Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Шрамов, О бирациональной жесткости и $\mathbb{Q}$ -факториальности особого двойного накрытия квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 300–311

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:16:38

О бирациональной жесткости и $\mathbb{Q}$ -факториальности особого двойного накрытия квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4

К. А. Шрамов

Доказывается бирациональная жесткость и вычисляется группа бирациональных автоморфизмов трехмерного многообразия Фано X , являющегося двойным накрытием квадрики с ветвлением в квартике, в предположении, что X имеет лишь обыкновенные двойные особенности и $\mathbb{Q}$ -факториально. Также доказывается, что многообразие X является $\mathbb{Q}$ -факториальным, если количество обыкновенных двойных особенностей на X не превосходит 11; приводится пример не- $\mathbb{Q}$ -факториального многообразия такого типа с 12 обыкновенными двойными особенностями.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Одной из центральных задач бирациональной геометрии является задача нахождения всех расслоений Мори (определение см., например, в [1]), бирационально эквивалентных данному расслоению Мори $\mathcal{X} \rightarrow T$, а также примыкающая к ней задача вычисления группы бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(\mathcal{X})$ многообразия $\mathcal{X}$. Особенно интересны случаи, когда таких расслоений мало, например, когда на $\mathcal{X}$ существует только одна – с точностью до некоторой естественной эквивалентности (см. ниже) – структура расслоения Мори.

Говорят, что расслоение Мори $\mathcal{X} \rightarrow T$ *бирационально жестко*, если для любого бирационального отображения $\chi: \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}'$ на другое расслоение Мори $\mathcal{X}' \rightarrow T'$ существует бирациональный автоморфизм $\gamma: \mathcal{X} \dashrightarrow \mathcal{X}$ и бирациональное отображение $\sigma: T \dashrightarrow T'$, включающиеся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\chi \circ \gamma} & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\sigma} & T' \end{array}$$

При этом требуется, чтобы отображение $\chi \circ \gamma$ было изоморфизмом на общем слое. Неформально говоря, это означает, что $\mathcal{X}$ не перестраивается ни в какое принципиально другое расслоение Мори. Бирационально жесткое многообразие Фано X с числом Пикара $\rho(X) = 1$, группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(X)$ которого совпадает со своей подгруппой бирациональных автоморфизмов $\text{Aut}(X)$, называется *бирационально сверхжестким* (см., например, [2] и [3]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 04-01-00613, 05-01-00353).

Примеры бирационально жестких многообразий (имеющих к тому же относительно просто устроенные группы бирациональных автоморфизмов) дают многообразия Фано малых степеней: двойное накрытие $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике, кватрики и двойное накрытие квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4 (см. [4]). Бирациональная сверхжесткость неособой кватрики доказана в [5]; доказательство бирациональной сверхжесткости неособого двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике и бирациональной жесткости неособого двойного накрытия квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4 (а также вычисление его группы бирациональных автоморфизмов) можно найти в [6] и в [7]. Случай кватрики с одной обыкновенной двойной особенностью разбирался в [8] (была доказана бирациональная жесткость этого многообразия и вычислена группа его бирациональных автоморфизмов); случай $\mathbb{Q}$ -факториального двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике с любым числом обыкновенных двойных особенностей – в [9] (доказана бирациональная сверхжесткость); случай $\mathbb{Q}$ -факториальной кватрики с любым числом обыкновенных двойных особенностей – в [10] (доказана бирациональная жесткость и найдены образующие группы бирациональных автоморфизмов). Также доказана бирациональная жесткость и найдена группа бирациональных автоморфизмов для двойного накрытия квадрики с ветвлением в дивизоре степени 4, имеющего одну обыкновенную двойную особенность (см. [11]). Основная цель данной работы – доказать следующее утверждение, продолжающее этот ряд результатов.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – гладкая трехмерная квадратика, $W \subset \mathbb{P}^4$ – трехмерная кватрика, $S = W \cap Q$, X – двойное накрытие Q с ветвлением в S ; X является многообразием Фано степени $\deg X = 4$, причем структура двойного накрытия задается отображением $\varphi|_{-K_X}|: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^4$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально и имеет лишь обыкновенные двойные особенности. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1. *Многообразие X бирационально жестко.*
2. *Пусть $B \subset X$ – прямая (т.е. кривая антиканонической степени 1) такая, что $\varphi|_{-K_X}|(B) \not\subset S$. Тогда с B связана бирациональная инволюция τ_B (явное описание см. в примере 4.2); эти инволюции вместе с подгруппой $\text{Aut}(X)$ порождают группу $\text{Bir}(X)$.*
3. *Инволюции τ_B не связаны никакими соотношениями в группе $\text{Bir}(X)$ (кроме, разумеется, тривиальных соотношений $\tau_B^2 = 1$). Другими словами, имеет место точная последовательность*

$$1 \longrightarrow F(\{\tau_B\}) \longrightarrow \text{Bir}(X) \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow 1,$$

где $F(\{\tau_B\})$ обозначает свободную группу, порожденную инволюциями τ_B для всех прямых B таких, что $\varphi|_{-K_X}|(B) \not\subset S$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Группа $\text{Aut}(X)$ для общего многообразия X содержит лишь один нетривиальный элемент – инволюцию δ двойного накрытия $\varphi|_{-K_X}|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. То, что X имеет лишь обыкновенные двойные особенности, эквивалентно тому, что таковы особенности дивизора S . Можно считать, что W неособа в точках S и касается Q в особых точках S .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Предположение неособости квадрики Q существенно – накрытие конуса над неособой двумерной квадрикой с ветвлением в квартике (не проходящей через вершину), устроено значительно сложнее, даже если дивизор ветвления неособ. Это многообразие не- $\mathbb{Q}$ -факториально. Оно имеет два малых разрешения, каждое из которых накрывает соответствующее малое разрешение квадратичного конуса и является расслоением на поверхности дель Педро степени 2 (эти расслоения происходят из двух пучков плоскостей на квадратичном конусе). С другой стороны, в [12] доказано, что все структуры расслоений Мори на таком многообразии исчерпываются указанными двумя.

Теорема 1.1 доказывается методом максимальных особенностей (см. [3] или [2]). В п. 2 вводятся необходимые понятия и обозначения, после чего с их помощью в пп. 3 и 4 доказываются пункты 1 и 2 теоремы 1.1. Доказательству пункта 3 теоремы 1.1 посвящен п. 5.

Поскольку теорема 1.1 формулируется для $\mathbb{Q}$ -факториальных многообразий, представляется естественным вопрос о том, при каких условиях многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально. В п. 6 будет доказано следующее утверждение (ср. с аналогичным утверждением для случая двойного накрытия $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в секстике из [9] и для случая квартики из [13]; про квартику см. также [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Если число особых точек X не превосходит 11, то X $\mathbb{Q}$ -факториально. С другой стороны, существуют не- $\mathbb{Q}$ -факториальные многообразия такого типа с 12 обыкновенными двойными особенностями.*

Все многообразия предполагаются определенными над полем комплексных чисел. Под степенью всюду подразумевается степень относительно антиканонической линейной системы. На протяжении всей работы мы будем придерживаться обозначений, введенных в этом пункте.

2. Предварительные сведения о методе максимальных особенностей.

Ниже будут упомянуты основные конструкции метода максимальных особенностей, а также введены необходимые для дальнейшего терминология и обозначения (подробности см., например, в [3] или [2]). Все необходимые определения могут быть найдены, например, в [1].

Пусть V – (трехмерное) многообразие Фано с терминальными особенностями и числом Пикара $\rho(V) = 1$, а $V' \rightarrow S'$ – расслоение Мори (в более общей постановке можно предполагать V расслоением Мори над произвольной базой S' , однако для наших целей это не обязательно). Пусть задано рациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$. Существует алгоритм разложения отображения χ в композицию простейших отображений (линков) четырех типов, известный под названием программы Саркисова (см., например, [2] или [1]). Выберем очень обильный дивизор H' на V' и положим $\mathcal{H} = \chi_*^{-1}|H'|$ (заметим, что $\mathcal{H}$ не имеет базисных компонент). Пусть μ – такое число, что $\mathcal{H} \subset |-\mu K_V|$. Неравенство Нётера–Фано (см. [6], [2], [1] или [3]) в этом случае утверждает, что если χ не является изоморфизмом, то пара $(V, (1/\mu)\mathcal{H})$ не канонична. В этом случае можно доказать, что существует экстремальное стягивание $g: \tilde{V} \rightarrow V$ такое, что дискрепантность исключительного дивизора g относительно пары $(V, c\mathcal{H})$, где $c < 1/\mu$ – канонический порог пары (V, H) , равна нулю (все такие дивизоры называют *максимальными особенностями*, а их центры на V – *центрами максимальных особенностей*). Далее, утверждается, что найдется линк типа I или II, начинающийся с этого отображения и уменьшающий

подходящим образом определенную “степень” отображения χ , причем все возникающие многообразия будут иметь лишь терминальные особенности, а все дивизориальные (а также все небирациональные) стягивания будут экстремальными стягиваниями в смысле обычной программы минимальных моделей (подробности см. в [2] или [1]).

Из сказанного можно сделать следующий вывод: для того, чтобы доказать, что многообразие V не перестраивается ни на какое другое расслоение Мори (т.е. бирационально жестко), достаточно доказать, что на V не существует центров максимальных особенностей кроме тех, с которыми связаны бирациональные автоморфизмы V , а чтобы классифицировать все отображения $\chi: V \dashrightarrow V$, достаточно классифицировать все центры максимальных особенностей. В следующих двух пунктах это будет проделано для многообразия X , описанного в п. 1 (при этом всюду будут использоваться обозначения, введенные в этом пункте).

3. Исключение центров максимальных особенностей: точки. Отсутствие точек, являющихся центрами максимальных особенностей, легко следует из достаточно стандартных утверждений.

ТЕОРЕМА 3.1 ($4n^2$ -неравенство, см. [3] или [2]). Пусть $\dim V = 3$, линейная система $|-K_V|$ свободна, $\mathcal{H} \subset |- \mu K_V|$ – линейная система на V , $x \in V$ – гладкая точка, $Z = D_1 D_2$ – пересечение двух общих дивизоров из $\mathcal{H}$. Если x является центром максимальных особенностей (для $\mathcal{H}$), то $\text{mult}_x Z > 4\mu^2$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Гладкая точка не может быть центром максимальных особенностей на многообразии X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если гладкая точка x является центром максимальных особенностей, то для общих $D_1, D_2 \in \mathcal{H}$ имеем

$$4\mu^2 < \text{mult}_x D_1 D_2 \leq K_X D_1 D_2 = \mu^2 \deg X = 4\mu^2,$$

противоречие.

Для исключения особых точек воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3.3 (см., например, [15]). Пусть $\dim V \geq 3$, $x \in V$ – обыкновенная двойная особенность, D – эффективный $(\mathbb{Q})$ -дивизор, причем пара (V, D) не канонична в x . Тогда $\text{mult}_x D > 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Особая точка не может быть центром максимальных особенностей на многообразии X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особая точка $x \in X$ является центром максимальных особенностей; по условию x является обыкновенной двойной точкой. Пусть $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки x с исключительным дивизором E , $L \subset Q$ – общая прямая, проходящая через $\varphi_{|-K_X|}(x)$, $L' = \varphi_{|-K_X|}^{-1}(L)$, $\tilde{L}'$ – собственный прообраз кривой L' при отображении g . Заметим, что L' особа в x и $E\tilde{L}' = 2$. Пусть $D \in (1/\mu)\mathcal{H}$ – общий дивизор, $g^*(\mu D) = g_*^{-1}(\mu D) + \nu E$. По теореме 3.3 выполнено неравенство $\nu > \mu$. Следовательно,

$$2\mu = \mu D L' = g^*(\mu D) \tilde{L}' \geq \nu E \tilde{L}' \geq 2\nu > 2\mu,$$

противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Аналогичные утверждения доказывались в [11], однако ссылки на $4n^2$ -неравенство и теорему 3.3 позволяют сильно упростить доказательства.

4. Исключение центров максимальных особенностей: кривые. Для работы с кривыми на многообразии X нам понадобится следующее утверждение (напомним, что степени всех кривых вычисляются относительно антиканонической линейной системы).

ЛЕММА 4.1 (см., например, [6]). Пусть $Z \subset X$ – кривая, не содержащаяся в дивизоре ветвления, $\deg Z \leq 3$, $\varphi_{|-K_X|}(Z) = Y \subset Q$. Тогда имеет место одна из следующих пяти возможностей.

- 1) $\deg Z = 1$, Y – прямая, касающаяся S в двух (возможно, совпадающих) точках (возможно также, что в одной или в обеих этих точках Y просто проходит через особенности S), $\varphi_{|-K_X|}|_Z: Z \rightarrow Y$ – изоморфизм, $\varphi_{|-K_X|}^{-1}(Y) = Z \cup \delta(Z)$;
- 2а) $\deg Z = 2$, Z – гладкая кривая, $p_a(Z) = 1$, Y – прямая, пересекающая S в четырех различных точках;
- 2б) $\deg Z = 2$, Z – кривая с одной двойной точкой, $p_a(Z) = 1$, Y – прямая, касающаяся S в одной точке;
- 2в) $\deg Z = 2$, Z – гладкая кривая, Y – коника, касающаяся S в четырех точках (некоторые из которых, возможно, совпадают), $\varphi_{|-K_X|}|_Z: Z \rightarrow Y$ – изоморфизм, $\varphi_{|-K_X|}^{-1} = Z \cup \delta(Z)$;
- 3) $\deg Z = 3$, Y – скрученная кубика, $\varphi_{|-K_X|}|_Z: Z \rightarrow Y$ – изоморфизм.

Опишем бирациональную инволюцию, связанную с прямой на X , не содержащейся в дивизоре ветвления.

ПРИМЕР 4.2 (см. [6] или [11]). Пусть $B \subset X$ – прямая, не содержащаяся в дивизоре ветвления (такая, как в п.1) леммы 4.1), $B' = \delta(B)$. Линейная система $|-K_X - B - B'|$ задает рациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, общим слоем которого является эллиптическая кривая – прообраз общей прямой на Q , пересекающей прямую $\varphi_{|-K_X|}(B)$. Это отображение можно регуляризовать, перейдя к многообразию $\tilde{X}$, которое получается из X раздутием сначала кривой B , а затем собственного прообраза кривой B' . При этом прообраз E' кривой B' является сечением эллиптического расслоения $\tilde{\psi}: \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Отражение относительно этого сечения дает бигулярную инволюцию на открытой части $\tilde{X}$, продолжающуюся до бигулярной инволюции $\tilde{X}$ и опускающуюся до бирациональной инволюции X . Действие этой бирациональной инволюции на $\text{Pic}(X)$ вычислено в [6]. Отметим, что в отличие от инволюций особой кваттики (ср. с [10] или [8]) инволюция τ_B строится одним и тем же способом, не зависимо от того, есть ли на B особые точки многообразия X и сколько их.

С точки зрения программы Саркисова описанная выше инволюция является линком типа II, с которого начинается любое разложение отображения χ , если только кривая B является центром максимальных особенностей для $\mathcal{H}$. Теперь мы докажем, что никакие другие кривые, кроме прямых, не содержащихся в дивизоре ветвления, не могут являться центрами максимальных особенностей на X . Так как ни гладкие, ни особые точки X не являются центрами максимальных особенностей (см. следствие 3.2 и следствие 3.4), то согласно сказанному в п. 2 из этого будет следовать, что не существует бирациональных отображений X на другие расслоения Мори и что любое рациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X$ представляется в виде композиции отображений, описанных в примере 4.2.

ЛЕММА 4.3. Пусть $Z \subset X$ – кривая, не содержащаяся в дивизоре ветвления, $\deg Z > 1$. Тогда Z не является центром максимальных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть кратность $\mathcal{H}$ в кривой Z равна ν . Предположим, что $\nu > \mu$. Оценка $\deg Z < \deg X = 4$ в этом случае получается стандартным вычислением. Рассмотрим несколько возможностей для кривой Z , приходя в каждой из них к противоречию (нумерация случаев соответствует нумерации в лемме 4.1). Всюду далее H обозначает элемент антиканонической линейной системы.

Случай 2а). Кривая Z не проходит через особые точки X , и можно воспользоваться, например, следующим вычислением из [6]. Пусть $f: X' \rightarrow X$ – раздутие кривой Z , $E = f^{-1}(Z)$. Тогда

$$0 \leq (\mu f^* H - \nu E)^2 (f^* H - E) = 4\mu^2 - 4\mu\nu,$$

противоречие.

Случай 2б). Кривая Z либо не проходит через особые точки X , либо проходит через одну особую точку, причем эта точка совпадает с x_0 – особой точкой Z . Пусть $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки x_0 , $f: X' \rightarrow \tilde{X}$ – раздутие собственного прообраза $\tilde{Z}$ кривой Z , $E_0 = g^{-1}(x_0)$, $E = f^{-1}(\tilde{Z})$. Определим кратность $\nu_0 = \text{mult}_{x_0} \mathcal{H}$ линейной системы $\mathcal{H}$ в (возможно, особой) точке x_0 соотношением $g^* \mathcal{H} = g_*^{-1} \mathcal{H} + (\text{mult}_{x_0} \mathcal{H}) E_0$ (если точка x_0 – неособая, то это определение дает кратность в обычном смысле). Если x_0 неособа на X , то

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu(fg)^* H - \nu_0 f^* E_0 - \nu E)^2 ((fg)^* H - f^* E_0 - E) \\ &= 4\mu^2 - 4\mu\nu - (\nu_0 - 2\nu)^2 < 0, \end{aligned}$$

противоречие. Если же x_0 – особая точка X , то

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu(fg)^* H - \nu_0 f^* E_0 - \nu E)^2 ((fg)^* H - f^* E_0 - E) \\ &= 4\mu^2 - 4\mu\nu - 2(\nu_0 - \nu)^2 < 0, \end{aligned}$$

противоречие.

Случай 2в). Пусть $Z' = \delta(Z)$ и $\text{mult}_{Z'} \mathcal{H} = \nu'$. Предположим, что Z проходит через k особых точек X , $0 \leq k \leq 4$ (эти точки должны содержаться в $Z \cap Z'$). Пусть U – общий антиканонический дивизор, проходящий через Z (а следовательно, и через Z'), и $\mathcal{H}|_U = \nu Z + \nu' Z' + C$. Тогда на поверхности U выполнены следующие равенства:

$$Z'^2 = -2 + \frac{k}{2}, \quad Z'Z = 4 - \frac{k}{2}.$$

Таким образом, для общего $D \in \mathcal{H}$

$$2\mu = DZ' \geq \left(4 - \frac{k}{2}\right)\nu - \left(2 - \frac{k}{2}\right)\nu',$$

откуда $\nu' > \nu > \mu$. Это противоречит тому, что степень кривой, являющейся центром максимальных особенностей на X , не больше трех.

Случай 3). Пусть Z проходит через k особых точек X , а именно $x_1, \dots, x_k$. Так как Z не содержится в дивизоре ветвления, то $0 \leq k \leq 6$. Пусть $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие

точек $x_1, \dots, x_k$, $f: X' \rightarrow \tilde{X}$ – раздутие собственного прообраза $\tilde{Z}$ кривой Z , $E_i = g^{-1}(x_i)$, $E = f^{-1}(\tilde{Z})$, $\nu_i = \text{mult}_{x_i} \mathcal{H}$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu(fg)^*H - f^* \sum \nu_i E_i - \nu E)^2 (2(fg)^*H - f^* \sum E_i - E) \\ &= 8\mu^2 - 6\mu\nu - 5\nu^2 - 2 \sum \nu_i^2 + 2\nu \sum \nu_i \\ &= (8\mu^2 - 6\mu\nu - 2\nu^2) - \frac{1}{2} \left(4 \sum \nu_i^2 - 4\nu \sum \nu_i + k\nu^2 \right) - \left(3 - \frac{k}{2} \right) \nu^2 \\ &= (8\mu^2 - 6\mu\nu - 2\nu^2) - \frac{1}{2} \sum (2\nu_i - \nu)^2 - \left(3 - \frac{k}{2} \right) \nu^2 < 0, \end{aligned}$$

противоречие.

ЛЕММА 4.4 (см. [6], [9]). Пусть $Z \subset X$ – кривая, содержащаяся в дивизоре ветвления. Тогда Z не является центром максимальных особенностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{mult}_Z \mathcal{H} > \mu$. Пусть p – общая точка кривой Z , $L \subset Q$ – прямая, касающаяся S в точке $\varphi|_{-K_X}(p)$, $\tilde{L} = \varphi|_{-K_X}^{-1}(L)$. Тогда $\tilde{L}$ особа в p , причем из общности p следует, что $\tilde{L} \notin \text{Bs } \mathcal{H}$. Таким образом, для общего $D \in \mathcal{H}$

$$2\mu = \mu \deg \tilde{L} = \tilde{L}D \geq \text{mult}_p \tilde{L} \text{mult}_p \mathcal{H} \geq 2 \text{mult}_Z \mathcal{H} > 2\mu,$$

противоречие.

5. Соотношения. Для доказательства независимости инволюций τ_B в группе $\text{Bir}(X)$ достаточно доказать, что две прямые Z_1 и Z_2 не могут одновременно быть центрами максимальных особенностей. Пусть $\text{mult}_{Z_1} \mathcal{H} = \nu_1$, $\text{mult}_{Z_2} \mathcal{H} = \nu_2$. Предположим, что $\nu_1 > \mu$, $\nu_2 > \mu$, и приведем к противоречию все возникающие случаи (ср. с [6] или [7]).

ЛЕММА 5.1. Прямые Z_1 и Z_2 не могут пересекаться в одной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть x_0 – единственная точка пересечения прямых Z_1 и Z_2 . Предположим также, что на кривых Z_i нет особых точек X , кроме, возможно, x_0 (остальные случаи разбираются аналогично, но требуют более громоздких вычислений). Пусть $g: \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие точки x_0 , $f: X' \rightarrow \tilde{X}$ – раздутие собственных прообразов $\tilde{Z}_1$, $\tilde{Z}_2$ кривых Z_1 и Z_2 , пусть

$$E_0 = g^{-1}(x_0), \quad E_1 = f^{-1}(\tilde{Z}_1), \quad E_2 = f^{-1}(\tilde{Z}_2), \quad \nu_0 = \text{mult}_{x_0} \mathcal{H}.$$

Если x_0 неособа на X , то

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\mu(fg)^*H - \nu_0 f^*E_0 - \nu_1 E_1 - \nu_2 E_2)^2 (2(fg)^*H - f^*E_0 - E_1 - E_2) \\ &= 8\mu^2 - 2\mu(\nu_1 + \nu_2) + 2\nu_0(\nu_1 + \nu_2) - 4(\nu_1^2 + \nu_2^2) - \nu_0^2 \\ &= (8\mu^2 - 2\mu(\nu_1 + \nu_2) - 2(\nu_1^2 + \nu_2^2)) - \frac{1}{2}(\nu_0 - 2\nu_1)^2 - \frac{1}{2}(\nu_0 - 2\nu_2)^2 < 0, \end{aligned}$$

противоречие. Если же x_0 – особая точка X , то

$$0 \leq (\mu(fg)^*H - \nu_0 f^*E_0 - \nu_1 E_1 - \nu_2 E_2)^2 (2(fg)^*H - f^*E_0 - E_1 - E_2)$$

$$\begin{aligned}
&= 8\mu^2 - 2\mu(\nu_1 + \nu_2) + 2\nu_0(\nu_1 + \nu_2) - 3(\nu_1^2 + \nu_2^2) - 2\nu_0^2 \\
&= (8\mu^2 - 2\mu(\nu_1 + \nu_2) - 2(\nu_1^2 + \nu_2^2)) - (\nu_0 - \nu_1)^2 - (\nu_0 - \nu_2)^2 < 0,
\end{aligned}$$

противоречие.

ЛЕММА 5.2. *Прямые Z_1 и Z_2 не могут пересекаться в двух точках (другими словами, $Z_2 \neq \delta(Z_1)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть p – общая точка кривой Z_1 , $L \subset Q$ – общая прямая, проходящая через точку $\varphi_{|-K_X|}(p)$, $\tilde{L} = \varphi_{|-K_X|}^{-1}(L)$. Тогда $L \cap Z_1 = p$, $L \cap Z_2 = \delta(p)$ и $\tilde{L} \not\subset \text{Bs } \mathcal{H}$. Таким образом, для общего $D \in \mathcal{H}$

$$2\mu = \mu \deg \tilde{L} = \tilde{L}D \geq \text{mult}_p \mathcal{H} + \text{mult}_{\delta(p)} \mathcal{H} \geq \nu_1 + \nu_2 > 2\mu,$$

противоречие.

ЛЕММА 5.3. *Пересечение $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Заметим, что на Q существует однопараметрическое семейство прямых, пересекающих $\varphi_{|-K_X|}(Z_1)$ и $\varphi_{|-K_X|}(Z_2)$. Пусть L – общая прямая из этого семейства, $\tilde{L} = \varphi_{|-K_X|}^{-1}(L)$. Тогда $\tilde{L} \not\subset \text{Bs } \mathcal{H}$. Таким образом, для общего $D \in \mathcal{H}$

$$2\mu = \mu \deg \tilde{L} = \tilde{L}D \geq \nu_1 + \nu_2 > 2\mu,$$

противоречие.

6. $\mathbb{Q}$ -ФАКТОРИАЛЬНОСТЬ. В этом пункте доказывается предложение 1.5.

Приведем сначала пример не- $\mathbb{Q}$ -факториального многообразия X .

ПРИМЕР 6.1. Пусть кватрика W задана уравнением

$$f_2(x)^2 + f_1(x)f_3(x) = 0,$$

где f_i – (общая) форма степени i . Тогда прообраз дивизора $(f_1 = 0) \subset Q$ при отображении $\varphi_{|-K_X|}$ распадается в объединение двух дивизоров степени 2, что дает нефакториальность (а следовательно, не- $\mathbb{Q}$ -факториальность, так как для трехмерных многообразий с обыкновенными двойными особенностями $\mathbb{Q}$ -факториальность эквивалентна факториальности) многообразия X .

Многообразие X имеет 12 особых точек – это прообразы 12 точек пересечения гиперповерхностей $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ и Q в $\mathbb{P}^4$.

Заметим, что это многообразие можно описать и другим способом. Рассмотрим конус $K \subset \mathbb{P}^5$ с вершиной P над гладкой трехмерной квадрикой $Q \subset \mathbb{P}^4$ и общую кубик C , проходящую через P . Пусть $X' = K \cap C$, $\pi: X' \dashrightarrow Q$ – проекция X' из точки P . Бирациональное отображение π дает бирациональный морфизм $\tilde{\pi} = \pi \circ \sigma: \tilde{X} \rightarrow Q$, где $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X'$ – раздутие точки P на X' , а он, в свою очередь, раскладывается в композицию $\tilde{X} \xrightarrow{\phi} X \xrightarrow{\varphi} Q$, где ϕ – стягивание прообразов 12 прямых, лежащих на X' и проходящих через точку P , а φ – двойное накрытие. Многообразие X имеет 12 обыкновенных двойных особенностей; так как ϕ – малое стягивание, то X не $\mathbb{Q}$ -факториально.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2 (ср. [10; пример 6] и [16; пример 1.21]). Рассмотрим общее полное пересечение Y квадрики K и кубики C в $\mathbb{P}^5$, имеющее одну обыкновенную двойную особенность P . На Y лежит 12 прямых $l_1, \dots, l_{12}$, проходящих через P , причем все они содержатся в общем касательном пространстве $\tilde{L}$ к K и C в точке P (условие общности позволяет считать K и C гладкими). Проекция $\pi: Y \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ из точки P разлагается в композицию раздутья $\sigma: \tilde{Y} \rightarrow Y$ точки P и стягивания $\phi: \tilde{Y} \rightarrow Z$ образов 12 прямых. Легко видеть, что образ Z многообразия Y при этой проекции является (не- $\mathbb{Q}$ -факториальной) кватрикой, содержащей квадратiku – образ исключительного дивизора раздутья – и имеющей обыкновенные двойные особенности в точках $\pi(l_i)$.

Можно проверить, что кватрика Z содержит две двумерные квадрики и обладает двумя (проективными) малыми разрешениями; одно из них – многообразие $\tilde{Y}$, второе – многообразие $\tilde{Y}'$, также получающееся из некоторого полного пересечения Y' квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$, имеющего одну обыкновенную двойную особенность P' , раздутьем точки P' (см. [10; пример 6] или [16; пример 1.21]). Многообразия Y и Y' в общем случае не изоморфны, но связаны естественным бирациональным отображением $\tilde{\Delta}: Y \dashrightarrow Y'$.

Если кватрика K вырождается в конус над неособой трехмерной квадратикой Q и при этом кубика C проходит через вершину P конуса K , то многообразие Z приобретает структуру двойного накрытия квадрики Q (см. второе описание в примере 6.1); соответствующее многообразие Y обладает бирациональной инволюцией $\tilde{\delta}: Y \dashrightarrow Y$, происходящей из инволюции двойного накрытия $\delta: Z \rightarrow Z$.

Отметим также, что для более простого примера не- $\mathbb{Q}$ -факториальной кватрики с обыкновенными двойными особенностями – общей кватрики, содержащей плоскость – не существует вырождения в не- $\mathbb{Q}$ -факториальное двойное накрытие квадрики с тем же количеством обыкновенных двойных особенностей.

Пусть теперь дивизор S особ в точках $p_1, \dots, p_s$, $s < 12$.

Для многообразий с обыкновенными двойными особенностями $\mathbb{Q}$ -факториальность равносильна факториальности. Для трехмерных многообразий Фано факториальность эквивалентна топологическому условию $\text{rk } H^2(X, \mathbb{Z}) = \text{rk } H_4(X, \mathbb{Z})$ (в нашем случае $\text{rk } H^2(X, \mathbb{Z}) = \rho(X) = 1$). Таким образом, для доказательства $\mathbb{Q}$ -факториальности многообразия X достаточно проверить, что для малого разрешения $h: \tilde{X} \rightarrow X$ выполнено $\rho(X) = s + 1$. Для этого достаточно проверить, что в терминологии работы [17] дефект многообразия X равен нулю (см. доказательство теоремы 2 в [17], а также [9]). Равенство нулю дефекта, в свою очередь, следует из того, что особые точки $p_1, \dots, p_s$ накладывают независимые условия на гиперповерхности степени 3 в $\mathbb{P}^4$, т.е. для любой точки p_i , $1 \leq i \leq s$, найдется кубическая гиперповерхность $D_i \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $p_i \notin D_i$ и $p_j \in D_i$ при $j \neq i$. Оставшаяся часть этого пункта посвящена проверке последнего условия.

Можно считать, что $s = 11$. Нам понадобится следующая теорема, доказанная в [18].

ТЕОРЕМА 6.3. *Точки $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}^n$ накладывают независимые условия на формы степени d , если в каждом линейном подпространстве размерности k лежит не более $dk + 1$ точек из $p_1, \dots, p_s$.*

Оставшаяся часть этого пункта посвящена проверке условий теоремы 6.3 и выводу предложения 1.5 из теоремы 6.3.

ЛЕММА 6.4 (см. [14; следствие 2.5]). Пусть $Y \subset \mathbb{P}^3$ – неприводимая квадрика, $p_1, \dots, p_{10}, q \in Y$ таковы, что никакие 4 из точек $p_1, \dots, p_{10}$ не лежат на прямой, никакие 7 не лежат на конике и никакие 10 не лежат на скрученной кубике. Тогда найдется дивизор $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|_Y$, проходящий через $p_1, \dots, p_{10}$ и не проходящий через q .

ЛЕММА 6.5. Никакие 4 из точек $p_1, \dots, p_{11}$ не лежат на одной прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное – пусть, например, $p_1, \dots, p_4$ лежат на прямой l . Тогда $l \subset Q$ и, так как W касается Q в $p_1, \dots, p_4$, то W касается l в $p_1, \dots, p_4$, и $l \subset W$. Выберем координаты $(x_0 : \dots : x_4)$ так, чтобы Q задавалась уравнением $(1/2)(x_0^2 + \dots + x_4^2) = 0$, а l – уравнениями $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Тогда W задается уравнением

$$x_2 C_2(x) + x_3 C_3(x) + x_4 C_4(x) = 0,$$

где $\deg C_i = 3$. Дивизор S особ в тех точках l , где матрица частных производных

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & C_2 & C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1. В этих точках должны обращаться в нуль миноры $x_0 C_2$ и $x_1 C_2$. Следовательно (так как этих точек не меньше четырех), $C_2(x)$ равно нулю тождественно на l . Аналогично C_3 и C_4 равны нулю на l , и S имеет неизолированные особенности, противоречие.

ЛЕММА 6.6. Никакие 7 из точек $p_1, \dots, p_{11}$ не лежат в одной плоскости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное – пусть, например, $p_1, \dots, p_7$ лежат в плоскости L . Если L пересекает Q по приводимой конике, то среди $p_1, \dots, p_7$ найдутся 4 точки, лежащие на одной прямой, что противоречит лемме 6.5. Таким образом, коника $L \cap Q$ неособа, и можно считать, что Q задана уравнением $(1/2)(x_0^2 + \dots + x_4^2) = 0$, L – уравнениями $x_3 = x_4 = 0$, а W – уравнением

$$x_3 C_3(x) + x_4 C_4(x) + Q(x) \tilde{Q}(x) = 0,$$

где $\deg C_i = 3$, $\deg \tilde{Q} = 2$, $Q(x) = 0$ – уравнение квадрики Q . Дивизор S особ в тех точках $L \cap Q$, где матрица частных производных

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_0 \tilde{Q} & x_1 \tilde{Q} & x_2 \tilde{Q} & C_3 + x_3 \tilde{Q} & C_4 + x_4 \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

имеет ранг 1. В этих точках должны обращаться в нуль миноры $x_0(C_3 + x_3 \tilde{Q}) - x_3 x_0 \tilde{Q} = x_0 C_3$ и $x_1(C_3 + x_3 \tilde{Q}) - x_3 x_1 \tilde{Q} = x_1 C_3$. Следовательно (так как этих точек не меньше семи), C_3 и аналогичным образом C_4 равны нулю на $L \cap Q$, и S имеет неизолированные особенности, противоречие.

ЛЕММА 6.7. Никакие 10 точек из $p_1, \dots, p_{11}$ не лежат на скрученной кубике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное – пусть какие-то 10 точек из $p_1, \dots, p_{11}$ лежат на скрученной кубике Γ . Все скрученные кубики, содержащиеся в Q , при действии группы $\text{Aut}(Q) = \text{PSO}(5)$ разбиваются на две орбиты: одна состоит из тех скрученных кубиков γ , линейная оболочка $L(\gamma)$ которых пересекает Q по неособой квадрике, а другая – из таких, что $L(\gamma)$ пересекает Q по квадратичному конусу.

В частности, можно считать, что в некоторых однородных координатах $(x_0 : \dots : x_4)$ кривая Γ задается уравнениями

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_0 x_2, & x_2^2 &= x_1 x_3, \\ x_0 x_3 &= x_1 x_2, & x_4 &= 0, \end{aligned}$$

а квадрिका Q – либо уравнением $x_0 x_3 - x_1 x_2 + x_4^2 = 0$, либо уравнением $x_1^2 - x_0 x_2 + x_3 x_4 = 0$. Кватрика W задается уравнением вида

$$(x_0 x_3 - x_1 x_2)Q_1 + (x_1^2 - x_0 x_2)Q_2 + (x_2^2 - x_1 x_3)Q_3 + x_4 C = 0,$$

где $\deg Q_i = 2$, $\deg C = 3$. Дивизор S особ в тех точках кривой Γ , в которых матрица M частных производных имеет ранг 1. В каждом из случаев нетрудно проверить, что если M имеет ранг 1 в 10 точках на Γ , то она имеет ранг 1 во всех точках кривой Γ , т.е. S имеет неизолированные особенности, противоречие.

ЛЕММА 6.8. *Предположим, что некоторые 10 из точек $p_1, \dots, p_{11}$ лежат в трехмерном подпространстве. Тогда точки $p_1, \dots, p_{11}$ накладывают независимые условия на гиперповерхности степени 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, \dots, p_{10} \in H \simeq \mathbb{P}^3$. Если $p_{11} \in H$, то применим лемму 6.4 к квадрике $Y = Q \cap H$ (в качестве точки q выбираются различные точки p_i ; условия леммы 6.4 выполняются по леммам 6.5, 6.6 и 6.7), что даст требуемое утверждение. Если $p_{11} \notin H$, то можно выбрать конус K над дивизором $D_{13} \in \mathcal{O}(3)|_Y$, проходящим через $p_1, \dots, p_{10}$ так, чтобы K не проходил через p_{11} . С другой стороны, по лемме 6.4 для любой точки p_i , $1 \leq i \leq 10$, можно выбрать дивизор $D_i \in \mathcal{O}(3)|_Y$, проходящий через все точки из $p_1, \dots, p_{10}$, кроме p_i ; конус с вершиной p_{11} над этим дивизором проходит через все точки из $p_1, \dots, p_{11}$, кроме p_i .

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.5. Проверим, что точки $p_1, \dots, p_{11}$ накладывают независимые условия на формы степени 3 в $\mathbb{P}^4$. В обозначениях теоремы 6.3 имеем $n = 4$, $d = 3$. Никакие 4 точки из $p_1, \dots, p_{11}$ не лежат на прямой по лемме 6.5; никакие 7 не лежат в одной плоскости по лемме 6.6. По лемме 6.8 можно считать, что никакие 10 точек из $p_1, \dots, p_{11}$ не лежат в трехмерном пространстве. Таким образом, условия теоремы 6.3 выполнены, что доказывает предложение 1.5.

Автор выражает благодарность И. А. Чельцову за интерес к работе и многочисленные комментарии, а также С. С. Галкину и В. В. Пржиялковскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.
- [3] A. Pukhlikov, “Essentials of the method of maximal singularities”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 73–100.
- [4] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 59–157.

- [5] В. А. Исковских, Ю. И. Манин, “Трехмерные кваттики и контрпримеры к проблеме Люрота”, *Матем. сб.*, **86**:1 (1971), 140–166.
- [6] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236.
- [7] В. А. Исковских, А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы многомерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем.*, **19**, ВИНТИ, М., 2001, 5–139.
- [8] А. В. Пухликов, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной кваттики с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **135**:4 (1988), 472–496.
- [9] I. Cheltsov, J. Park, *Sextic double solids*, [arXiv:math/0404452v2](https://arxiv.org/abs/math/0404452v2).
- [10] M. Mella, “Birational geometry of quartic 3-folds. II: The importance of being $\mathbb{Q}$ -factorial”, *Math. Ann.*, **330**:1 (2004), 107–126.
- [11] М. М. Гриненко, “Бирациональные автоморфизмы трехмерной двойной квадртки с простейшей особенностью”, *Матем. сб.*, **189**:1 (1998), 101–118.
- [12] М. М. Гриненко, “Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса”, *Матем. сб.*, **189**:7 (1998), 37–52.
- [13] I. Cheltsov, “Nonrational nodal quartic threefolds”, *Pacific J. Math.*, **226**:1 (2006), 65–81.
- [14] К. А. Шрамов, “ $\mathbb{Q}$ -факториальные трехмерные кваттики”, *Матем. сб.*, **198**:8 (2007), 103–114.
- [15] И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160.
- [16] I. Cheltsov, *Points in projective spaces and applications*, [arXiv:math/0511578v8](https://arxiv.org/abs/math/0511578v8).
- [17] S. Cynk, “Defect of a nodal hypersurface”, *Manuscripta Math.*, **104**:3 (2001), 325–331.
- [18] D. Eisenbud, J.-H. Koh, “Remarks on points in a projective space”, *Commutative Algebra* (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **15**, Springer, New York, 1989, 157–172.

К. А. Шрамов

Московский государственный университет им.

М. В. Ломоносова

E-mail: shramov@mccme.ru

Поступило

04.07.2007