Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Константинов, О квазилинейной дифференциальной игре преследования с простой динамикой при наличии фазового ограничения, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 581–590

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:30:30

УДК 517.977.8

О КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПРОСТОЙ ДИНАМИКОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

Р. В. Константинов

В работе рассматривается квазилинейная дифференциальная игра преследования на фиксированном отрезке времени с выпуклым компактным целевым множеством при наличии фазового ограничения – выпуклого замкнутого множества. В работе построено выпуклое компактное множество гарантированной поимки, аналогичное альтернированной сумме Понтрягина, и определена гарантированная кусочно-программная стратегия преследователя, обеспечивающая попадание фазового вектора в конечный момент времени на целевое множество, причем в течении игры значение фазового вектора удовлетворяет фазовому ограничению. При определенных условиях доказана сходимость построенной альтернированной суммы в метрике Хаусдорфа к выпуклому компактному множеству – аналогу альтернированного интеграла Понтрягина для рассматриваемой дифференциальной игры.

Библиография: 5 названий.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая система [1], [2]

$$\frac{dz}{dt} = f(u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, $t \in [0, T]$ – время, u и v – управляющие параметры. Множества $P \subset \mathbb{R}^p$ и $Q \subset \mathbb{R}^q$ являются компактами. Функция $f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна. Задано начальное значение фазового вектора $z(0) = z_0$. *Допустимыми управлениями* игроков будем называть кусочно-непрерывные на $[0, T]$ функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ со значениями в P и Q соответственно. Задано выпуклое компактное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и выпуклое замкнутое множество $R \subset \mathbb{R}^n$.

Первый игрок (преследователь) имеет в своем распоряжении управляющий параметр u . Управляющий параметр v является помехой, его значениями распоряжается второй игрок (убегающий). Целью первого игрока является выполнение включений

$$z(T) \in M, \quad z(t) \in R \quad \text{для всех } t \in [0, T]. \quad (2)$$

Для решения поставленной игровой задачи преследователь использует следующую кусочно-программную стратегию. До начала игры он выбирает разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$, т.е. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = T$. Преследователь не имеет никакой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00645, и Конкурсного центра фундаментального естествознания, грант № 97-0-1.9-26.

информации о реализующихся в ходе игры значениях управляющего параметра убегающего. Параметры игровой задачи (множества P, Q, R, M ; функция f ; момент окончания игры T) известны преследователю. В каждый момент времени $t_k, k \in \overline{0, K-1}$, преследователь строит кусочно-постоянное управление $u_k(\cdot)$ на интервал $[t_k, t_{k+1})$ по информации о реализовавшемся значении $z_k = z(t_k)$.

2. Альтернированные множества. Напомним, что *суммой* и *геометрической разностью* множеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$ называются соответственно множества (см. [3])

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad A * B = \{c \in \mathbb{R}^n : c + B \subset A\}.$$

Выпуклую оболочку множества A (см. [4, с. 9]) обозначим со A . Замыкание множества A (см. [4, с. 11]) обозначим $\text{cl } A$. Полунорму множества A (см. [5, с. 13]) обозначим $\|A\| = \sup\{|a| : a \in A\}$. Шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в нуле обозначим $\mathbb{B}_r = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq r\}$.

Пусть $\mathcal{K}$ – пространство выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ с хаусдорфовой метрикой $h(\cdot, \cdot)$ (см. [5, с. 11]). Пусть многозначное отображение $F: P \rightarrow \mathcal{K}$ таково, что $F(u) = \text{co } f(u, Q)$ для любого $u \in P$. Пусть число $r = \|f(P, Q)\|$. Для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ определяем множества: $M_K(\omega) = M$,

$$M_k(\omega) = \text{co} \bigcup_{u \in P} [(M_{k+1}(\omega) * F(u) \Delta t_k) \cap (R * \mathbb{B}_r \Delta t_k)], \quad (3)$$

где $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, k \in \overline{0, K-1}$.

Множество $M_0(\omega)$ является аналогом альтернированной суммы (см. [3]) для рассматриваемой квазилинейной дифференциальной игры преследования.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого разбиения ω отрезка $[0, T]$ множество $M_0(\omega)$ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$ (быть может, пустым), причем*

$$M_0(\omega) \subset (\|M\| + rT)\mathbb{B}_1. \quad (4)$$

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Многозначное отображение F непрерывно в P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности функции f на компакте $P \times Q$ она является равномерно непрерывной на нем. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $u_1, u_2 \in P$ и $v_1, v_2 \in Q$ таких, что $|u_1 - u_2| < \delta, |v_1 - v_2| < \delta$, выполнено условие

$$f(u_1, v_1) \in f(u_2, v_2) + \mathbb{B}_\varepsilon \subset F(u_2) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Так как $v_1 \in Q$ произвольно, то $f(u_1, Q) \subset F(u_2) + \mathbb{B}_\varepsilon$. Так как правая часть последнего включения выпукла, то

$$F(u_1) \subset F(u_2) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Аналогично находим, что

$$F(u_2) \subset F(u_1) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Следовательно, $h(F(u_1), F(u_2)) \leq \varepsilon$ для всех $u_1, u_2 \in P$ таких, что $|u_1 - u_2| < \delta$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $K \in \mathcal{K}$, число $\delta > 0$. Пусть

$$K_1 = \bigcup_{u \in P} [(K \overset{*}{+} F(u)\delta) \cap (R \overset{*}{+} \mathbb{B}_r\delta)], \quad K_2 = \text{co } K_1.$$

Тогда K_1 и K_2 являются компактными в $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компактность K_1 влечет компактность K_2 в силу теоремы 1.7 [4, с. 16]. Множество K_1 ограничено, так как $K_1 \subset (\|K\| + r\delta)\mathbb{B}_1$. Покажем замкнутость K_1 . Пусть последовательность $\{z_m\} \subset K_1$ такова, что $z_m \rightarrow z_0$ при $m \rightarrow \infty$. Для любого номера m существует $u_m \in P$ такое, что

$$z_m \in (K \overset{*}{+} F(u_m)\delta) \cap (R \overset{*}{+} \mathbb{B}_r\delta).$$

В силу компактности P , переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $u_m \rightarrow u_0$ при $m \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого номера m выполнены включения

$$z_m + F(u_m)\delta \subset K, \quad z_m + \mathbb{B}_r\delta \subset R.$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, пользуясь непрерывностью F в точке $u_0 \in P$, доказанной в лемме 1, и замкнутостью множеств K и R , получаем

$$z_0 + F(u_0)\delta \subset K, \quad z_0 + \mathbb{B}_r\delta \subset R.$$

Таким образом, $z_0 \in K_1$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ — разбиение отрезка $[0, T]$. Выпуклость множеств $M_k(\omega)$ для всех $k \in \overline{0, K}$ следует непосредственно из их определения. Докажем, что для любого $k \in \overline{0, K}$ выполнено включение

$$M_k(\omega) \subset (\|M\| + r(T - t_k))\mathbb{B}_1.$$

Действительно, для $k = K$ включение выполнено, так как $M_K(\omega) = M \subset \|M\|\mathbb{B}_1$. Если оно справедливо для $k + 1$, где $k \in \overline{0, K-1}$, то $\|M_{k+1}(\omega)\| \leq \|M\| + r(T - t_{k+1})$. Следовательно,

$$M_k(\omega) \subset (\|M_{k+1}(\omega)\| + r\Delta t_k)\mathbb{B}_1 \subset (\|M\| + r(T - t_k))\mathbb{B}_1.$$

Таким образом, включение (4) по индукции доказано. Множество $M_K(\omega) = M$ является выпуклым компактом. Если $M_{k+1}(\omega)$, где $k \in \overline{0, K-1}$, является выпуклым компактом, то по лемме 2 таковым является и множество $M_k(\omega)$. Таким образом, по индукции доказано, что множество $M_0(\omega)$ является выпуклым компактом. Теорема доказана.

Определим множество

$$\widetilde{M} = \text{cl} \bigcup_{\omega} M_0(\omega), \quad (5)$$

где объединение берется по всевозможным разбиениям ω отрезка $[0, T]$. В силу теоремы 1 множество $\widetilde{M}$ компактно (быть может, пусто) в $\mathbb{R}^n$. Множество $\widetilde{M}$ является аналогом альтернированного интеграла Понтрягина (см. [3]) для рассматриваемой квазилинейной дифференциальной игры преследования.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $z_0 = z(0)$ является внутренней точкой множества $\widetilde{M}$ (см. [4, с. 11]). Тогда существует кусочно-программная стратегия преследователя, гарантирующая при любом допустимом поведении убегающего успешное окончание игры преследования в момент T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как z_0 является внутренней точкой множества $\widetilde{M}$, то в силу определения $\widetilde{M}$ существует разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ такое, что $z_0 \in M_0(\omega)$.

Предположим, рассуждая по индукции, что для номера $k \in \overline{0, K-1}$ выполнено включение $z_k = z(t_k) \in M_k(\omega)$. Тогда по теореме Каратеодори (см. [4, с. 9]) существует натуральное число $m \leq n+1$, положительные числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$, $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, векторы

$$x_i \in \bigcup_{u \in P} [(M_{k+1}(\omega) \overset{*}{-} F(u)\Delta t_k) \cap (R \overset{*}{-} B_r \Delta t_k)]$$

такие, что выполнено равенство $z_k = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$. Следовательно, для каждого $i \in \overline{1, m}$ существует вектор $u_i \in P$ такой, что

$$x_i + F(u_i)\Delta t_k \subset M_{k+1}(\omega), \quad x_i + \mathbb{B}_r \Delta t_k \subset R.$$

Последнее включение в силу выпуклости множества R означает, что

$$z_k + \mathbb{B}_r \Delta t_k \subset R,$$

т.е. для любых допустимых управлений $u(\cdot), v(\cdot)$, определенных на интервале $[t_k, t_{k+1})$, справедливо включение

$$z(t) = z_k + \int_{t_k}^t f(u(\tau), v(\tau)) d\tau \in R$$

для всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

Определим кусочно-постоянное управление преследователя $u_k(\cdot)$ на $[t_k, t_{k+1})$ следующим образом. Пусть

$$\tau_0 = t_k, \quad \tau_s = t_k + \sum_{i=1}^s \alpha_i \Delta t_k, \quad s \in \overline{1, m}.$$

Тогда определяем $u_k(t) = u_s$ для любого $t \in [\tau_{s-1}, \tau_s)$, где $s \in \overline{1, m}$. Следовательно, для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$, определенного на интервале $[t_k, t_{k+1})$, справедливо включение

$$z_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u_k(t), v(t)) dt \in \sum_{i=1}^m \alpha_i (x_i + F(u_i)\Delta t_k) \subset M_{k+1}(\omega).$$

Таким образом, выбор преследователем управления $u_k(\cdot)$ в момент t_k гарантирует выполнение включений

$$z(t_{k+1}) \in M_{k+1}(\omega), \quad z(t) \in R \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Следовательно, по индукции доказали существование кусочно-программной стратегии преследователя, гарантирующей выполнение включений (2). Теорема доказана.

3. Монотонность альтернированных множеств. При измельчении разбиения ω альтернированная сумма $M_0(\omega)$ не убывает по включению, т.е. справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть ω_1 и ω_2 – два разбиения отрезка $[0, T]$, причем $\omega_1 \prec \omega_2$. Тогда $M_0(\omega_1) \subset M_0(\omega_2)$.

Доказательство теоремы 3 опирается на следующую лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $K_0 \in \mathcal{K}$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 = \delta_1 + \delta_2$. Пусть

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} F(u)\delta_1) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_1)], \\ K_2 &= \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_1 \stackrel{*}{-} F(u)\delta_2) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_2)], \\ K_3 &= \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} F(u)\delta_3) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3)]. \end{aligned}$$

Тогда $K_3 \subset K_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{u} \in P$. Используя свойства выпуклой оболочки и геометрической разности множеств (см. [5, с. 11]), находим

$$\begin{aligned} K_1 \stackrel{*}{-} F(\tilde{u})\delta_2 &\supset \text{co} \bigcup_{u \in P} [\{(K_0 \stackrel{*}{-} F(u)\delta_1) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_1)\} \stackrel{*}{-} F(\tilde{u})\delta_2] \\ &\supset \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} (F(u)\delta_1 + F(\tilde{u})\delta_2)) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3)]. \end{aligned}$$

Так как $R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_2 \supset R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3$, то получаем включение

$$(K_1 \stackrel{*}{-} F(\tilde{u})\delta_2) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_2) \supset \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} (F(u)\delta_1 + F(\tilde{u})\delta_2)) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3)].$$

Тогда в силу произвольности вектора $\tilde{u} \in P$ получаем

$$\begin{aligned} K_2 &= \text{co} \bigcup_{\tilde{u} \in P} [(K_1 \stackrel{*}{-} F(\tilde{u})\delta_2) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_2)] \\ &\supset \text{co} \bigcup_{\tilde{u} \in P} \text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} (F(u)\delta_1 + F(\tilde{u})\delta_2)) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3)]. \end{aligned}$$

Последнее множество содержит в качестве подмножества

$$\text{co} \bigcup_{u \in P} [(K_0 \stackrel{*}{-} (F(u)\delta_1 + F(u)\delta_2)) \cap (R \stackrel{*}{-} \mathbb{B}_r \delta_3)] = K_3,$$

т.е. $K_2 \supset K_3$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть разбиения отрезка $[0, T]$ имеют следующий вид: $\omega_1 = \{t_k\}_{k=0}^K$, $\omega_2 = \{\tau_s\}_{s=0}^S$. Так как выполнено условие $\omega_1 \prec \omega_2$, то существуют номера $\{s_k\}_{k=0}^K$ такие, что $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_K = S$, $\tau_{s_k} = t_k$ для всех $k \in \overline{0, K}$.

По определению $M = M_{s_K}(\omega_2) = M_K(\omega_1)$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $k \in \overline{1, K}$ выполнено включение $M_{s_k}(\omega_2) \supset M_k(\omega_1)$. Тогда в силу леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} M_{s_{k-1}}(\omega_2) &\supset \text{co} \bigcup_{u \in P} [(M_{s_k}(\omega_2) \stackrel{*}{=} F(u) \Delta t_{k-1}) \cap (R \stackrel{*}{=} \mathbb{B}_r \Delta t_{k-1})] \\ &\supset \text{co} \bigcup_{u \in P} [(M_k(\omega_1) \stackrel{*}{=} F(u) \Delta t_{k-1}) \cap (R \stackrel{*}{=} \mathbb{B}_r \Delta t_{k-1})] = M_{k-1}(\omega_1). \end{aligned}$$

Таким образом, по индукции доказано включение $M_0(\omega_2) \supset M_0(\omega_1)$. Теорема доказана.

4. Сходимость альтернированных множеств. Исследуем поведение альтернированной суммы $M_0(\omega)$, если мелкость разбиения $|\omega| \rightarrow 0$. Для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ и вектора $u \in P$ определим для удобства множества

$$\widehat{M}_k(\omega, u) = (M_{k+1}(\omega) \stackrel{*}{=} F(u) \Delta t_k) \cap (R \stackrel{*}{=} \mathbb{B}_r \Delta t_k), \quad k \in \overline{0, K-1}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть существуют $r_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$ выполнено условие

$$\widehat{M}_k(\omega, u) \stackrel{*}{=} \mathbb{B}_{r_0} \neq \emptyset \quad (6)$$

для всех $u \in P$, $k \in \overline{0, K-1}$. Тогда

$$\lim_{|\omega| \rightarrow 0} h(M_0(\omega), \widetilde{M}) = 0. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 4 опирается на следующие леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbb{E}$ – конечномерное нормированное пространство с нормой $|\cdot|_{\mathbb{E}}$. Пусть Ω – подмножество $\mathbb{E}$. Пусть многозначное отображение $G_0: \Omega \times P \rightarrow \mathcal{H}$ является полунепрерывным сверху в точке $\omega_0 \in \Omega$ (см. [5, с. 19]) равномерно по $u \in P$. Пусть многозначные отображения $G_1: \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ и $G_2: \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ являются полунепрерывными снизу в точке $\omega_0 \in \Omega$ (см. [5, с. 19]). Пусть многозначные отображения $H_1: \Omega \times P \rightarrow \mathcal{H}$ и $H_2: \Omega \times P \rightarrow \mathcal{H}$ таковы, что

$$H_1(\omega, u) = G_1(\omega) \stackrel{*}{=} G_0(\omega, u), \quad H_2(\omega, u) = H_1(\omega, u) \cap G_2(\omega)$$

для всех $\omega \in \Omega$, $u \in P$. Пусть существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ такие, что $H_1(\omega_0, u) \subset \mathbb{B}_{r_1}$, $H_2(\omega_0, u) \stackrel{*}{=} \mathbb{B}_{r_2} \neq \emptyset$ для всех $u \in P$. Тогда многозначные отображения H_1 и H_2 являются полунепрерывными снизу в точке $\omega_0 \in \Omega$ равномерно по $u \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства непрерывности геометрической разности (см. [5, с. 31]) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = r_2\varepsilon/(2r_1)$ такое, что для любого $u \in P$ выполняются включения

$$H_1(\omega_0, u) \subset (H_1(\omega_0, u) \dot{-} \mathbb{B}_\delta) + \mathbb{B}_\varepsilon, \quad H_2(\omega_0, u) \subset (H_2(\omega_0, u) \dot{-} \mathbb{B}_\delta) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Далее существует $\eta > 0$ такое, что для любого $\omega \in \Omega$, $|\omega - \omega_0|_{\mathbb{E}} < \eta$, и для любого $u \in P$ выполнены включения

$$G_0(\omega, u) \subset G_0(\omega_0, u) + \mathbb{B}_{\delta/2}, \quad G_1(\omega_0) \subset G_1(\omega) + \mathbb{B}_{\delta/2}, \quad G_2(\omega_0) \subset G_2(\omega) + \mathbb{B}_\delta.$$

Следовательно, получаем

$$H_1(\omega_0, u) \dot{-} \mathbb{B}_\delta = (G_1(\omega_0) \dot{-} \mathbb{B}_{\delta/2}) \dot{-} (G_0(\omega_0, u) + \mathbb{B}_{\delta/2}) \subset G_1(\omega) \dot{-} G_0(\omega, u) = H_1(\omega, u).$$

Отсюда находим, что

$$H_2(\omega_0, u) \dot{-} \mathbb{B}_\delta = (H_1(\omega_0, u) \dot{-} \mathbb{B}_\delta) \cap (G_2(\omega_0) \dot{-} \mathbb{B}_\delta) \subset H_1(\omega, u) \cap G_2(\omega) = H_2(\omega, u).$$

Окончательно получаем, что

$$H_1(\omega_0, u) \subset H_1(\omega, u) + \mathbb{B}_\varepsilon, \quad H_2(\omega_0, u) \subset H_2(\omega, u) + \mathbb{B}_\varepsilon$$

для любого $\omega \in \Omega$, $|\omega - \omega_0|_{\mathbb{E}} < \eta$, и для любого $u \in P$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbb{E}$ – конечномерное нормированное пространство с нормой $|\cdot|_{\mathbb{E}}$. Пусть Ω – подмножество $\mathbb{E}$. Пусть многозначное отображение $G: \Omega \times P \rightarrow \mathcal{X}$ является полунепрерывным снизу в точке $\omega_0 \in \Omega$ равномерно по $u \in P$. Пусть многозначное отображение $H: \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ таково, что

$$H(\omega) = \text{co} \bigcup_{u \in P} G(\omega, u)$$

для любого $\omega \in \Omega$. Тогда H полунепрерывно снизу в точке $\omega_0 \in \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как G является полунепрерывным снизу в точке $\omega_0 \in \Omega$ равномерно по $u \in P$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\omega \in \Omega$, $|\omega - \omega_0|_{\mathbb{E}} < \eta$, и для любого $u \in P$ выполнено включение

$$G(\omega_0, u) \subset G(\omega, u) + \mathbb{B}_\varepsilon \subset H(\omega) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Следовательно, в силу произвольности $u \in P$ и выпуклости значений H получаем

$$H(\omega_0) \subset H(\omega) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть натуральное $K > T/\delta_0$. Пусть Ω_K – множество, состоящее из всех разбиений $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$; при этом Ω_K рассматривается как подмножество нормированного пространства $\mathbb{R}^{K+1}$. Тогда многозначное отображение $M_0: \Omega_K \rightarrow \mathcal{X}$ является полунепрерывным снизу в Ω_K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 для любого $\omega \in \Omega_K$ и для любого $k \in \overline{0, K}$ выполнено включение

$$M_k(\omega) \subset (\|M\| + rT)\mathbb{B}_1.$$

Поэтому существует достаточно большое $\rho > 0$ такое, что замена множества R на множество $R \cap \mathbb{B}_\rho$ не изменит значений $M_k(\omega)$ для любого $\omega \in \Omega_K$. Поэтому далее без ограничения общности будем считать, что R является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$.

Многозначное отображение $\omega \mapsto M_K(\omega) = M$ является полунепрерывным снизу на Ω_K . Предположим, рассуждая по индукции, что для $k \in \overline{0, K-1}$ многозначное отображение $\omega \mapsto M_{k+1}(\omega)$ является полунепрерывным снизу на Ω_K . Многозначное отображение $\omega \mapsto R * \mathbb{B}_r \Delta t_k$ является полунепрерывным снизу на Ω_K в силу условия (6) и следствия 3 [5, с. 34]. Многозначное отображение $(\omega, u) \mapsto F(u) \Delta t_k$ является полунепрерывным снизу в Ω_K равномерно по $u \in P$, так как $F(u) \subset \mathbb{B}_r$ для всех $u \in P$. Следовательно, многозначное отображение $(\omega, u) \mapsto \bar{M}_k(\omega, u)$ является полунепрерывным снизу в Ω_K равномерно по $u \in P$ в силу леммы 4 (условия леммы выполнены для $r_1 = \|M\| + rT, r_2 = r_0$). Тогда в силу леммы 5 многозначное отображение $\omega \mapsto M_k(\omega)$ является полунепрерывным снизу в Ω_K . Следовательно, по индукции доказана полунепрерывность многозначного отображения $\omega \mapsto M_0(\omega)$ в Ω_K . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение ω_ε отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega_\varepsilon| < \delta_0$ такое, что

$$\widetilde{M} \subset M_0(\omega_\varepsilon) + \mathbb{B}_\varepsilon. \quad (8)$$

Предположим, рассуждая от противного, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого разбиения ω отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$ существует вектор $z(\omega) \in \widetilde{M}$ такой, что $z(\omega) \notin M_0(\omega) + \mathbb{B}_{\varepsilon_0}$. Рассмотрим последовательность разбиений $\omega_m, |\omega_m| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Пусть $z_m = z(\omega_m)$. Так как $\widetilde{M}$ – компакт, то, переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $z_m \rightarrow \tilde{z} \in \widetilde{M}$ при $m \rightarrow \infty$. По определению $\widetilde{M}$ существует разбиение $\tilde{\omega} \in \Omega_{\bar{K}}$ такое, что $\tilde{z} \in M_0(\tilde{\omega}) + (1/4)\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$. По теореме 3 можно считать, что $|\tilde{\omega}| < \delta_0, \bar{K} > T/\delta_0$. Так как многозначное отображение $M_0: \Omega_{\bar{K}} \rightarrow \mathcal{H}$ полунепрерывно снизу в $\tilde{\omega}$ по лемме 6 и выполнено условие $|\omega_m| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то существует номер $\tilde{m}$ такой, что для всех $m > \tilde{m}$ найдется $\tilde{\omega}_m \in \Omega_{\bar{K}}, \tilde{\omega}_m \prec \omega_m$, для которого выполнено включение

$$M_0(\tilde{\omega}) \subset M_0(\tilde{\omega}_m) + \frac{1}{4}\mathbb{B}_{\varepsilon_0} \subset M_0(\omega_m) + \frac{1}{4}\mathbb{B}_{\varepsilon_0}.$$

Последнее включение справедливо в силу теоремы 3. Таким образом, $\tilde{z} \in M_0(\omega_m) + (1/2)\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$ для всех $m > \tilde{m}$. С другой стороны, $z_m \notin M_0(\omega_m) + \mathbb{B}_{\varepsilon_0}$ для всех m . Так как $z_m \rightarrow \tilde{z}$ при $m \rightarrow \infty$, то существует номер $\hat{m}$ такой, что для всех $m > \hat{m}$ выполнено включение $\tilde{z} \in z_m + (1/2)\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$. Следовательно, $\tilde{z} \notin M_0(\omega_m) + (1/2)\mathbb{B}_{\varepsilon_0}$ для всех $m > \hat{m}$. Получили противоречие.

Итак, в нашем распоряжении для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\omega_\varepsilon = \{t_{k,\varepsilon}\}_{k=0}^{K_\varepsilon}$ мелкости $|\omega_\varepsilon| < \delta_0$ такое, что выполнено включение (8). Определим число

$$\delta(\varepsilon) = \min\{t_{k+1,\varepsilon} - t_{k,\varepsilon} : k \in \overline{0, K_\varepsilon - 1}\}.$$

Так как многозначное отображение $M_0: \Omega_{K_\varepsilon} \rightarrow \mathcal{H}$ является полунепрерывным снизу в ω_ε по лемме 6, то существует $\gamma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K_\varepsilon} \in \Omega_{K_\varepsilon}$ такого, что $|t_k - t_{k,\varepsilon}| < \gamma(\varepsilon)$ для всех $k \in \overline{0, K_\varepsilon}$, выполнено включение

$$M_0(\omega_\varepsilon) \subset M_0(\omega) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Рассмотрим произвольное разбиение ω отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \min\{\delta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)\}$. Тогда существует разбиение $\tilde{\omega} = \{\tilde{t}_k\}_{k=0}^{K_\varepsilon} \in \Omega_{K_\varepsilon}$, причем $\tilde{\omega} \prec \omega$ и $|\tilde{t}_k - t_{k,\varepsilon}| < \gamma(\varepsilon)$ для всех $k \in \overline{0, K_\varepsilon}$. Следовательно, получаем

$$M_0(\omega_\varepsilon) \subset M_0(\tilde{\omega}) + \mathbb{B}_\varepsilon \subset M_0(\omega) + \mathbb{B}_\varepsilon.$$

Последнее включение справедливо в силу теоремы 3. Таким образом, справедливы включения

$$M_0(\omega) \subset \widehat{M} \subset M_0(\omega) + 2\mathbb{B}_\varepsilon,$$

т.е. справедливо неравенство $h(M_0(\omega), \widehat{M}) \leq 2\varepsilon$ для любого разбиения ω отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \min\{\delta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)\}$. Теорема доказана.

Заметим, что соотношение (6) в условии теоремы 4 выполнено для всех достаточно мелких разбиений отрезка $[0, T]$, если оно выполняется хотя бы для одного разбиения этого отрезка. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть существует $r_0 > 0$ и разбиение $\omega_0 = \{t_k^{(0)}\}_{k=0}^{K_0}$ отрезка $[0, T]$ такие, что

$$\widehat{M}_k(\omega_0, u) \stackrel{*}{\neq} \mathbb{B}_{2r_0} \neq \emptyset \quad (9)$$

для всех $u \in P$, $k \in \overline{0, K_0 - 1}$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K_0}$ отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$ и любого $u \in P$ выполнено (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множество

$$\Omega_0 = \{\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K_0} : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{K_0} = T\}.$$

Рассматриваем Ω_0 как подмножество нормированного пространства $\mathbb{R}^{K_0+1}$. Так же, как и в доказательстве леммы 6, без ограничения общности считаем, что R является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что для любого $k \in \overline{0, K_0 - 1}$ многозначные отображения $\widehat{M}_k : \Omega_0 \times P \rightarrow \mathcal{H}$ являются полунепрерывными снизу в точке ω_0 равномерно по $u \in P$. Предположим, рассуждая по индукции, что многозначное отображение $M_{k+1} : \Omega_0 \rightarrow \mathcal{H}$ полунепрерывно снизу в точке ω_0 (для $k = K_0 - 1$ это верно, так как по определению $M_{K_0}(\omega) = M$ для любого $\omega \in \Omega_0$). Тогда в силу леммы 4 многозначное отображение $\widehat{M}_k$ полунепрерывно снизу в точке ω_0 равномерно по $u \in P$. Далее, в силу леммы 5 многозначное отображение M_k полунепрерывно снизу в точке ω_0 . Таким образом, по индукции доказана полунепрерывность снизу многозначных отображений $\widehat{M}_k$ в точке ω_0 равномерно по $u \in P$. Следовательно, существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любого разбиения $\omega_1 = \{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{K_0}$ такого, что $|t_k^{(1)} - t_k^{(0)}| < \gamma_0$, где $k \in \overline{0, K_0}$, и любого вектора $u \in P$ выполнено включение

$$\widehat{M}_k(\omega_0, u) \subset \widehat{M}_k(\omega_1, u) + \mathbb{B}_{r_0} \quad \forall k \in \overline{0, K_0 - 1}.$$

В силу соотношения (9) получаем

$$\widehat{M}_k(\omega_1, u) \stackrel{*}{\neq} \mathbb{B}_{r_0} \neq \emptyset \quad \forall k \in \overline{0, K_0 - 1}. \quad (10)$$

Пусть $\eta_0 = \min\{t_k^{(0)} - t_{k-1}^{(0)} : k \in \overline{1, K_0}\}$. Определим $\delta_0 = \min\{\gamma_0, \eta_0\}$. Рассмотрим произвольное разбиение $\omega = \{t_k\}_{k=0}^{K_0}$ отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$. Тогда существует разбиение $\omega_1 = \{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{K_0}$ такое, что $\omega_1 \prec \omega$ и $|t_k^{(1)} - t_k^{(0)}| < \gamma_0$ для всех $k \in \overline{0, K_0}$.

В силу (10), для любого $k \in \overline{0, K_0 - 1}$ и любого $u \in P$ существует вектор $a_k(u) \in \mathbb{R}^n$ такой, что справедливо включение

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} \subset \widehat{M}_k(\omega_1, u). \quad (11)$$

В силу соотношения $\omega_1 \prec \omega$ существуют номера $\{s_k\}_{k=0}^{K_0}$ такие, что $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{K_0} = K$ и $t_{s_k} = t_k^{(1)}$ для всех $k \in \overline{0, K_0}$. В силу (11) для любого $k \in \overline{0, K_0 - 1}$ и произвольного вектора $u \in P$ получаем

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_{s_{k+1}} - t_{s_k})F(u) \subset M_{s_{k+1}}(\omega), \quad (12)$$

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} \subset R^*(t_{s_{k+1}} - t_{s_k})\mathbb{B}_r. \quad (13)$$

Включение (12) имеет место также в силу включения $M_{k+1}(\omega_1) \subset M_{s_{k+1}}(\omega)$, которое справедливо по теореме 3. В силу (13) для любого $j \in \overline{s_k, s_{k+1} - 1}$ и произвольного $u \in P$ выполнено включение

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_j - t_{s_k})F(u) \subset R^*(t_{s_{k+1}} - t_j)\mathbb{B}_r. \quad (14)$$

Зафиксируем номер $i \in \overline{s_k, s_{k+1} - 1}$. Для завершения доказательства теоремы требуется для любого $u \in P$ доказать неравенство

$$\widehat{M}_i(\omega, u) \stackrel{*}{\neq} \mathbb{B}_{r_0} \neq \emptyset. \quad (15)$$

Докажем его, рассуждая по индукции. Пусть для некоторого номера $j \in \overline{i + 1, s_{k+1}}$ и для любого $u \in P$ справедливо включение

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_j - t_{s_k})F(u) \subset M_j(\omega).$$

Для $j = s_{k+1}$ это включение имеет место в силу (12). Следовательно, выполнены включения

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_{j-1} - t_{s_k})F(u) \subset M_j(\omega) \stackrel{*}{\neq} F(u)\Delta t_{j-1},$$

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_{j-1} - t_{s_k})F(u) \subset R^*\mathbb{B}_r\Delta t_{j-1}.$$

Последнее включение выполнено в силу (14) и соотношения $(t_{s_{k+1}} - t_{j-1})\mathbb{B}_r \supset \mathbb{B}_r\Delta t_{j-1}$. Следовательно, для любого $u \in P$ получаем

$$a_k(u) + \mathbb{B}_{r_0} + (t_{j-1} - t_{s_k})F(u) \subset \widehat{M}_{j-1}(\omega, u) \subset M_{j-1}(\omega).$$

Таким образом,

$$\widehat{M}_{j-1}(\omega, u) \stackrel{*}{\neq} \mathbb{B}_{r_0} \neq \emptyset,$$

т.е. по индукции соотношение (15) установлено. Следовательно, для любого разбиения $\omega = \{t_k\}_{k=0}^K$ отрезка $[0, T]$ мелкости $|\omega| < \delta_0$ и любого вектора $u \in P$ выполнено (6). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Айзекс Р Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
- [3] Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 3. С. 307-330.
- [4] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.
- [5] Половинкин Е. С. Элементы теории многозначных отображений. Учебное пособие. М.: МФТИ, 1982.