Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Яковлев, Адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 318–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:25:00

Адиабатические пределы на римановых Sol-многообразиях

А. А. Яковлев

Работа посвящена исследованию адиабатических пределов на римановых Sol-многообразиях. Мы понимаем адиабатические пределы в том смысле, в котором они были введены Виттеном в работе [1]. Точнее, пусть $(M, \mathcal{F})$ – замкнутое многообразие со слоением, снабженное римановой метрикой g . Таким образом, касательное расслоение TM многообразия M представляется в виде прямой суммы

$$TM = F \oplus H,$$

где $F = T\mathcal{F}$ – касательное расслоение слоения $\mathcal{F}$ и $H = F^\perp$ – ортогональное дополнение к F . Пусть g_F и g_H обозначают ограничение метрики g на F и H соответственно. Тем самым, $g = g_F + g_H$. Определим однопараметрическое семейство римановых метрик на M по формуле

$$g_\varepsilon = g_F + \varepsilon^{-2} g_H, \quad \varepsilon > 0. \quad (1)$$

Исследование различных свойств семейства римановых многообразий (M, g_ε) при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем называть *переходом к адиабатическому пределу*.

Напомним [2], что вещественная группа Sol есть разрешимая подгруппа Ли группы Ли $GL(3, \mathbb{R})$, образованная всеми матрицами вида

$$\gamma(u, v, w) = \begin{pmatrix} e^w & 0 & u \\ 0 & e^{-w} & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{sol}$ группы Ли Sol – подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, состоящая из матриц вида

$$X(u, v, w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & -w & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Пусть $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ и $|\operatorname{tr} A| > 2$. Обозначим через λ и λ^{-1} собственные значения матрицы A и предположим, что $\lambda > 1$. Определим вектора (c_1^1, c_1^2) , (c_2^1, c_2^2) уравнением

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Римановым Sol-многообразием называется компактное многообразие $M_A^3 = G_A \setminus \operatorname{Sol}$, снабженное римановой метрикой g , где

- G_A – равномерная дискретная подгруппа группы Ли Sol, состоящая из таких $\gamma(u, v, w) \in \operatorname{Sol}$, что

$$(u, v) \in \Gamma := \{k(c_1^1, c_1^2) + l(c_2^1, c_2^2) : k, l \in \mathbb{Z}\}, \quad w = m \ln \lambda, \quad m \in \mathbb{Z},$$

- g – риманова метрика на M_A^3 , чей подъем на Sol инвариантен при левых сдвигах на элементы группы Sol (такие метрики мы будем называть *локально левосинвариантными*).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00208).

Локально левоинвариантная метрика g единственным образом определяется своим значением в единице $\gamma(0, 0, 0)$ группы Sol и, тем самым, задается симметрической положительно определенной (3×3) -матрицей.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на Sol , ассоциированное с $X(1, \alpha, 0) \in \mathfrak{sol}$. Орбиты соответствующего векторного поля на M_A^3 определяют одномерное слоение $\mathcal{F}$. Слой слоения $\mathcal{F}$, проходящий через точку $G_A\gamma(u, v, w) \in M_A^3$, имеет вид

$$L_{G_A\gamma(u, v, w)} = \{G_A\gamma(u + e^w t, v + \alpha e^{-w} t, w) \in M_A^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Предположим, что локально левоинвариантная метрика g соответствует единичной матрице. Рассмотрим адиабатический предел, ассоциированный с римановым Sol -многообразием (M_A^3, g) и слоением $\mathcal{F}$. Обозначим через Δ_ε оператор Лапласа–Бельтрами на M_A^3 , соответствующий метрике g_ε , задаваемой формулой (1). Для любого $\varepsilon > 0$ спектр оператора Δ_ε состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots, \quad \lambda_j(\varepsilon) \rightarrow +\infty \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Основным результатом работы является вычисление асимптотики функции распределения спектра

$$N_\varepsilon(t) = \#\{i : \lambda_i(\varepsilon) \leq t\}$$

оператора Δ_ε в адиабатическом пределе, т.е. при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\alpha \neq 0$. Для любого $t > 0$ справедлива следующая асимптотическая формула при $\varepsilon \rightarrow 0$:*

$$N_\varepsilon(t) = \frac{1}{8\pi^2} t^{3/2} \varepsilon^{-2} + o(\varepsilon^{-2}). \quad (2)$$

Доказательство теоремы использует вычисление спектра оператора Лапласа на римановом Sol -многообразии, приведенное в работе [3], которая является продолжением исследований геодезических потоков на римановых Sol -многообразиях (см. [4], [5]), и квазиклассические спектральные асимптотики для модифицированного оператора Матье

$$H_\varepsilon = -\varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + a \cosh(2\mu x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Случай $\alpha = 0$ является в некотором смысле вырожденным случаем. Применение указанных выше методов при $\alpha = 0$ приводит к более сложным асимптотическим спектральным задачам для модифицированного оператора Матье, и поэтому мы не рассматриваем этот случай в данной работе, оставляя его для дальнейших исследований.

Задача о вычислении асимптотики функции распределения спектра оператора Лапласа в адиабатическом пределе рассматривалась ранее в работе [6] для римановых слоений и в работе [7] для одномерных слоений на римановых многообразиях Гейзенберга (см. также [8]). Во всех рассмотренных случаях функция $N_\varepsilon(t)$ имеет порядок ε^{-q} , где q – ко-размерность слоения (в нашем случае $q = 2$), но коэффициенты при ε^{-q} в каждом случае различны. Отметим также, что формула (2) отлична от классической формулы Вейля, которая описывает асимптотическое поведение функции распределения спектра $N_\varepsilon(t)$ оператора Лапласа Δ_ε при $t \rightarrow \infty$ (см. [3]).

Автор благодарен Ю. А. Кордюкову за постановку задачи и внимание к работе и И. А. Тайманову за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Witten, *Comm. Math. Phys.*, **100**:2 (1985), 197–229. [2] W. Thurston, *Low-Dimensional Topology* (Bangor, 1979), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **48**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1982, 9–25. [3] A. V. Bolsinov, H. R. Dullin, A. P. Veselov,

Comm. Math. Phys., **264**:3 (2006), 583–611. [4] A. V. Bolsinov, I. A. Taimanov, *Invent. Math.*, **140**:3 (2000), 639–650. [5] А. В. Болсинов, И. А. Тайманов, *Динамические системы, автоматы и бесконечные группы*, Тр. МИАН, **231**, 2000, 46–63. [6] Yu. A. Kordyukov, *Math. Ann.*, **313**:4 (1999), 763–783. [7] А. А. Яковлев, *Адиабатические пределы на римановых многообразиях Гейзенберга* (в печати). [8] Yu. A. Kordyukov, A. A. Yakovlev, *C*-algebras and elliptic theory*, II, Trends Math., Birkhauser, Basel (to appear); [arXiv:math/0703785v1](https://arxiv.org/abs/math/0703785v1).

А. А. Яковлев

Уфимский государственный
авиационный технический университет

Поступило

11.10.2007