Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов, О распределении нулей функций из пространств Бергмана с весом, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 95–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 11:50:54

О распределении нулей функций из пространств Бергмана с весом

Е. А. Севастьянов, А. А. Долгобородов

Уточняются некоторые известные необходимые характеристики нулевых множеств функций из пространств Бергмана с весом при достаточно общих условиях на вес.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пространством Бергмана A_φ^p с весом $\varphi(t)$ называется пространство функций $f(z)$, $z = x + iy = re^{i\theta}$, аналитических в единичном круге $|z| < 1$ и таких, что

$$\|f\|_{p,\varphi} := \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^p \varphi(1-r^2) dx dy \right)^{1/p} < \infty, \quad p > 0.$$

Поведением нулей функций из пространств Бергмана занимались Джрбашян [1], Шапиро и Шилдс [2], Горовиц [3], Беллер [4], Седлецкий [5]–[7] и др. Для функции $f \in A_\varphi^p$, $p > 0$, $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, $f(0) \neq 0$, в работе [3] было получено неравенство

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq C(p, \alpha) \|f\|_{p,\varphi} \cdot n^{(1+\alpha)/p}, \quad (1.1)$$

где $\{z_k(f)\}_{k=1}^\infty$ – упорядоченная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции f , причем, каждый нуль участвует в последовательности столько раз, какова его кратность. Вопрос о точности неравенства (1.1) решен Горовицем в следующем смысле: для любых $p > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon(z) \in A_\varphi^p$ ($\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$) такая, что при всех n

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f_\varepsilon)|} \geq C \cdot n^{(1+\alpha)/(p(1+\varepsilon))}, \quad (1.2)$$

где $C > 0$ не зависит от n . Эти результаты, как заметил Седлецкий, остаются справедливыми и для значений $\alpha > -1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00225).

Непосредственно из неравенства (1.1) следует неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - |z_n(f)|)}{\log n} \leq \frac{1 + \alpha}{p}. \quad (1.3)$$

Точность этого неравенства установлена Беллером (случай $\alpha = 0$) и Седлецким (случай $\alpha > -1$) в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f_\varepsilon \in A_\varphi^p$ ($\varphi(t) = t^\alpha$, $p > 0$) такая, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - |z_k(f_\varepsilon)|)}{\log n} \geq \frac{1 + \alpha}{p(1 + \varepsilon)}. \quad (1.4)$$

В связи с этими результатами отметим, что неравенство (1.3) остается точным (в обозначенном выше смысле), несмотря на то что оно было получено за счет существенного загробления неравенства (1.1). Это обстоятельство свидетельствует о роли, которую играют в вопросе поведения нулей (функций из пространств Бергмана) их различные подпоследовательности.

Бирюков [8] рассмотрел веса вида $\varphi(t) = t^\alpha l(1/t)$, $\alpha \geq -1$, где $l(u)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция (см. ниже определение 1). Они представляют интерес, прежде всего, в пограничном случае $\alpha = -1$.

Условие на вес, накладываемое в настоящей работе (а именно, Δ_2 -условие), позволяет рассмотреть еще более общие веса, сохраняя при этом прежние результаты в качестве следствий. Однако не обобщение подобного рода является целью работы. Оно лишь сопутствующий элемент, выделяющий наиболее существенное свойство веса, необходимое для получения оценок снизу, которым и посвящена работа. Основная ее цель в построении примеров, которые бы и в классическом случае $\varphi(t) \equiv 1$, и в случае стандартного веса $\varphi(t) = t^\alpha$ позволили бы “пробить брешь” в степенной шкале роста известных оценок снизу. В неравенствах типа (1.4) это может привести к приятной возможности положить $\varepsilon = 0$.

Поставленная задача решается в рамках основных приемов, использованных в работе Горовица [3]. К ним относится построение примеров функций f в виде бесконечных произведений, у которых частичные произведения являются частичными суммами рядов Тейлора функций f , а также использование определенных условий на тейлоровские коэффициенты функций, при которых гарантируется принадлежность этих функций тем или иным классам Бергмана. Эти условия устанавливаются в [3] для двух различных случаев: $0 < p < 2$ и $p \geq 2$. Несколько модифицируя результаты работы [3], касающиеся тейлоровских коэффициентов, ниже при построении примеров рассмотрим случай $p \geq 2$.

Приведем один из полученных далее результатов (следствие из теоремы 4): *если $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, $p \geq 2$, а последовательность натуральных чисел $\{n_s\}_{s=0}^\infty$ такова, что*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n_s} \prod_{k=0}^{s-1} n_k \right)^{(\alpha+1)/(p-1)} < \infty$$

(и члены ряда убывают), то существует функция $f \in A_\varphi^p$, для которой

$$1 - |z_{n_s}(f)| \sim \frac{\alpha + 1}{p} \cdot \frac{\log n_s}{n_s}, \quad s \rightarrow \infty.$$

2. Оценки сверху. Они получаются по стандартной схеме, в основе которой лежит формула Йенсена (см., например, [3]). Эту схему без труда удастся распространить на максимально общие веса и получить известные частные случаи в качестве следствий. Естественным необходимым условием, накладываемым на вес φ , является условие (2.1): если оно не выполняется, то пространство A_φ^p тривиально.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < p < \infty$, $\varphi(t)$ – произвольная неотрицательная измеримая на $(0, 1]$ функция, отличная от нуля на множестве положительной меры в любом интервале $(0, \delta)$ ($0 < \delta < 1$) и такая, что

$$\int_0^1 \varphi(t) dt < \infty. \quad (2.1)$$

Тогда если $f \in A_\varphi^p$, $f(0) = 1$, то при любом $n \geq 2$

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq 2 \|f\|_{p, \varphi} \Phi(n)^{1/p}, \quad (2.2)$$

где

$$\Phi(n) = \left(\int_0^{1/n} \varphi(t) dt \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r_k = |z_k(f)|$. Воспользуемся формулой Йенсена

$$\log \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{r_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < 1,$$

где $n(r)$ – число нулей функции $f(z)$, попавших в круг $|z| < r$. Из нее и из интегрального неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что

$$\left(\prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{r_k} \right)^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta, \quad 0 < p < \infty.$$

Заменяя в этом неравенстве верхний индекс $n(r)$ на произвольное $n \in \mathbb{N}$ (это, очевидно, можно сделать), умножим обе части неравенства на $\varphi(1-r^2)2r$ и проинтегрируем по r от 0 до 1. Тогда получим

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \right)^p \int_0^1 r^{np} \varphi(1-r^2) 2r dr \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right) \varphi(1-r^2) r dr = \|f\|_{p, \varphi}^p. \quad (2.3)$$

Поскольку $\varphi(t) \geq 0$, при $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{np} \varphi(1-r^2) 2r dr &= \int_0^1 (1-t)^{np/2} \varphi(t) dt \geq \int_0^{1/n} (1-t)^{np/2} \varphi(t) dt \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{np/2} \int_0^{1/n} \varphi(t) dt \geq 2^{-p} \int_0^{1/n} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.3) следует (2.2). Теорема доказана.

Очевидно, что при $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, из (2.2) следует неравенство (1.1).

Заменим в произведении в левой части неравенства (2.2) все множители самым маленьким множителем $1/|z_n(f)|$ и прологарифмируем полученное неравенство. Получим

$$n \log \frac{1}{|z_n(f)|} \leq \log(2\|f\|_{p,\varphi}) + \frac{1}{p} \log \Phi(n).$$

Поскольку $\log(1/|z_n(f)|) > 1 - |z_n(f)|$, отсюда вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \in A_\varphi^p$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - |z_n(f)|)}{\log \Phi(n)} \leq \frac{1}{p}. \quad (2.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [9]). Положительная функция R называется *правильно меняющейся на бесконечности*, если она измерима на полуоси $[A, +\infty)$, $A > 0$, и существует такое $\rho \in (-\infty, \infty)$, что для произвольного $\lambda > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{R(\lambda x)}{R(x)} \right) = \lambda^\rho.$$

При этом ρ называется *порядком функции R* . Функция $R(x)$ называется *правильно меняющейся в нуле*, если $R(1/x)$ правильно меняется на бесконечности. Правильно меняющаяся функция $L(x)$ порядка $\rho = 0$ называется *медленно меняющейся функцией*.

Из определения следует, что функция $R(x)$ – правильно меняющаяся тогда и только тогда, когда она может быть записана в виде $R(x) = x^\rho L(x)$, где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция, $\rho \in (-\infty, \infty)$.

Нетрудно показать, что если $\varphi(t)$ – правильно меняющаяся при $t \rightarrow 0$ функция порядка $\alpha > -1$, то

$$\log \left[\left(\int_0^{1/x} \varphi(t) dt \right)^{-1} \right] \sim (\alpha + 1) \log x, \quad x \rightarrow \infty.$$

Поэтому из (2.4) получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \in A_\varphi^p$, где $\varphi(t)$ – правильно меняющаяся при $t \rightarrow 0$ функция порядка $\alpha > -1$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - |z_n(f)|)}{\log n} \leq \frac{\alpha + 1}{p}.$$

Итак, медленно меняющийся множитель l в представлении $\varphi(t) = t^\alpha l(1/t)$ правильно меняющейся функции φ отражается на оценке (2.4) лишь при $\alpha = -1$. Тем самым, использование правильно меняющихся функций в качестве весов в оценке типа (2.4) может быть целесообразным именно в пограничном случае ($\alpha = -1$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для случая, когда $\varphi(t)$ – правильно меняющаяся функция порядка -1 , оценка (2.4) получена в [8].

Ниже при построении примеров, демонстрирующих точность оценок (2.2) и (2.4), на вес накладывается лишь одно дополнительное условие – так называемое Δ_2 -условие, которое является существенно менее ограничительным, чем условие правильного изменения веса (например, это условие выполняется, если вес убывает). Таким образом, и в пограничном случае условие правильного изменения веса без всяких потерь (в рассматриваемом круге вопросов) может быть отброшено.

3. Веса и Δ_2 -условие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят (см. [10]), что функция $\psi(t)$, определенная на $(0, \infty)$, удовлетворяет Δ_2 -условию, если существует такая постоянная $C > 0$ ($C = C_\psi$ не зависит от t), что для всех $t > 0$ выполняется неравенство $\psi(2t) \leq C\psi(t)$. Будем говорить, что функция $\varphi(t)$, определенная на $(0, 1]$, удовлетворяет Δ_2 -условию, если неравенство $\varphi(2t) \leq C\varphi(t)$ выполняется для всех $t \in (0, 1/2]$. Про функцию $\Phi(u)$, определенную на $[1, \infty)$, скажем, что она удовлетворяет Δ_2 -условию, если $\Phi(2u) \leq C\Phi(u)$ при всех $u \geq 2$.

Очевидно, что любая невозрастающая на $(0, 1]$ функция удовлетворяет Δ_2 -условию (с постоянной $C = 1$).

ЛЕММА 1. Если неотрицательная измеримая функция $\varphi(t)$, $t \in (0, 1]$, удовлетворяет Δ_2 -условию (с постоянной C) и условию (2.1), то функция

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in (0, 1],$$

также удовлетворяет Δ_2 -условию (с постоянной $2C$).

Действительно, при $\delta \in (0, 1/2]$ имеем

$$\tilde{\varphi}(2\delta) = \int_0^{2\delta} \varphi(\tau) d\tau = 2 \int_0^\delta \varphi(2t) dt \leq 2C \int_0^\delta \varphi(t) dt = 2C\tilde{\varphi}(\delta).$$

Таким образом, если $\varphi(t)$ – произвольная невозрастающая положительная интегрируемая на $(0, 1]$ функция, то все интегралы от нее, взятые последовательно конечное число раз, удовлетворяют Δ_2 -условию. Это дает возможность, в случае необходимости, иметь веса с заданной гладкостью и с Δ_2 -свойством. Заметим еще, что любая конечная линейная комбинация с фиксированными положительными коэффициентами функций, удовлетворяющих Δ_2 -условию, также удовлетворяет Δ_2 -условию. Все это позволяет конструктивно определить достаточно широкое подмножество весов с Δ_2 -свойством.

Из леммы 1 непосредственно следует

ЛЕММА 2. Если вес $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то функция

$$\Phi(u) = \left(\int_0^{1/u} \varphi(t) dt \right)^{-1}, \quad u \geq 1, \quad (3.1)$$

также удовлетворяет Δ_2 -условию.

Установим теперь основное утверждение, выявляющее роль Δ_2 -условия, накладываемого на веса, в пространствах Бергмана.

ЛЕММА 3. Если функция $\varphi(t)$ неотрицательна, измерима на $(0, 1]$, выполняется (2.1) и φ удовлетворяет Δ_2 -условию, то при любом $\delta \in (0, 1]$ имеем

$$\int_0^1 (1-t)^{1/\delta} \varphi(t) dt \leq C_\varphi \int_0^\delta \varphi(t) dt, \quad (3.2)$$

где C_φ зависит лишь от φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in (0, 1]$, $\Delta_k = (2^{-k-1}, 2^{-k}]$, $k = 0, 1, \dots$. Обозначим через n номер, при котором $\delta \in \Delta_n$. Пусть $0 \leq k \leq n$. Тогда, делая замену $\tau = 2^{n-k}t$ и используя $n-k$ раз Δ_2 -условие $\varphi(2u) \leq C_0\varphi(u)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} (1-t)^{1/\delta} \varphi(\tau) d\tau &= 2^{n-k} \int_{\Delta_n} (1-2^{n-k}t)^{1/\delta} \varphi(2^{n-k}t) dt \\ &\leq (2C_0)^{n-k} \int_{\Delta_n} (1-2^{n-k}t)^{1/\delta} \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку $\delta \in \Delta_n$, $t \in \Delta_n$, то

$$\begin{aligned} (1-2^{n-k}t)^{1/\delta} &\leq (1-2^{n-k} \cdot 2^{-n-1})^{2^n} \\ &= \exp\{2^n \log(1-2^{-k-1})\} \leq \exp\{-2^{n-k-1}\} =: \lambda_{n-k}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.3), пользуясь еще раз Δ_2 -условием, получим (при $k = 0, 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} (1-\tau)^{1/\delta} \varphi(\tau) d\tau &\leq (2C_0)^{n-k} \lambda_{n-k} \int_{\Delta_n} \varphi(t) dt \\ &\leq (2C_0)^{n-k} \lambda_{n-k} \cdot 2C_0 \int_{\Delta_{n+1}} \varphi(t) dt \leq (2C_0)^{n-k+1} \int_0^\delta \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^{1/\delta} \varphi(t) dt &= \left(\int_0^{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^n \int_{\Delta_k} \right) (1-t)^{1/\delta} \varphi(t) dt \\ &\leq \left(1 + \sum_{k=0}^n (2C_0)^{n-k+1} \lambda_{n-k} \right) \int_0^\delta \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\sum_{k=0}^n (2C_0)^{n-k+1} \lambda_{n-k} = \sum_{l=0}^n (2C_0)^{l+1} \lambda_l \leq \sum_{l=0}^{\infty} (2C_0)^{l+1} \exp\{-2^{l-1}\} = C_\varphi < \infty,$$

где C_φ зависит лишь от C_0 . Лемма доказана.

Непосредственно из определения Δ_2 -условия получим также следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть даны положительная функция $\Phi(u)$, которая неограниченно возрастает на промежутке $[1, +\infty)$ и удовлетворяет на нем Δ_2 -условию с постоянной C_Φ , и положительная последовательность чисел $A_k \uparrow +\infty$. Определим последовательность $\{n_k\}_{k=0}^\infty$ так, что $\Phi(n_k) = A_k \Phi(n_{k-1})$, $k = 1, 2, \dots$. Тогда $n_k/n_{k-1} \rightarrow +\infty$ и $\Phi(n_k) \leq C_\Phi \Phi(n_k - n_{k-1})$ при всех достаточно больших k .

4. Тейлоровские коэффициенты. В данном пункте приводятся леммы, которые позволят через условия на коэффициенты Тейлора $a_k = a_k(f)$ функций $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ установить принадлежность бесконечных произведений определенного вида (см. (5.3)) соответствующим классам Бергмана.

ЛЕММА 5. Пусть $p \geq 2$, $1/p + 1/q = 1$, вес φ удовлетворяет Δ_2 -условию, функция Φ определена равенством (3.1). Тогда если

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(f)|^q \Phi(k)^{1-q} < \infty,$$

то $f \in A_{\varphi}^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуем рассуждениям работы [3], где доказательство этого утверждения проведено для веса $\varphi(t) = t^{\alpha}$. Если $f \in A_{\varphi}^p$, то применение формулы Парсеваля дает

$$\begin{aligned} \|f\|_{2,\varphi}^2 &= \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 \varphi(1-r^2) dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi(1-r^2) r \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) dr = 2 \int_0^1 \varphi(1-r^2) r \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} dr \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \int_0^1 \varphi(1-r^2) r^{2k} dr^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \int_0^1 (1-t)^k \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$\|f\|_{2,\varphi}^2 \leq C_{\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \Phi(k)^{-1}, \quad (4.1)$$

где C_{φ} зависит лишь от φ .

Далее доказательство проводится на основании равенства (4.1) и интерполяционной теоремы Рисса вполне аналогично тому, как оно проведено в [3] для веса $\varphi(t) = t^{\alpha}$.

Следующее утверждение – это модификация леммы 1 из [4], которая, в свою очередь, является обобщением соотношения (4.4) из [3].

ЛЕММА 6. Пусть $\{\nu_s\}_{s=0}^{\infty}$ – лакунарная последовательность чисел такая, что $\nu_s > 2\nu_{s-1}$ ($s = 1, 2, \dots$), $\nu_{-1} = 0$,

$$g_m(z) = \prod_{s=0}^m (1 + \beta_s z^{\nu_s - \nu_{s-1}}), \quad \beta_s \in \mathbb{C}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.2)$$

Тогда

$$g_m(z) = 1 + \sum_{s=0}^m \sum_{j=\nu_s - \nu_{s-1}}^{\nu_s} a_j z^j, \quad (4.3)$$

где коэффициенты a_j не зависят от m , являясь коэффициентами Тейлора функции

$$g(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(g) z^k$$

(в случае ее существования): $a_j = a_j(g)$. При этом, если $\beta_k > 0$, то при любом $q > 0$

$$\sum_{j=\nu_s-\nu_{s-1}}^{\nu_s} a_j^q = \beta_s^q \prod_{k=0}^{s-1} (1 + \beta_k^q), \quad s = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$g_s(z) - g_{s-1}(z) = \beta_s z^{\nu_s-\nu_{s-1}} g_{s-1}(z), \quad s = 0, 1, \dots, m \quad (4.5)$$

($g_{-1}(z) := 1$). В силу условия $\nu_s - \nu_{s-1} > \nu_{s-1}$ и того, что старшая степень многочлена $g_{s-1}(z)$ равна ν_{s-1} , а свободный член равен 1, правые части равенств (4.5) имеют вид

$$\sum_{j=\nu_s-\nu_{s-1}}^{\nu_s} a_j z^j, \quad s = 0, 1, \dots, m.$$

Сложив почленно эти равенства, получим (4.3).

Еще раз заметим, что

$$\sum_{j=\nu_s-\nu_{s-1}}^{\nu_s} a_j z^j = \beta_s z^{\nu_s-\nu_{s-1}} \prod_{k=0}^{s-1} (1 + \beta_k z^{\nu_k-\nu_{k-1}}). \quad (4.6)$$

Если $q = 1$, то отсюда при $z = 1$ получим (4.4). В случае произвольного $q > 0$ и положительных β_k , заменив в формуле (4.2) коэффициент β_k на β_k^q , получим формулу (4.6) в виде

$$\sum_{j=\nu_s-\nu_{s-1}}^{\nu_s} a_j^* z^j = \beta_s^q z^{\nu_s-\nu_{s-1}} \prod_{k=0}^{s-1} (1 + \beta_k^q z^{\nu_k-\nu_{k-1}}), \quad (4.7)$$

где $a_j^* = a_j^q$ в силу отсутствия справа подобных членов (после перемножения) и свойства $(ab)^q = a^q b^q$ ($a > 0$, $b > 0$). Положив в (4.7) $z = 1$, получим (4.4). Лемма доказана.

5. Основные леммы. Различный выбор параметров в леммах 7 и 8 этого пункта определяется различным видом оценок (2.2) и (2.4), точность которых устанавливается этими леммами. Функция Φ в них определена равенством (3.1), в котором вес φ удовлетворяет Δ_2 -условию.

ЛЕММА 7. Пусть $p \geq 2$, $1 > \gamma_0 > \dots > \gamma_k \rightarrow 0$, $\gamma_0 + \gamma_1 + \dots < \infty$,

$$b_k = \gamma_k^{-1/q}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

Определим $\tilde{n}_s$ из равенства

$$\Phi(\tilde{n}_s) = \prod_{k=0}^{s+1} b_k^p \equiv \prod_{k=0}^{s+1} \gamma_k^{-p/q} \quad (5.2)$$

для тех s , для которых правая часть (5.2) не меньше $\Phi(1)$ – пусть это имеет место при $s > s_0$. Положим при этом $\tilde{n}_0 = \dots = \tilde{n}_{s_0} = 1$, а также определим

последовательность номеров $n_{-1} = 0, n_s = \max\{\lfloor \tilde{n}_s \rfloor, n_{s-1} + 1\}$ ($s = 0, 1, \dots$). Пусть, наконец,

$$f(z) = \prod_{s=0}^{\infty} (1 + b_s z^{n_s - n_{s-1}}). \quad (5.3)$$

Тогда $f \in A_{\varphi}^p$ и при всех $s > s_0$

$$\prod_{k=1}^{n_s} \frac{1}{|z_k(f)|} = \gamma_{s+1}^{1/q} \Phi(\tilde{n}_s)^{1/p}. \quad (5.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что поскольку $\Phi(\tilde{n}_s) = b_{s+1}^p \Phi(\tilde{n}_{s-1})$, $b_{s+1}^p \uparrow \infty$, а функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию (см. лемму 2), в силу леммы 4 выполняется неравенство $n_s > 2n_{s-1}$ для всех достаточно больших s , $s \geq r \geq s_0$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{s=r}^{\infty} (1 + b_s z^{n_s - n_{s-1}}) = \prod_{s=0}^{\infty} (1 + \beta_s z^{\nu_s - \nu_{s-1}}), \quad (5.5)$$

где $\beta_s = b_{r+s}$, $\nu_s = n_{r+s} - n_{r-1}$, $\nu_{-1} = 0$. Очевидно, что $\nu_s > 2\nu_{s-1}$ ($s = 1, 2, \dots$). В силу неравенства $p \log b_s < \log \Phi(n_s)$ (см. (5.2)) и соотношения $\log \Phi(u) = o(u)$ при $u \rightarrow \infty$ (вытекающего из Δ_2 -условия, наложенного на φ)

$$(n_s - n_{s-1})^{-1} \log b_s \leq 2n_s^{-1} \log b_s < 2(pn_s)^{-1} \log \Phi(n_s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty,$$

так что $b_s^{1/(n_s - n_{s-1})} \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$. Поэтому произведение (5.5) сходится в круге $|z| < 1$.

Для коэффициентов Тейлора $a_k(g)$ функции g согласно формуле (4.3) леммы 6 имеем

$$\sigma(g) := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(g)|^q \Phi(k)^{1-q} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=\nu_s - \nu_{s-1}}^{\nu_s} |a_j(g)|^q \Phi(j)^{1-q}.$$

Отсюда и из возрастания функции $\Phi(u)$ следует, что

$$\sigma(g) \leq \sum_{s=0}^{\infty} \Phi(\nu_s - \nu_{s-1})^{1-q} \sum_{j=\nu_s - \nu_{s-1}}^{\nu_s} |a_j(g)|^q. \quad (5.6)$$

В силу леммы 4 при достаточно больших s (будем считать, что это имеет место при $s \geq r$) выполняется неравенство $\Phi(\tilde{n}_s) \leq C_{\varphi} \Phi(\tilde{n}_s - \tilde{n}_{s-1})$, а вместе с ним и неравенство $\Phi(\nu_s) \leq C_{\varphi} \Phi(\nu_s - \nu_{s-1})$. С учетом этого из (5.6) и из соотношения (4.4) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1(g) &:= \sigma(g) - \Phi(\nu_0)^{1-q} |a_{\nu_0}(g)|^q \leq C_{\Phi}^{q-1} \sum_{s=1}^{\infty} \Phi(\nu_s)^{1-q} \beta_s^q \prod_{k=0}^{s-1} (1 + \beta_k^q) \\ &= C_{\Phi}^{q-1} \sum_{s=1}^{\infty} \Phi(n_{r+s} - n_{r-1})^{1-q} b_{r+s}^q \prod_{k=0}^{s-1} (1 + b_{r+k}^q). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку $\Phi(\tilde{n}_s) \leq C_\Phi \Phi(n_s - n_{r-1})$, $s = r + 1, r + 2, \dots$, то

$$\sigma_1(g) \leq C_\Phi^{2(q-1)} \sum_{s=r+1}^{\infty} \Phi(\tilde{n}_s)^{1-q} b_s^q \prod_{k=r}^{s-1} (1 + b_k^q). \quad (5.8)$$

Заметим теперь, что

$$\prod_{k=r}^{s-1} (1 + b_k^q) = \prod_{k=r}^{s-1} (1 + \gamma_k) \cdot \prod_{k=r}^{s-1} b_k^q \leq e^\sigma \prod_{k=r}^{s-1} b_k^q,$$

где $\sigma = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots$. Поэтому из (5.8) следует, что

$$\sigma_1(g) \leq C_\Phi^{2(q-1)} e^\sigma \sum_{s=r+1}^{\infty} \Phi(\tilde{n}_s)^{1-q} \prod_{k=r}^s b_k^q. \quad (5.9)$$

В силу соотношений (5.1) и (5.2) имеем

$$\Phi(\tilde{n}_s)^{1-q} \prod_{k=r}^s b_k^q < \left(\prod_{k=0}^{s+1} b_k^p \right)^{1-q} \prod_{k=0}^s b_k^q = b_{s+1}^{p(1-q)} = \gamma_{s+1}.$$

Отсюда и из (5.9) получим

$$\sigma_1(g) \leq C_\Phi^{2(q-1)} e^\sigma \sum_{s=r+1}^{\infty} \gamma_{s+1} < \infty.$$

По лемме 5 $g \in A_\varphi^p$, а вместе с g , очевидно, и $f \in A_\varphi^p$. Поскольку в многочлене

$$f_s(z) = \prod_{k=0}^{n_s} (1 + b_k z^{n_k - n_{k-1}})$$

степени n_s свободный член равен 1, то (при $s > s_0$)

$$\prod_{k=1}^{n_s} \frac{1}{|z_k(f)|} = \prod_{k=0}^s b_k = \frac{1}{b_{s+1}} \prod_{k=0}^{s+1} b_k = \gamma_{s+1}^{1/q} \Phi(\tilde{n}_s)^{1/p}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $p \geq 2$, $1 > \gamma_1 > \dots > \gamma_k \rightarrow 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots < \infty$. Положим $b_1 = 1$,

$$b_{s+1} = \gamma_s^{-1/q} \prod_{k=1}^s b_k, \quad s = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Определим $\tilde{n}_s$, $s = 0, 1, \dots$, из равенства

$$\Phi(\tilde{n}_s) = b_{s+1}^p \quad (5.11)$$

для тех s , для которых $b_{s+1}^p \geq \Phi(1)$, — пусть это имеет место при $s > s_1$. Положим $\tilde{n}_0 = \dots = \tilde{n}_{s_1} = 1$, $n_1 = 0$, $n_s = \max\{\tilde{n}_s, n_{s-1} + 1\}$ ($s = 2, 3, \dots$). Пусть

$$f(z) = \prod_{s=2}^{\infty} (1 + b_s z^{n_s - n_{s-1}}).$$

Тогда $f \in A_\varphi^p$ и при всех $s > s_1$ имеем

$$\log \frac{1}{|z_{n_s}(f)|} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n_s - n_{s-1}} \log \Phi(\tilde{n}_{s-1}) \sim \frac{1}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n_s)}{n_s}, \quad s \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 7 замечаем, что поскольку $\Phi(\tilde{n}_s) = \Phi(\tilde{n}_{s-1})A_s$, где $A_s = (\gamma_{s-1}/\gamma_s)^{p/q} \cdot b_s^p \uparrow \infty$, выполняется неравенство $n_s > 2n_{s-1}$ для всех достаточно больших s , $s \geq r > s_1$.

Рассмотрим функцию $g(z)$ – см. (5.5) (существование $g(z)$ в круге $|z| < 1$ устанавливается аналогично). Для нее выполняются соотношения (5.6)–(5.8). А поскольку $b_s^{-q} < \gamma_s$, выполняется неравенство

$$\prod_{k=r}^{s-1} (1 + b_k^q) < \prod_{k=r}^{s-1} (1 + \gamma_k) \cdot \prod_{k=r}^{s-1} b_k^q < e^\sigma \prod_{k=r}^{s-1} b_k^q,$$

где $\sigma = \gamma_2 + \gamma_3 + \dots$, а вместе с ним и неравенство (5.9).

В силу соотношений (5.10) и (5.11) имеем

$$\Phi(\tilde{n}_s)^{1-q} \prod_{k=r}^s b_k^q \leq b_{s+1}^{(1-q)p} \prod_{k=1}^s b_k^q = b_{s+1}^{(1-q)p} \cdot b_{s+1}^q \cdot \gamma_s = \gamma_s.$$

Отсюда и из (5.9) получим

$$\sigma_1(g) \leq C_\Phi^{2(q-1)} e^\sigma \sum_{s=r+1}^{\infty} \gamma_s < \infty.$$

По лемме 5 функция g принадлежит A_φ^p , откуда и $f \in A_\varphi^p$. При этом

$$|z_{n_{s-1}+1}(f)| = \dots = |z_{n_s}(f)| = \left(\frac{1}{b_s}\right)^{1/(n_s - n_{s-1})},$$

$$\log \frac{1}{|z_{n_s}(f)|} = \frac{1}{n_s - n_{s-1}} \log b_s = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n_s - n_{s-1}} \log \Phi(\tilde{n}_{s-1}), \quad s > s_1.$$

Поскольку $n_s - n_{s-1} \sim n_s$, $\log \Phi(n_{s-1}) \sim \log \Phi(n_s)$, $s \rightarrow \infty$, лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Так же, как и в лемме 7, получим (см. (5.10) и (5.11))

$$\prod_{k=1}^{n_s} \frac{1}{|z_k(f)|} = \prod_{k=1}^s b_k = \gamma_s^{1/q} b_{s+1} = \gamma_s^{1/q} \cdot \Phi(\tilde{n}_s)^{1/p}$$

(ср. с (5.4)). Однако здесь подпоследовательность номеров n_s является существенно более редкой, чем в лемме 7. С другой стороны, из леммы 7 не следует лемма 8: подпоследовательность $\{n_s\}$ в лемме 8 и должна быть достаточно редкой (чтобы не противоречить оценке сверху (2.2)).

6. Основные теоремы. Они будут получены как следствия лемм 7 и 8. Понадобится также следующая

ЛЕММА 9. Пусть приняты обозначения леммы 7,

$$\gamma_s = (s+1)^{-1}(\log(s+e))^{-\gamma}, \quad \gamma > 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

номер $s = s(n)$ определяется неравенством $\tilde{n}_{s-1} \leq n < \tilde{n}_s$. Тогда

$$s \sim \frac{q}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n)}{\log \log \Phi(n)}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5.2)

$$\Phi(\tilde{n}_s)^{q/p} = \prod_{k=0}^{s+1} (k+1)(\log(k+e))^\gamma,$$

откуда

$$\frac{q}{p} \log \Phi(\tilde{n}_s) = \sum_{k=0}^{s+1} \log(k+1) + \gamma \sum_{k=0}^{s+1} \log \log(k+e) \sim s \log s, \quad s \rightarrow \infty.$$

Отсюда получим соотношение

$$\frac{q}{p} \log \Phi(n) \sim s \log s, \quad n \rightarrow \infty,$$

и, в свою очередь, соотношение (6.1). Лемма доказана.

Ниже в теоремах 2–4 допустимым весом называется вес $\varphi(t)$, $t \in (0, 1]$, удовлетворяющий условию (2.1) и Δ_2 -условию.

ТЕОРЕМА 2. Для любого допустимого веса $\varphi(t)$, любого $p \geq 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in A_\varphi^p$ ($f(0) = 1$) такая, что при всех достаточно больших n

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \geq C(p) \delta(n) \Phi(n)^{1/p}, \quad (6.2)$$

где $\delta(n) = (\log \Phi(n) \cdot (\log \log \Phi(n))^\varepsilon)^{-2/q}$, $C(p)$ зависит лишь от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $s = s(n)$ – номер такой, что $\tilde{n}_{s-1} \leq n < \tilde{n}_s$. Тогда для функции $f(z)$ из леммы 7 имеем (см. (5.4))

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} &\geq \prod_{k=1}^{n_{s-1}} \frac{1}{|z_k(f)|} = \gamma_s^{1/q} \Phi(\tilde{n}_{s-1})^{1/p} \\ &= \gamma_s^{1/q} b_{s+1}^{-1} \Phi(\tilde{n}_s)^{1/p} = (\gamma_s \cdot \gamma_{s+1})^{1/q} \Phi(\tilde{n}_s)^{1/p} \geq (\gamma_{s+1})^{2/q} \Phi(n)^{1/p}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Положим $\gamma_s = (s+1)^{-1}(\log(s+e))^{-1-\varepsilon}$. Тогда (6.2) следует из (6.3) и леммы 9. Теорема доказана.

Отметим случай стандартного веса $\varphi(t) = t^\alpha$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$. Для любого $p \geq 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in A_\varphi^p$ ($f(0) = 1$) такая, что при всех достаточно больших n

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \geq C(p, \alpha) \delta(n) n^{(1+\alpha)/p}, \quad (6.4)$$

где $\delta(n) = (\log n (\log \log n)^\varepsilon)^{-2/q}$, $C(p, \alpha)$ зависит лишь от p и α .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $f \in A_\varphi^p$, где $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, то при условии монотонности (неубывания) функции

$$\mu(f, t) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f((1-t)e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} \cdot t^{(1+\alpha)/p}, \quad t \in (0, 1],$$

можно установить неравенство

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \leq C \left(\frac{n^{1+\alpha}}{\log n} \right)^{1/p}. \quad (6.5)$$

Таким образом, оценки снизу (6.4) и сверху (6.5) еще более сближаются, если будет доказано, что $\mu(f, t)$ монотонна для функции f , участвующей в оценке снизу. Заметим еще, что полного (с точностью до произвольных бесконечно малых множителей) сближения оценок сверху и снизу проще, по всей видимости, достичь по подпоследовательности номеров (ср. (6.5) и (6.6) при $p = 2$). Для всех номеров такое сближение представляется авторам достаточно трудной задачей. Эта задача лежит в рамках еще более сложной проблемы описания нулевых множеств пространств Бергмана (см. обзорную статью Шведенко [11; § 6]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi(t)$ – произвольный допустимый вес, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\Phi(n_0) > 1$, $0 < \gamma_1 < \gamma_0 < 1$ и при этом $\Phi(n_0) = (\gamma_0 \gamma_1)^{-p/q}$. Для любой последовательности номеров n_s ($s = 1, 2, \dots$) такой, что $(\Phi(n_{s-1})/\Phi(n_s))^{q/p} =: \gamma_{s+1} \downarrow 0$, $\gamma_2 < \gamma_1$, $\sum_{s=2}^\infty \gamma_s < \infty$, существует функция $f \in A_\varphi^p$ ($f(0) = 1$, $p \geq 2$), для которой при всех достаточно больших s

$$\prod_{k=1}^{n_s} \frac{1}{|z_k(f)|} = \gamma_{s+1}^{1/q} \Phi(n_s)^{1/p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\Phi(n_s) = \prod_{k=0}^{s+1} \gamma_k^{-p/q},$$

теорема 3 является непосредственным следствием леммы 7.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > -1$, $p \geq 2$. Для любой последовательности номеров n_s , $s = 0, 1, \dots$, такой, что $n_{s-1}/n_s \downarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, и

$$\sum_{s=1}^\infty \gamma_s < \infty, \quad \text{где} \quad \gamma_s = \left(\frac{n_{s-1}}{n_s} \right)^{((1+\alpha)/p)q},$$

существует функция $f \in A_\varphi^p$ ($f(0) = 1$), для которой

$$\prod_{k=1}^{n_s} \frac{1}{|z_k(f)|} \geq C \gamma_{s+1}^{1/q} n_s^{(\alpha+1)/p}, \quad C = \text{const} > 0.$$

Если в следствии 4 взять $\gamma_s \sim s^{-1}(\log s)^{-1-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$), $s \rightarrow \infty$, то получим

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|z_k(f)|} \geq C (\log n (\log \log n)^\varepsilon)^{-1/q} \cdot n^{(1+\alpha)/p}, \quad (6.6)$$

где n пробегает соответствующую этому выбору последовательности γ_s подпоследовательность номеров n_s .

ТЕОРЕМА 4. Для любого допустимого веса $\varphi(t)$, любой последовательности номеров n_s , $s = 0, 1, \dots$, такой, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\Phi(n_s)} \prod_{k=0}^{s-1} \Phi(n_k) \right)^{q/p} < \infty, \quad (6.7)$$

и такой, что члены ряда (6.7) убывают, существует функция $f \in A_{\varphi}^p$, $p \geq 2$ ($f(0) = 1$), для которой

$$1 - |z_{n_s}(f)| \sim \frac{1}{p} \cdot \frac{\log \Phi(n_s)}{n_s}, \quad s \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно сослаться на лемму 8, поскольку из соотношений (5.10) и (5.11) следует, что

$$\gamma_s = \left(\frac{1}{b_{s+1}} \prod_{k=1}^s b_k \right)^q = \left(\frac{1}{\Phi(\tilde{n}_s)} \prod_{k=0}^{s-1} \Phi(\tilde{n}_k) \right)^{q/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда $\varphi(t) = t^{-1}l(1/t)$, где $l(u)$ – медленно меняющаяся функция, точность оценки (2.4) в [8] установлена в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся медленно меняющаяся функция $l(u)$ и функция $f \in A_{\varphi}^p$ такие, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - |z_n(f)|)}{\log \Phi(n)} > \frac{1}{p(1 + \varepsilon)}.$$

Заметим, что выбор функции $l(u) = l_{\varepsilon}(u)$ в [8] таков, что если функция l имеет, например, вид $l(u) = (\log u)^{-\gamma}$, то $\gamma > c(p)/\varepsilon$. Поэтому для фиксированного γ ($\gamma > 1$) вопрос о точном значении постоянной $1/p$ в правой части оценки (2.4) с данным весом $\varphi(t) = t^{-1}(\log(e/t))^{-\gamma}$ оставался открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Формулировка теоремы 4 для случая $\varphi(t) = t^{\alpha}$, $\alpha > -1$ приведена во введении.

Авторы благодарят А. М. Седлецкого, поддержавшего рассмотрение затронутых здесь вопросов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, *Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР*, 1948, № 2, 3–40.
- [2] H. S. Shapiro, A. L. Shields, “On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 217–229.
- [3] Ch. Horowitz, “Zeros of functions in the Bergman spaces”, *Duke Math. J.*, **41** (1974), 693–710.
- [4] E. Beller, “Zeros of A^p functions and related classes of analytic functions”, *Israel J. Math.*, **22**:1 (1975), 68–80.
- [5] А. М. Седлецкий, “О проблеме Мюнца–Саса”, *Матем. заметки*, **39**:1 (1986), 97–107.
- [6] А. М. Седлецкий, “О нулях аналитических функций классов A_{α}^p ”, *Актуальные вопросы теории функций*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1987, 24–29.
- [7] А. М. Седлецкий, “Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, II”, *СМФН*, **6**, МАИ, М., 2003, 3–162.

- [8] Л. Н. Бирюков, “Распределение нулей функций из классов $A_{p,-1,l}$ ”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 5, 13–20.
- [9] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
- [10] J. Musielak, W. Orlicz, “On generalized variations. I”, *Studia Math.*, **18** (1959), 11–41.
- [11] С. В. Шведенко, “Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **23**, ВИНТИ, М., 1985, 3–124.

Е. А. Севастьянов

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

E-mail: sevastianov.e.a@mail.ru

Поступило

10.07.2008

Исправленный вариант

13.01.2009

А. А. Долгобородов

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

E-mail: kzander@mail.ru