Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Тухтасинов, М. Ш. Маматов, О задачах преследования в управляемых распределенных системах, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 273–280

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:05:41

О задачах преследования в управляемых распределенных системах

М. Тухтасинов, М. Ш. Маматов

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о переводе системы из одного состояния в другое при наличии игрока, препятствующего этому переходу. Динамика системы описывается уравнениями в частных производных, в правой части которых содержатся управления игроков в аддитивной форме. В подобной постановке задача решалась в ряде работ, однако она не была рассмотрена в случае, когда на управления игроков накладывались различные ограничения.

В отличие от некоторых других работ, в данной работе рассматриваются игры во всей шкале пространств H_r , $r \geq 0$. Предложен новый подход завершения преследования при различных ограничениях на управления игроков.

Библиография: 7 названий.

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о переводе системы из одного состояния в другое при наличии игрока, препятствующего этому переходу. Динамика системы описывается уравнениями в частных производных, в правой части которых содержатся управления игроков в аддитивной форме. В подобной постановке задача о переводе изучалась в работах [1]–[4], однако она не была рассмотрена в случае, когда на управления игроков накладывались различные ограничения. В этом смысле данная заметка дополняет [1]–[4].

В отличие от [4], в данной работе рассматриваются игры во всей шкале пространств H_r [5], [6], где параметр $r \geq 0$. Предложен другой подход завершения преследования при различных ограничениях на управления игроков.

1. Введение. Постановка задачи, формулировки предположений и основных результатов. Пусть дифференциальный оператор A имеет вид

$$Az = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega,$$

где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой границей; $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$, $x \in \Omega$, – набор функций, удовлетворяющих условиям $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \geq \gamma^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \Omega,$$

$\gamma \neq 0$ – константа. Областью определения оператора A является $\dot{C}^2(\Omega)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций). Производится

расширение области определения оператора (1), тем самым, и самого оператора A до самосопряженного [5], [6], относительно которого оставим прежнее обозначение. Доказывается [5], [6], что таким путем полученный оператор имеет дискретный спектр, т.е. собственные значения $\lambda_i > 0$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \infty$, и собственные функции φ_i , образуют полную систему в пространстве $L_2(\Omega)$.

Используя эти данные, в [6] строится пространство

$$H_r = \left\{ f : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty \right\},$$

где $r \geq 0$ и

$$\|f\|_r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2}.$$

Через $C(0, T; H_r)$ (соответственно $L_2(0, T; H_r)$) обозначается пространство, состоящее из непрерывных (соответственно измеримых) функций, определенных на $[0, T]$ со значениями в H_r , где T – некоторое положительное число.

Рассмотрим следующую дифференциальную игру:

$$\dot{z}(t) + Az(t) = -u(t) + v(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

где $u(\cdot), v(\cdot) \in L_2(0, T; H_r(\Omega))$,

$$z(0) = z^0 \in H_{r+1}(\Omega). \quad (2)$$

Функции $u(t), v(t)$, $0 \leq t \leq T$, называются *управлениями* первого (преследующего) и второго (убегающего) игроков соответственно. Они называются *допустимыми*, если удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\|u(t)\| \leq \rho, \quad \|v(t)\| \leq \sigma, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\| \leq \sigma, \quad (4)$$

где ρ, σ – неотрицательные постоянные, а $\|\cdot\|$ – норма в пространстве $H_r(\Omega)$.

Заметим, что

$$\|f\| = \|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 \right)^{1/2},$$

$H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и $H_r(\Omega) \subset H_s(\Omega)$ при $s \leq r$.

В [6] доказаны существование и единственность решения задачи (1), (2) в пространстве $C(0, T; H_{r+1}(\Omega))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что в игре (1)–(3) (или (1), (2), (4)) *возможен перевод точки z из начальной точки z^0 в конечную точку z^1* , если существует число $T = T(z^0, z^1) \geq 0$ такое, что для любого допустимого управления $v(t)$, $0 \leq t \leq T$, убегающего игрока, зная в каждый момент времени $t \in [0, T]$ уравнение (1) и значение $v(t)$ в игре (1)–(3) (соответственно (1), (2), (4)), можно выбрать значение $u(t)$

таким образом, что

- 1) $u(\cdot)$ – допустимое управление преследующего игрока;
- 2) $z(T) = z^1$, где $z(t)$, $0 \leq t \leq T$, – решение соответствующей задачи (1), (2) при управлениях $u(t)$, $v(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Задача преследования состоит в нахождении множества пар начальных точек z^0 и конечных точек z^1 таких, что для пары (z^0, z^1) , принадлежащей этому множеству, возможен перевод точки z из z^0 в z^1 .

ТЕОРЕМА 1. Если $\rho > \sigma$, z^0 – произвольная точка из $H_{r+1}(\Omega)$, точка z^1 удовлетворяет неравенству

$$\|z^1\|_{H_{r+2}(\Omega)} < \rho - \sigma, \quad (5)$$

то в игре (1)–(3) возможен перевод точки z из z^0 в z^1 .

ТЕОРЕМА 2. Если $\rho > \sigma$ и точки $z^0 \in H_{r+1}(\Omega)$, $z^1 \in H_{r+2}(\Omega)$ при $t = T$, $\lambda = \lambda_1$ удовлетворяют неравенству

$$\|z^0\|^2 \varphi(\lambda, t) + \|z^1\|^2 \psi(\lambda, t) \leq (\rho - \sigma)^2, \quad (6)$$

то в игре (1), (2), (4) возможен перевод точки z из начальной точки z^0 в конечную точку z^1 . Здесь через $\varphi(\lambda, t)$, $\psi(\lambda, t)$ обозначены функции

$$\varphi(\lambda, t) = \frac{\lambda t(1 + e^{\lambda t})}{(e^{\lambda t} - 1)^2}, \quad \psi(\lambda, t) = \frac{t(e^{\lambda t} + e^{2\lambda t})}{(e^{\lambda t} - 1)^2}, \quad \lambda \geq \lambda_1, \quad t > 0. \quad (7)$$

2. Доказательства теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая условие $\rho > \sigma$, управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, преследующего игрока представим в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где $w(\cdot) (\in L_2(0, T; H_r(\Omega)))$ – определяемая ниже функция, удовлетворяющая неравенству

$$\|w(t)\| \leq \rho - \sigma, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Представим искомое решение $z(t)$ и функцию $w(t)$, $0 \leq t \leq T$, в виде рядов Фурье [6], [7]

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \varphi_k, \quad w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \varphi_k, \quad (10)$$

где $z_k(\cdot)$, $w_k(\cdot) \in L_2(0, T)$.

Подставив разложения (10) в уравнение (1), учитывая равенство (8) и приравнявая соответствующие коэффициенты системы $\{\varphi_k\}$, получим систему, состоящую из бесконечного числа дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = -w_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

с начальными условиями

$$z_k(0) = z_k^0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $z_k^0 = (z^0, \varphi_k)$ – коэффициент Фурье функции z^0 по системе $\{\varphi_k\}$.

Интегрируя каждое из уравнений (11), с учетом (12) получим

$$z_k(t) = e^{-\lambda_k t} \left(z_k^0 - \int_0^t e^{\lambda_k \tau} w_k(\tau) d\tau \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

При $t = T$ положим

$$z_k(t) = z_k^1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $z_k^1 = (z^1, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, – коэффициенты Фурье функции z^1 по системе $\{\varphi_k\}$. Тогда из (13) получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций $w_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\int_0^T e^{\lambda_k \tau} w_k(\tau) d\tau = z_k^0 - e^{\lambda_k T} z_k^1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решениями уравнений (14) являются функции

$$w_k(\tau) = \frac{\lambda_k(z_k^0 - e^{\lambda_k T} z_k^1)}{e^{\lambda_k T} - 1}, \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

или

$$w_k(\tau) = \lambda_k \frac{e^{-\lambda_k T} z_k^0 - z_k^1}{1 - e^{-\lambda_k T}}, \quad 0 \leq \tau \leq T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Теперь оценим квадрат выражения (15) следующим образом:

$$|w_k(\tau)|^2 \leq \lambda_k^2 \frac{e^{-2\lambda_k T} |z_k^0|^2 + 2e^{-\lambda_k T} |z_k^0| |z_k^1| + |z_k^1|^2}{(1 - e^{-\lambda_k T})^2}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или

$$|w_k(\tau)|^2 \leq \frac{(3/(2T))\lambda_k |z_k^0|^2 + (1/(\lambda_1 T) + 1)\lambda_k^2 |z_k^1|^2}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Предварительно умножим последнее неравенство на λ_k^r , затем суммируем по k . Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r |w_k(\tau)|^2 \leq \frac{(3/(2T))\|z^0\|^2 + (1 + 1/(\lambda_1 T))\|z^1\|^2}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^2}. \quad (16)$$

Но

$$\|w(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r |w_k(t)|^2, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Теперь для обеспечения неравенства (9) воспользуемся условием (5) теоремы. Из (16) видно, что существует $T = T(z^0, z^1)$ такое, что при $T = T(z^0, z^1)$ будет выполнено неравенство

$$\frac{(3/(2T))\|z^0\|^2 + (1 + 1/(\lambda_1 T))\|z^1\|^2}{(1 - e^{-\lambda_1 T})^2} \leq (\rho - \sigma)^2,$$

т.е. $\|w(t)\| \leq \rho - \sigma$. Отсюда и из неравенств

$$\|u(t)\| \leq \|v(t)\| + \|w(t)\| \leq \sigma + \rho - \sigma = \rho, \quad 0 \leq t \leq T,$$

следует допустимость управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, преследующего игрока, построенного по формуле (8).

Таким образом, преследователь с помощью допустимого управления вида (8), где

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \varphi_k, \quad 0 \leq t \leq T(z^0, z^1),$$

за время $T(z^0, z^1)$ обеспечивает выполнение равенств (14), которые означают, что $z(T(z^0, z^1)) = z^1$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что гарантированным временем $T(z^0, z^1)$ перевода точки z из состояния z^0 в состояние z^1 является число

$$T = \frac{1}{\lambda_1(s-1)},$$

где $s(>1)$ – первый корень уравнения

$$\left(\|z^1\|^2 + \frac{3}{2} \lambda_1 \|z^0\|^2 \right) s^3 - \frac{3}{2} \lambda_1 \|z^0\|^2 s^2 = (\rho - \sigma)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сначала заметим, что при $t = T$ функции $\varphi(\lambda, t)$, $\psi(\lambda, t)$ относительно переменного λ ($\geq \lambda_1 > 0$) убывающие. Следовательно,

$$\max_{\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \dots} \varphi(\lambda, T) = \varphi(\lambda_1, T), \quad \max_{\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \dots} \psi(\lambda, T) = \psi(\lambda_1, T). \quad (17)$$

Управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, преследующего игрока выберем в виде

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда соответствующие уравнения имеют вид (11) с начальными условиями (12)

$$z_k(0) = z_k^0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, получим (см. (13))

$$z_k(T) = e^{-\lambda_k T} \left(z_k^0 - \int_0^T e^{\lambda_k \tau} w_k(\tau) d\tau \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Если функции $w_k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, $k = 1, 2, \dots$, выбрать в виде

$$w_k(\tau) = \frac{\lambda_k(z_k^0 - e^{\lambda_k T} z_k^1)}{e^{\lambda_k T} - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

то легко заметить, что $z_k(T) = z_k^1$, $k = 1, 2, \dots$.

Значит, в этом случае время перевода точки z из исходной (начальной) точки z^0 в конечную точку z^1 равно T .

Для завершения доказательства теоремы осталось показать допустимость управления $u(t)$, $0 \leq t \leq T$. Для этого оценим норму функции $w(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Из равенств (18) имеем

$$|w_k(\tau)|^2 \leq \lambda_k^2 \frac{|z_k^0|^2(1 + e^{\lambda_k T}) + (e^{\lambda_k T} + e^{2\lambda_k T})|z_k^1|^2}{(e^{\lambda_k T} - 1)^2}.$$

Отсюда

$$\|w_k(\cdot)\|^2 = \int_0^T |w_k(\tau)|^2 d\tau \leq \frac{\lambda_k^2 T (1 + e^{\lambda_k T}) |z_k^0|^2}{(e^{\lambda_k T} - 1)^2} + \frac{\lambda_k^2 T (e^{\lambda_k T} + e^{2\lambda_k T}) |z_k^1|^2}{(e^{\lambda_k T} - 1)^2}$$

или в силу (7)

$$\|w_k(\cdot)\|^2 \leq \lambda_k |z_k^0|^2 \varphi(\lambda_k, T) + \lambda_k^2 |z_k^1|^2 \psi(\lambda_k, T).$$

Учитывая (17), получим

$$\|w_k(\cdot)\|^2 \leq \lambda_k |z_k^0|^2 \varphi(\lambda_1, T) + \lambda_k^2 |z_k^1|^2 \psi(\lambda_1, T).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\|w(\cdot)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \|w_k(\cdot)\|^2 \leq \|z^0\|^2 \varphi(\lambda_1, T) + \|z^1\|^2 \psi(\lambda_1, T). \quad (19)$$

Из (19) и из неравенства (6) вытекает, что

$$\|w(\cdot)\| \leq \rho - \sigma.$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot)\| = \|v(\cdot) + w(\cdot)\| \leq \|v(\cdot)\| + \|w(\cdot)\| \leq \sigma + \rho - \sigma = \rho,$$

т.е. управление $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, является допустимым. Теорема 2 доказана.

3. Пример. Рассмотрим задачу о распространении тепла в ограниченном однородном стержне единичной длины, на концах которого поддерживается нулевая температура. Внешние воздействия на температуру стержня в момент t осуществляются функциями управления $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Такой процесс описывается уравнением вида

$$\dot{z}(t) + Az(t) = -u(t) + v(t), \quad t \geq 0,$$

где $z(t) = z(t, x)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, – функция, означающая температуру (количество тепла) стержня в момент времени $t \geq 0$ в точке x , $0 \leq x \leq 1$; оператор A имеет вид

$$Az(t) = -\frac{d^2 z(t)}{dx^2}, \quad t > 0, \quad (20)$$

и для него областью определения $D(A)$ является $\overset{\circ}{C}^2(0, 1)$ – пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций с граничными условиями

$$z(t)|_{x=0} = z(t)|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0.$$

Энергетическим пространством H_A оператора (20) является $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1)$ [5] – пространство, состоящее из функций, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) они абсолютно непрерывны на $[0, 1]$;
- 2) их первые производные – суммируемые на $[0, 1]$ с квадратом функции;
- 3) они в точках $x = 0$ и $x = 1$ обращаются в нуль.

Известно, что обобщенными собственными значениями и функциями являются

$$\lambda_k = (\pi k)^2, \quad \varphi_k = \sqrt{2} \sin \pi k x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Используя эти данные, строим пространства $H_r(0, 1)$, $r \geq 0$.

Пусть начальное распространение тепла по стержню определено функцией

$$z^0 = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - x & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Легко вычислить коэффициенты Фурье этой функции:

$$z_k^0 = \frac{2\sqrt{2}}{(\pi k)^2} \sin \frac{\pi k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно заметить, что $z^0 \in H_1(0, 1)$. Функцию, определяющую конечное состояние распределения тепла по стержню, представим в виде

$$z^1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(x - x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Ее коэффициентами Фурье являются

$$z_k^1 = \begin{cases} \frac{1}{(\pi k)^3} & \text{при нечетном } k, \\ 0 & \text{при четном } k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, $z^1 \in H_2(0, 1)$. Заметим, что

$$\|z^0\|_{H_1(0,1)}^2 = 1, \quad \|z^1\|_{H_2(0,1)}^2 = \frac{1}{8}.$$

Допустим, что $\rho = 2$, $\sigma = 1$. Тогда все условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, в игре (1)–(3) возможен перевод точки z из z^0 в z^1 . При этом управлением преследующего игрока, обеспечивающим такой перевод, является (см. (8))

$$u(t) = v(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2} \sin(\pi k/2) - (1 - (-1)^k)e^{20k^2}}{2(e^{20k^2} - 1)} \sqrt{2} \sin \pi k x, \quad 0 \leq t \leq T, \quad T = \frac{20}{\pi^2}.$$

Теперь рассмотрим эту же задачу для игры (1), (2), (4). Можно показать, что левая часть неравенства (6) при $T = 2$ будет равна 0.25, а правая -1 . Значит, условие (6) теоремы 2 выполнено. Таким образом, гарантированным временем преследования является $T = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Л. Черноусько, “Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **56**:5 (1992), 810–826.
- [2] В. А. Ильин, В. В. Тихомиров, “Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса”, *Дифференц. уравнения*, **35**:5 (1999), 692–704.
- [3] М. Тухтасинов, “О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами”, *ПММ*, **59**:6 (1995), 979–984.
- [4] Н. Ю. Сатимов, М. Тухтасинов, “О некоторых задачах в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **41**:8 (2005), 1114–1121.
- [5] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [6] С. А. Авдонин, С. А. Иванов, *Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент*, УМКВО, Киев, 1989.
- [7] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

М. Тухтасинов

Национальный университет Узбекистана

E-mail: mumin51@mail.ru

Поступило

09.07.2007

М. Ш. Маматов

Национальный университет Узбекистана