta(-a) = 0$, а $\eta(a) = \nu_0$, поэтому первая вариация функционала Ψ_L для рассматриваемой деформации сети Γ равна

$$p_x(\gamma)(\nu_0) + \int_{-a}^a \zeta_v(L)(x, 0) dt = p_x(\gamma)(\nu_0) < 0,$$

противоречие. Осталось заметить, что суммарный импульс p ребер, инцидентных вершине x'' сети Γ , противоположен импульсу $p_x(\gamma)$. Поэтому если $p_x(\gamma)(\nu_0)$ положительно, то $p(\nu_0)$ отрицательно, и применимы те же рассуждения.

Пусть теперь $p_x(\gamma)(\nu_0) = 0$. Так как $p_x(\gamma) \neq 0$, существует такое направление $\theta \in T_x W$, что $p_x(\gamma)(\theta) < 0$. Рассмотрим функцию $A(\delta) = (\nu_0 + \delta\theta)(L)(x, 0)$. По определению правильного лагранжиана функция A гладкая при достаточно малых δ . Более того, точка $\delta = 0$ является точкой минимума функции A . Действительно, $A(0) = 0$ в силу выбора ν_0 , а по утверждению 3.1 $A(\delta) \geq 0$. Поэтому

$$A(\delta) = o(\delta), \quad \delta \rightarrow 0,$$

так как 0 – внутренняя точка интервала изменения параметра δ .

Рассмотрим деформацию сети Γ , построенную так же, как в первом случае, но при использовании направления $\nu_0 + \delta\theta$ вместо направления ν_0 . Запишем формулу первой вариации:

$$p_x(\gamma)(\nu_0 + \delta\theta) + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a A(\delta) dt = \delta(p_x(\gamma)(\theta) + o(1)), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Поэтому при достаточно малых $\delta > 0$ первая вариация отрицательна, что противоречит критичности сети Γ . Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть Υ – сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L – правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Пусть x – несвободная подвижная вершина сети Υ . Тогда для некоторого числа $c(x) > 0$, зависящего только от точки x , и любого $\eta \in T_x W$ выполняется неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{L(x, \varepsilon\eta)}{\varepsilon} \geq c(x)\|\eta\|.$$

В частности, ограничение функции L на любое линейное подпространство пространства $V_{(x,0)}TW$ не дифференцируемо в нуле.

Докажем еще одно свойство критических следов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Пусть Υ – сеть-след, являющаяся экстремалью функционала Ψ_L , где L – правильный квазирегулярный лагранжиан, дифференцируемый вдоль базы. Тогда в каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и любого вектора $\eta \in T_x W$ выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем все ребра сети Υ , инцидентные вершине x , на два класса, отнеся к первому ребра $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, а ко второму – все остальные ребра. Рассмотрим представитель Γ сети Υ , для которого прообраз вершины x состоит из одного ребра $\gamma: [-a, a] \rightarrow x$. При этом одна из инцидентных γ вершин, которую мы обозначим через x' , инцидентна ребрам $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, а другая, обозначаемая через x'' , – всем остальным ребрам, инцидентным вершине x в Υ . Без ограничения общности будем считать, что вершине x' соответствует конец a параметризующего отрезка $[-a, a]$.

Фиксируем на W в окрестности точки x произвольные локальные координаты x^i , и без ограничения общности предположим, что в этих координатах $x = 0$.

Рассмотрим деформацию Γ_ε сети Γ , при которой все вершины сети Γ , кроме вершины x' , остаются на месте, а вершина x' равномерно движется со скоростью ν : $x'(\varepsilon) = \varepsilon\nu$. При этом ребро γ деформируется линейно: $t \mapsto \varepsilon\nu(t+a)/(2a)$ для каждого $t \in [-a, a]$. Тогда поле деформации $\eta(t)$ вдоль ребра γ имеет вид $\eta(t) = \nu(t+a)/(2a)$, откуда $\dot{\eta}(t) = \nu/(2a)$. Как всегда, положим $\zeta(t) = (\eta(t), \dot{\eta}(t))$. Запишем условие неотрицательности первой вариации для такой деформации, учитывая, что $\zeta(L) = \zeta_v(L) = \dot{\eta}(L)$ в силу утверждения 3.3. Имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i) \right)(\nu) + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \nu(L)(x, 0) dt = \left(\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i) \right)(\nu) + \nu(L)(x, 0) \geq 0.$$

Доказательство закончено.

Следующая теорема является критерием критичности сети-следа по отношению к функционалу, заданному правильным квазирегулярным лагранжианом, дифференцируемым вдоль базы.

ТЕОРЕМА 3.2. Сеть-след Υ является экстремалью функционала Ψ_L с правильным квазирегулярным лагранжианом L , дифференцируемым вдоль базы, если и только если выполняются следующие условия:

- 1) каждое ребро γ сети Υ является экстремалью функционала ψ_L ;
- 2) в каждой вершине x сети Υ для любых инцидентных x ребер $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ и любого вектора $\eta \in T_x W$ выполнено условие

$$\sum_{i=1}^k p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0;$$

- 3) в каждой подвижной вершине сети Υ сумма импульсов инцидентных этой вершине ребер равна нулю;
- 4) в каждой неподвижной вершине x сети Υ для любого $\zeta \in V_{(x,0)} W$ имеет место неравенство $\zeta(L)(x, 0) \geq 0$; отметим, что если записать ζ в виде $\mu(\eta)$, $\eta \in T_x W$, то условие этого пункта переписется так: $\mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть след Υ экстремален. Тогда канонический представитель сети Υ – регулярная сеть, и по следствию 2.1 все его ребра – экстремали функционала ψ_L . Справедливость остальных свойств сети Υ доказана в утверждениях 3.1–3.5.

Перейдем к доказательству достаточности. Предположим, что сеть Υ удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы. Пусть $\Gamma: G \rightarrow W$ – произвольный представитель сети Υ и $[\Gamma_\varepsilon]$ – некоторая деформация следа Υ . Мы должны показать, что первая вариация функционала Ψ_L для этой деформации неотрицательна. Так как первая вариация функционала Ψ_L раскладывается в сумму выражений, соответствующих приведенным компонентам параметрической сети Γ , достаточно проверить неотрицательность первой вариации в предположении, что деформация Γ_ε оставляет на месте все приведенные компоненты сети Γ , кроме одной, которую мы обозначим через H . Обозначим через x соответствующую H вершину из Υ .

Пусть $\bar{\partial}H = \{x_1, \dots, x_k\}$ – множество вершин сети H , инцидентных регулярным ребрам из Γ . Обозначим через E^i множество невырожденных ребер сети Γ , инцидентных вершине x_i , а через $p_x(E^i)$ – суммарный импульс ребер из E^i в вершине x .

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3.1. Если x – подвижная вершина сети Υ , то для любого $\eta \in T_x W$ имеет место неравенство $\mu(\nu)(L)(x, 0) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, воспользуемся условием 2) для случая, когда множество $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ ребер совпадает с множеством всех ребер из Υ , инцидентных x . Для произвольного вектора η имеем:

$$\sum_{i=1}^{\deg x} p_x(\gamma_i)(\eta) + \mu(\eta)(L)(x, 0) \geq 0.$$

Так как x – подвижная вершина, то сумма в левой части этого неравенства равна нулю в силу свойства 3), откуда и вытекает требуемое. Лемма доказана.

Отметим, что в силу условия 4) и леммы 3.1 достаточно ограничиться случаем, когда сеть H является деревом.

Пусть γ – произвольное ребро сети H . Обозначим через $[a_\gamma, b_\gamma]$ параметризующий это ребро отрезок, и пусть x_a и x_b – вершины ребра γ , соответствующие a_γ и b_γ . Если мы разрежем дерево H по ребру γ , то сеть H распадется на две компоненты H_1 и H_2 , где через H_1 обозначена компонента, содержащая вершину x_a . Разобьем множество невырожденных ребер сети Γ , инцидентных H , на два класса E_1^γ и E_2^γ , отнеся к классу E_i^γ ребра, смежные с компонентой H_i .

Фиксируем в окрестности точки x на многообразии W локальные координаты. Тогда в соответствующих координатах на $T(TW)$ изоморфизм μ задается единичной матрицей. Поэтому ниже мы будем опускать его в формулах.

Обозначим через $\eta_\gamma(t)$, $t \in [a_\gamma, b_\gamma]$, поле деформации Γ_ε на ребре γ , а через $p_x(E_i^\gamma)$ – сумму импульсов ребер из E_i^γ в вершине x . Тогда из условия 2) вытекает, что для каждого $t \in [a_\gamma, b_\gamma]$ имеют место неравенства

$$p_x(E_i^\gamma)(\dot{\eta}_\gamma(t)) + \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Проинтегрировав эти неравенства по t от a_γ до b_γ , получим:

$$p_x(E_i^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) - p_x(E_i^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Предположим, что вершина x сети Υ подвижна. Тогда в силу условия 3) $p_x(E_1^\gamma) + p_x(E_2^\gamma) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) - p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt \\ = p_x(E_2^\gamma)(\eta_\gamma(b_\gamma)) + p_x(E_1^\gamma)(\eta_\gamma(a_\gamma)) + \int_{a_\gamma}^{b_\gamma} \dot{\eta}_\gamma(t)(L)(x, 0) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть y — одна из двух инцидентных γ вершин. Если $y = x_a \in H_1$, то положим $p_y^\gamma = p_x(E_1^\gamma)$, а $\bar{p}_y^\gamma = p_x(E_2^\gamma)$; в противном случае положим $p_y^\gamma = p_x(E_2^\gamma)$, а $\bar{p}_y^\gamma = p_x(E_1^\gamma)$.

Запишем неравенство (2) для каждого ребра γ из H и сложим эти неравенства. Полученная сумма распадается на две: сумма $\sum_2$ интегралов по всем ребрам из H (эта сумма совпадает с интегральной частью формулы первой вариации для деформации Γ_ε) и сумма $\sum_1$ импульсов. Мы покажем, что эта сумма импульсов совпадает с неинтегральной частью формулы первой вариации для деформации Γ_ε , что и завершит разбор случая подвижной вершины x . Для этого сгруппируем слагаемые из суммы $\sum_1$, собрав вместе импульсы, примененные к значению поля деформации η в одной и той же вершине y сети H , и обозначим их сумму через $\sum_y$.

Пусть $y \in \bar{\partial}H$, т.е. $y = x_i$ для подходящего i , и пусть d — это степень вершины y в H . Обозначим через $f_1, \dots, f_d$ инцидентные y ребра из H . Тогда сумма $\sum_y$ имеет вид $\sum_j p_y^{f_j}$, или

$$\sum_y = - \sum_j \bar{p}_y^{f_j}.$$

Осталось заметить, что в правой части стоит выражение

$$- \sum_j \bar{p}_y^{f_j} = - \sum_{j \neq i} p_x(E^j) = p_x(E^i).$$

Последнее равенство имеет место в силу предположения 3). Таким образом, $\sum_{x_i} = p_x(E^i)$.

Пусть теперь $y \notin \bar{\partial}H$. Тогда $\sum_y = \sum_\gamma p_y^\gamma$, где суммирование берется по всем ребрам γ из H , инцидентным y . Так как вершина x подвижная, то $p_y^\gamma + \bar{p}_y^\gamma = 0$ по предположению. Поэтому $\sum_y = - \sum_\gamma \bar{p}_y^\gamma$. Легко видеть, что последняя сумма равна сумме импульсов в вершине x всех ребер из Υ , инцидентных x , и, значит, равна нулю. Тем самым, случай подвижной вершины x полностью разобран.

Пусть теперь x — неподвижная вершина сети Υ . Среди вершин сети H в этом случае необходимо имеются граничные. Напомним, что в граничной вершине x сумма импульсов ребер сети Υ , инцидентных x , не предполагается равной нулю. Обозначим эту сумму через p . Пусть y — неподвижная вершина из H . Как и выше, обозначим через η поле деформации Γ_ε , и пусть η_y — значение поля η в вершине y . Так как y неподвижна, то $\eta_y = 0$.

Запишем формулу первой вариации для деформации Γ_ε и добавим к ней нулевое слагаемое $-p(\eta_y)$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что полученное выражение неотрицательно. Обозначим через p_y сумму импульсов в вершине y невырожденных ребер сети Γ , инцидентных y (если таких ребер нет, то положим $p_y = 0$).

Теперь мы повторим рассуждения, приведенные выше для случая подвижной вершины x , заменив в них $\bar{\partial}H$ на $\bar{\partial}H \cup \{y\}$ и заменив сумму p_y импульсов в вершине y на $p_y - p$. Отметим, что сумма так переопределенных импульсов в вершинах из переопределенного множества $\bar{\partial}H$ теперь равна нулю. Кроме того, неравенства (1) остаются справедливыми, так как значение поля деформации в неподвижной вершине y равно нулю. Таким образом, мы находимся в тех же предположениях, что и в случае подвижной вершины x . Доказательство закончено.

ПРИМЕР. Пусть Ψ_L – функционал длины на римановом многообразии W . Очевидно, мы находимся в условиях теоремы 3.2. Поэтому в качестве следствия получается описание локальной структуры экстремальных следов, см. [3] или [4].

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Сеть-след Υ с границей $\partial\Upsilon$ на римановом многообразии W является экстремалью функционала длины, если и только если выполнены следующие условия:*

- 1) *ребра сети Υ – геодезические;*
- 2) *угол между любыми двумя смежными ребрами больше или равен 120° ;*
- 3) *каждая вершина степени 1 принадлежит $\partial\Upsilon$;*
- 4) *если вершина степени 2 не принадлежит $\partial\Upsilon$, то угол между инцидентными ей ребрами равен 180° .*

Отметим, что первое и второе условия следствия 3.6 вытекают соответственно из первого и второго условий теоремы 3.2. Третье и четвертое условия следствия 3.6 вытекают из третьего условия теоремы 3.2. Четвертое условие теоремы 3.2 для функционала длины выполняется автоматически.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Branching Solutions of One-Dimensional Variational Problems. World Publisher Press, 2000 (to appear).
- [2] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
- [3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // УМН. 1992. Т. 47. № 2 (284). С. 53–115.
- [4] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. N.W., Boca Raton, Florida: CRC Press, 1994.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
15.09.1999