Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Буи Тхе Ан, Нгуен Хоа Сон, Надежная устойчивость некоторого класса положительных квазиполиномов в банаховых пространствах, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 651–661

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:13:52

УДК 517

Надежная устойчивость некоторого класса положительных квазиполиномов в банаховых пространствах

Буи Тхе Ан, Нгуен Хоа Сон

В данной работе изучаются радиусы устойчивости положительных квазиполиномов, соответствующих линейным функциональным разностным уравнениям в бесконечномерных пространствах. Показано, что положительные, действительные и комплексные радиусы устойчивости совпадают. Кроме того, получены явные формулы для этих радиусов устойчивости и рассмотрен простой пример.

Библиография: 20 названий.

Памяти Тони Притчарда

1. Введение

За последние два десятилетия значительное внимание уделялось задачам надежной устойчивости динамических систем в бесконечномерных пространствах. Заинтересованный читатель отсылается к работам [1]–[11], где также содержится обширная библиография. Одной из наиболее важных задач изучения надежной устойчивости является вычисление радиуса устойчивости динамической системы при различных возмущениях параметров. В данной работе рассматривается задача надежной устойчивости для квазиполинома

$$H(s) = e^{-sh_1} A_1 + e^{-sh_2} A_2 + \cdots + e^{-sh_N} A_N, \quad (1)$$

соответствующего линейному функциональному разностному уравнению

$$x(t) = A_1 x(t - h_1) + A_2 x(t - h_2) + \cdots + A_N x(t - h_N), \quad (2)$$

где $A_i \in \mathcal{L}(X)$, $i \in \overline{N} := \{1, 2, \dots, N\}$. Напомним, что существует прямая зависимость между асимптотикой решений линейного функционального разностного уравнения (2) и асимптотикой решений соответствующих линейных нейтральных функциональных дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(x(t) - \sum_{i=1}^N A_i x(t - h_i) \right) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^N B_i x(t - h_i), \quad t \geq 0, \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{C}(X), \end{aligned} \quad (3)$$

заданных на общем пространстве Банаха X , где $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_N = h$ – заданные действительные числа, а $\mathcal{C}_X := C([-h, 0], X)$ – пространство непрерывных функций из $[-h, 0]$ в X с топологией равномерной сходимости. Изучение асимптотического поведения решений линейного функционального разностного уравнения (2) имеет фундаментальное значение для понимания асимптотического поведения решений линейных нейтральных функциональных дифференциальных уравнений вида (3) (см. [12]–[17]).

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводятся обозначения и предварительные результаты, которые потребуются в дальнейшем. Далее, сначала приводится теорема Перрона–Фробениуса для положительного квазиполинома (1). Наконец, в разделе 3 изучаются радиусы устойчивости квазиполинома (1). Доказано, что комплексные, действительные и положительные радиусы устойчивости квазиполинома (1) при возмущении аффинных параметров совпадают и могут быть вычислены с помощью простых формул.

2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся некоторые полезные результаты, которые используются в дальнейшем. Сначала напомним обозначения и определения.

Пусть X и Y – комплексные банаховы решетки, а X^+ и Y^+ – положительные конусы пространств X и Y , соответственно; пусть $\mathcal{L}^{\mathbb{R}}(X, Y)$ и $\mathcal{L}^+(X, Y)$ – множества всех действительных положительных линейных операторов из X в Y , соответственно.

Если $A \in \mathcal{L}(X)$, то $\sigma(A)$ – спектр оператора A , $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ – резольвентное множество оператора A и $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ – резольвента оператора A , определенная на $\rho(A)$. Спектральный радиус $r(A)$ определяется как

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Следующий результат хорошо известен в теории Перрона–Фробениуса ограниченных положительных операторов (см. [18]–[20]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $T \in \mathcal{L}^+(X)$. Тогда

- (i) $r(T) \in \sigma(T)$;
- (ii) $R(\lambda, T) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda > r(T)$.

Теперь перепишем квазиполином (1) в следующем виде:

$$H(s) = e^{-sh_1} A_1 + e^{-sh_2} A_2 + \dots + e^{-sh_N} A_N,$$

где $A_i \in \mathcal{L}(X)$, $i \in \overline{N} := \{1, 2, \dots, N\}$. Обозначим резольвентное множество квазиполинома $H(\cdot)$ через

$$\rho(H(\cdot)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (I - H(\lambda))^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

а спектральное множество квазиполинома $H(\cdot)$ через $\sigma(H(\cdot)) = \mathbb{C} \setminus \rho(H(\cdot))$. Введем спектральную абсциссу квазиполинома $H(\cdot)$ как

$$\mu_H = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(H(\cdot))\}.$$

Будем говорить, что квазиполином устойчив тогда и только тогда, когда $\mu_H < 0$. Важно отметить, что существует тесная связь между спектральными характеристиками квазиполинома (1) и асимптотическим поведением решений соответствующих линейных нейтральных функциональных дифференциально-разностных уравнений (2), см. [14], [15], [17].

Определим функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, положив $f(t) = r(\sum_{k=1}^N e^{-th_k} A_k)$, $t \in \mathbb{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$, $i \in \overline{N}$, то $f(\cdot)$ непрерывна и

$$t_1 \geq t_2 \Rightarrow f(t_2) \geq f(t_1). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (4) очевидна. Чтобы доказать, что функция $f(\cdot)$ непрерывна, зададим произвольные $s_0 \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^N e^{-(s_0+\delta)h_k} A_k \leq \sum_{k=1}^N e^{-s_0 h_k} A_k = \sum_{k=1}^N e^{\delta h_k} e^{-(s_0+\delta)h_k} A_k \leq e^{\delta h_N} \sum_{k=1}^N e^{-(s_0+\delta)h_k} A_k,$$

откуда следует, что

$$0 \leq f(s_0) - f(s_0 + \delta) \leq (e^{\delta h_N} - 1)f(s_0 + \delta) \leq (e^{\delta h_N} - 1)f(s_0). \quad (5)$$

Аналогично получим

$$\sum_{k=1}^N e^{-s_0 h_k} A_k \leq \sum_{k=1}^N e^{-(s_0-\delta)h_k} A_k = \sum_{k=1}^N e^{s_0 h_k} e^{-(s_0-\delta)h_k} A_k \leq e^{\delta h_N} \sum_{k=1}^N e^{-s_0 h_k} A_k,$$

откуда следует, что

$$0 \leq f(s_0 - \delta) - f(s_0) \leq (e^{\delta h_N} - 1)f(s_0). \quad (6)$$

Из (5) и (6) выводим, что функция $f(\cdot)$ непрерывна. Доказательство закончено.

Хорошо известно, что теоремы типа Перрона–Фробениуса являются основным инструментом анализа устойчивости и надежной устойчивости положительных линейных не зависящих от времени систем. Далее приведем новую теорему Перрона–Фробениуса для класса положительных квазиполиномов и используем полученные результаты для анализа устойчивости и надежной устойчивости квазиполинома (1). Напомним, что квазиполином (1) положительный, т.е. все операторы A_i , $i \in \overline{N}$, положительные. Важно также отметить, что если квазиполином (1) положительный, то и уравнение (2) положительное, т.е. для любой начальной функции

$$\varphi \in \mathcal{C}_D := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_X : \varphi(0) - \sum_{i=1}^N \varphi(-h_i) = 0 \right\}, \quad \varphi \geq 0,$$

соответствующее решение $x(\cdot, \varphi)$ уравнения (2) удовлетворяет условию $x(t, \varphi) \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$, $i \in \overline{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда

- (i) $\mu_H \in \sigma(H(\cdot))$;
- (ii) $(I - H(t))^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow t > \mu_H$;
- (iii) $t_1 \geq t_2 > \mu_H \Rightarrow (I - H(t_2))^{-1} \geq (I - H(t_1))^{-1} \geq 0$.

Доказательство очевидно, и мы его здесь не приводим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$, $i \in \overline{N}$. Для $E \in \mathcal{L}^+(Y, X)$, $y \in Y$, имеем

$$|(I - H(s))^{-1}Ey| \leq (I - H(\operatorname{Re} s))^{-1}E|y| \quad \text{для всех } \operatorname{Re} s > \mu_H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\operatorname{Re} s > \mu_H$, имеем $1 > r(H(\cdot))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(I - H(s))^{-1}Ey\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{H(s)^n}{\lambda^n} Ey \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} H(s)^n \left| \frac{Ey}{\lambda^n} \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H(\operatorname{Re} s)^n}{|\lambda^n|} E|y| \leq (I - H(\operatorname{Re} s))^{-1}E|y|. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Если $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$, $i \in \overline{N}$, то следующие утверждения эквивалентны:

- (i) $\mu_H < 0$;
- (ii) $r(\sum_{i=1}^N A_i) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что полином (1) устойчив, т.е. $\mu_H < 0$. В силу предложения 2.3 из $\mu_H < 0$ следует, что $H^{-1}(0) = (I - \sum_{i=1}^N A_i)^{-1} \geq 0$. Применяя теорему 2.1, получим $r(\sum_{i=1}^N A_i) < 1$.

Обратно, если $r(\sum_{i=1}^N A_i) < 1$, то $H^{-1}(0) = (I - \sum_{i=1}^N A_i) \geq 0$. В силу предложения 2.3 имеем $a_H < 0$. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Из предыдущего следствия получим важное замечание о том, что устойчивость положительного полинома не зависит от параметров запаздывания.

3. Радиусы устойчивости

За последние двадцать лет благодаря многочисленным применениям в технике автоматического регулирования задачам надежной устойчивости динамических систем уделялось большое внимание исследователей. При изучении этих задач понятие радиуса устойчивости оказалось эффективным инструментом и в настоящее время задаче вычисления радиуса устойчивости динамических систем в бесконечномерных пространствах уделяется значительное внимание, см. [6]–[8], [2], [10], [11]. В данном разделе приводятся некоторые результаты относительно надежной устойчивости полинома (1) при возмущении параметров.

3.1. Многократные возмущения. Теперь предположим, что квазиполином (1) устойчив, и каждый оператор A_i подвергается возмущениям вида

$$A_i \rightarrow A_i + D\Delta_i E_i, \quad i \in \overline{N}, \quad (7)$$

где $D \in \mathcal{L}(U, X)$, $E_i \in \mathcal{L}(X, Y_i)$, $i \in \overline{N}$, – заданные операторы, определяющие структуру возмущений, а $\Delta_i \in \mathcal{L}(Y_i, U)$, $i \in \overline{N}$, – неизвестные возмущающие операторы

$(U, Y_i, i \in \overline{N})$, – произвольные комплексные банаховы решетки). Квазиполином, находящийся под действием вышеописанных возмущений, имеет вид

$$H_{\Delta}(s) = e^{-sh_1}(A_1 + D\Delta_1 E_1) + e^{-sh_2}(A_2 + D\Delta_2 E_2) + \dots + e^{-sh_N}(A_N + D\Delta_N E_N). \quad (8)$$

Величина каждого возмущения $\Delta = (\Delta_i)_{i \in \overline{N}}$ измеряется функцией

$$\gamma(\Delta) = \sum_{i \in \overline{N}} \|\Delta_i\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть квазиполином (1) устойчив. Комплексные, действительные и положительные радиусы устойчивости квазиполинома (1), находящегося под действием возмущений вида (7), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}} &= \inf\{\gamma(\Delta) : \Delta_i \in \mathcal{L}(Y_i, U), i \in \overline{N}, \mu_{H_{\Delta}} \geq 0\}, \\ r_{\mathbb{R}} &= \inf\{\gamma(\Delta) : \Delta_i \in \mathcal{L}^{\mathbb{R}}(Y_i, U), i \in \overline{N}, \mu_{H_{\Delta}} \geq 0\}, \\ r_{\mathbb{C}} &= \inf\{\gamma(\Delta) : \Delta_i \in \mathcal{L}^+(Y_i, U), i \in \overline{N}, \mu_{H_{\Delta}} \geq 0\}, \end{aligned}$$

соответственно, где мы условились, что $\inf \emptyset = \infty$.

При $i \in \overline{N}$ пусть

$$G_i(s) = E_i(I - H(s))^{-1}D, \quad s \in \rho(H(\cdot)),$$

– передаточная функция, соответствующая полиному (8).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\mu_H < 0$ и $\mu_H < \alpha < 0$. Если операторы $\Delta_i \in \mathcal{L}(Y_i, U)$, $i \in \overline{N}$, удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^N \|\Delta_i\| < \frac{1}{\max_{i \in \overline{N}} \sup_{\operatorname{Re} s \geq \alpha} \|e^{-sh_i} G_i(s)\|}, \quad (9)$$

то $\mu_{H_{\Delta}} < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Delta = (\Delta_i)_{i \in \overline{N}}$, $\Delta_i \in \mathcal{L}(Y_i, U)$, $i \in \overline{N}$, – дестабилизирующее возмущение, удовлетворяющее условию (9). Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^N e^{-sh_i} \Delta_i E_i (I - H(s))^{-1} D < 1,$$

откуда следует, что оператор $I - \sum_{i=1}^N e^{-sh_i} \Delta_i E_i (I - H(s))^{-1} D$ обратим. Следовательно, оператор $I - \sum_{i=1}^N e^{-sh_i} D \Delta_i E_i (I - H(s))^{-1}$ также обратим. После несложных вычислений получим

$$\left[I - H(s) - \sum_{i=1}^N e^{-sh_i} D \Delta_i E_i \right]^{-1} = (I - H(s))^{-1} \left(I - \sum_{i=1}^N e^{-sh_i} D \Delta_i E_i (I - H(s))^{-1} \right)^{-1},$$

откуда следует, что $s \in \rho(I - H(s) - \sum_{i=1}^N e^{-sh_i} D \Delta_i E_i)$ или, что эквивалентно, $s \in \rho(H_{\Delta}(\cdot))$ для всех $\operatorname{Re} s \geq \alpha$. Таким образом, получен искомый результат, $\mu_{H_{\Delta}} \leq \alpha < 0$, что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $\mu_H < 0$ и $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$. Тогда имеем

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_+ = \frac{1}{\max_{i \in \mathbb{N}} \|G_i(0)\|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3.2 получим

$$r_{\mathbb{C}} \geq \frac{1}{\max_{i \in \mathbb{N}} \sup_{\operatorname{Re} s \geq \alpha} \|e^{-sh_i} G_i(s)\|} \quad \text{для всех } \mu_H < \alpha < 0.$$

Более того, из утверждения (iii) предложения 2.4 следует, что

$$\sup_{\operatorname{Re} s \geq \alpha} \|e^{-sh_i} G_i(s)\| = e^{-\alpha h_i} \|G_i(\alpha)\|.$$

Значит,

$$r_{\mathbb{C}} \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{1}{\max_{i \in \mathbb{N}} \|e^{-\alpha h_i} G_i(\alpha)\|} = \frac{1}{\max_{i \in \mathbb{N}} \|G_i(0)\|}.$$

Остается показать, что

$$r_+ \leq \frac{1}{\max_{i \in \mathbb{N}} \|G_i(0)\|}.$$

Действительно, пусть произвольным образом заданы $i_0 \in \overline{N}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $u \in U^+$ такое, что $\|u\| = 1$ и $\|G_{i_0}(0)\| \geq \|G_{i_0}(0)u\| \geq \|G_{i_0}(0)\| - \varepsilon$. Из теоремы Хана–Банаха для положительных операторов, см. [20; с. 249], следует, что существует $y_{i_0}^* \in Y_{i_0}^*$ такой, что $\|y_{i_0}^*\| = 1$ и $y_{i_0}^*(G_{i_0}(0)u) = \|G_{i_0}(0)u\|$. Пусть $\overline{\Delta}_{i_0}: Y_{i_0} \rightarrow U$ определяется соотношением

$$\overline{\Delta}_{i_0} y = \frac{1}{\|G_{i_0}(0)u\|} y_{i_0}^*(y) u \quad \text{для всех } y \in Y_{i_0}.$$

Тогда $\overline{\Delta}_{i_0} \in \mathcal{L}^+(Y_{i_0}, U)$ и

$$\|\overline{\Delta}_{i_0}\| \leq \frac{1}{\|G_{i_0}(0)u\|} \leq \frac{1}{\|G_{i_0}(0)\| - \varepsilon}.$$

Теперь введем возмущение $\Delta = (\Delta_i)_{i \in \overline{N}}$, положив

$$\Delta_i = \begin{cases} \overline{\Delta}_{i_0}, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0, \end{cases} \quad i \in \overline{N}.$$

Тогда $\gamma(\Delta) = \|\overline{\Delta}\|$ и $[I - \sum_{i=1}^N (A_i + D\Delta_i E_i)]\hat{x} = 0$, где $\hat{x} = (I - H(0))^{-1}Du$. Отсюда следует, что $0 \in \sigma(H_{\Delta}(\cdot))$ и, таким образом, $\mu_{H_{\Delta}} \geq 0$. Как следствие, из определения r_+ следует, что

$$r_+ \leq \frac{1}{\|G_{i_0}(0)\|}. \quad (10)$$

Доказательство закончено.

3.2. Аффинные возмущения. Теперь предположим, что квазиполином (1) устойчив и что операторы коэффициентов системы квазиполинома (1) подвергаются возмущениям вида

$$A_i \mapsto A_i + \sum_{j=1}^K \delta_{ij} A_{ij}, \quad i \in \overline{N}, \quad (11)$$

где $A_{ij} \in \mathcal{L}^+(X)$, $j \in \overline{K}$, $i \in \overline{N}$, – заданные операторы и δ_{ij} , $i \in \overline{N}$, $j \in \overline{K} := \{1, 2, \dots, K\}$, – скалярные параметры. Теперь можно записать возмущенный квазиполином в виде

$$H_\delta(s) = e^{-sh_1} \left(A_1 + \sum_{j=1}^K \delta_{0j} A_{0j} \right) + \dots + e^{-sh_N} \left(A_N + \sum_{j=1}^K \delta_{Nj} A_{Nj} \right). \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть квазиполином (1) устойчив. Его *комплексный, действительный и положительный радиусы* при возмущении вида (11) определяются соотношениями

$$\begin{aligned} r_{\mathbb{C}}^\delta &= \inf \{ \|\delta\|_\infty : \delta = (\delta_{ij})_{i \in \overline{N}, j \in \overline{K}} \in \mathbb{C}^{K \times N}, \mu_{H_\delta} \geq 0 \}, \\ r_{\mathbb{R}}^\delta &= \inf \{ \|\delta\|_\infty : \delta = (\delta_{ij})_{i \in \overline{N}, j \in \overline{K}} \in \mathbb{R}^{K \times N}, \mu_{H_\delta} \geq 0 \}, \\ r_+^\delta &= \inf \{ \|\delta\|_\infty : \delta = (\delta_{ij})_{i \in \overline{N}, j \in \overline{K}} \in \mathbb{R}_+^{K \times N}, \mu_{H_\delta} \geq 0 \}, \end{aligned}$$

соответственно, где мы условились, что $\inf \emptyset = \infty$ и

$$\|\delta\|_\infty = \max \{ |\delta_{ij}| : i \in \overline{N}, j \in \overline{K} \}.$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть квазиполином (1) устойчив. Тогда имеем

$$r_{\mathbb{C}}^\delta \geq \frac{1}{\sup_{\substack{\operatorname{Re} s \geq \alpha, |z_{ij}| \leq 1, \\ i \in \overline{N}, j \in \overline{K}}} r[(I - H(s))^{-1} (\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})]}$$

для любого произвольного $\mu_H < \alpha < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\delta = (\delta_{ij})_{i \in \overline{N}, j \in \overline{K}}$ – возмущение такое, что

$$\|\delta\|_\infty < \frac{1}{\sup_{\substack{\operatorname{Re} s \geq \alpha, |z_{ij}| \leq 1, \\ i \in \overline{N}, j \in \overline{K}}} r[(I - H(s))^{-1} (\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})]}.$$

Отсюда следует, что

$$r \left[(I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} \|\delta\|_\infty z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right] < 1 \quad (13)$$

$$\text{для всех } \operatorname{Re} s \geq \alpha, \quad |z_{ij}| \leq 1, \quad i \in \overline{N}, \quad j \in \overline{K}.$$

Если выбрать $z_{ij} = \delta_{ij} / \|\delta\|_\infty$, $i \in \overline{N}$, $j \in \overline{K}$, то $|z_{ij}| \leq 1$, $i \in \overline{N}$, $j \in \overline{K}$. Из (13) следует, что

$$r \left[(I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} \delta_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right] < 1 \quad \text{для всех } \operatorname{Re} s \geq \alpha.$$

Следовательно, оператор $[I - (I - H(s))^{-1}(\sum_{i,j} \delta_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})]^{-1}$ существует для всех $\operatorname{Re} s \geq \alpha$. С другой стороны, имеем

$$\left(I - H(s) - \sum_{i,j} \delta_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) = (I - H(s)) \left[I - (I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} \delta_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right].$$

Из вышесказанного следует, что оператор $H_\delta(s) = H(s) - (\sum_{i,j} \delta_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})$ обратим для всех $\operatorname{Re} s \geq \alpha$, откуда следует, что $\mu_{H_\delta} \leq \alpha < 0$. Таким образом, по определению комплексного радиуса $r_{\mathbb{C}}^\delta$ имеем

$$r_{\mathbb{C}}^\delta \geq \frac{1}{\sup_{\substack{\operatorname{Re} s \geq \alpha, |z_{ij}| \leq 1, \\ i \in \bar{N}, j \in \bar{K}}} r[(I - H(s))^{-1}(\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})]}.$$

Доказательство завершено.

ТЕОРЕМА 3.6. *Предположим, что квазиполином устойчив, $A_i \in \mathcal{L}^+(X)$, $i \in \bar{N}$, и все операторы A_{ij} , $i \in \bar{N}$, $j \in \bar{K}$, положительны. Тогда*

$$r_{\mathbb{C}}^\delta = r_{\mathbb{R}}^\delta = \frac{1}{r[(I - H(0))^{-1}B]}, \quad (14)$$

где $B = \sum_{i \in \bar{N}, j \in \bar{K}} A_{ij}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, применяя теорему 3.5, получим

$$r_{\mathbb{C}}^\delta \geq \frac{1}{\sup_{\substack{\operatorname{Re} s \geq \alpha, |z_{ij}| \leq 1, \\ i \in \bar{N}, j \in \bar{K}}} r[(I - H(s))^{-1}(\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij})]},$$

для всех $\mu_H < \alpha < 0$.

Для произвольных $x \in X$, $n \in \bar{N}$, $\operatorname{Re} s \geq \alpha$, $|z_{ij}| \leq 1$, $i \in \bar{N}$, $j \in \bar{K}$, в силу предложения 2.4 имеем

$$\begin{aligned} \left| \left[(I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right]^n x \right| &\leq \left[(I - H(\operatorname{Re} s))^{-1} \left(\sum_{i,j} |z_{ij}| e^{-\operatorname{Re} sh_i} |A_{ij}| \right) \right]^n |x| \\ &\leq \left[(I - H(\alpha))^{-1} \left(\sum_{i,j} e^{-\alpha h_i} A_{ij} \right) \right]^n |x|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left\| \left[(I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right]^n \right\| \leq \left\| \left[(I - H(\alpha))^{-1} \left(\sum_{i,j} e^{-\alpha h_i} A_{ij} \right) \right]^n \right\|,$$

откуда следует, что

$$r \left[(I - H(s))^{-1} \left(\sum_{i,j} z_{ij} e^{-sh_i} A_{ij} \right) \right] \leq r \left[(I - H(\alpha))^{-1} \left(\sum_{i,j} e^{-\alpha h_i} A_{ij} \right) \right].$$

Поэтому

$$r_{\mathbb{C}}^\delta \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \frac{1}{r[(I - H(\alpha))^{-1}(\sum_{i,j} e^{-\alpha h_i} A_{ij})]} = \frac{1}{r[(I - H(0))^{-1}B]}.$$

Далее, чтобы завершить доказательство, нам нужно показать, что

$$r_+^\delta \leq \frac{1}{r[(I - H(0))^{-1}B]}.$$

Положим, что

$$s_0 = \frac{1}{r[(I - H(0))^{-1}B]}$$

или, что эквивалентно,

$$r \left[(I - H(0))^{-1} \left(\sum_{i,j} s_0 A_{ij} \right) \right] = 1.$$

Тогда оператор $(I - H(0))^{-1}(\sum_{i,j} s_0 A_{ij})$ положительный, из теоремы 2.1 следует, что $1 \in \sigma[(I - H(0))^{-1}(\sum_{i,j} s_0 A_{ij})]$. После несложных вычислений, получим

$$\left[I - H(0) - \sum_{i,j} s_0 A_{ij} \right] = (I - H(0)) \left[I - (I - H(0))^{-1} \left(\sum_{i,j} s_0 A_{ij} \right) \right].$$

Поскольку оператор $I - (I - H(0))^{-1}(\sum_{i,j} s_0 A_{ij})$ не является обратимым, ясно, что оператор $I - H(0) - \sum_{i,j} s_0 A_{ij}$ также не является обратимым. Полагая $\delta_{ij} = s_0$ для всех $i \in \bar{N}$, $j \in \bar{K}$, получим $0 \in \sigma(H_\delta(\cdot))$ и $\|\delta\|_\infty = s_0$. Из определения положительного радиуса устойчивости мы получаем искомый результат

$$r_+^\delta \leq \frac{1}{r[(I - H(0))^{-1}B]}.$$

Доказательство завершено.

Проиллюстрируем полученные результаты на следующем примере.

ПРИМЕР. Пусть $X = l^1(\mathbb{C})$ – пространство всех последовательностей $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < +\infty$. Тогда X – пространство комплексных банаховых решеток, если оно имеет норму

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|, \quad x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$$

и модуль

$$|x| = (|x_i|)_{i \in \mathbb{N}}.$$

Рассмотрим следующий положительный квазиполином:

$$H(s) = e^{sh_1} A_1 + e^{sh_2} A_2,$$

где A_1, A_2 – положительные операторы на X , определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 x &= \left(\frac{1}{12} x_1, \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{12} x_2, \dots, \frac{1}{3} x_n + \frac{1}{12} x_{n+1}, \dots \right), & x &= (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X, \\ A_2 x &= \left(\frac{1}{4} x_1, \frac{1}{6} x_1 + \frac{1}{4} x_2, \dots, \frac{1}{6} x_n + \frac{1}{4} x_{n+1}, \dots \right), & x &= (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $r(A_1 + A_2) < 1$. В силу следствия 2.5 имеем $\mu_H < 0$. Теперь предположим, что A_1, A_2 подвергаются возмущениям вида

$$\begin{aligned} A_1 &\hookrightarrow A_1 + D\Delta_1 E_1, \\ A_2 &\hookrightarrow A_2 + D\Delta_2 E_2, \end{aligned}$$

где $D = I_X$ и $E_1, E_2 \in \mathcal{L}^+(X)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} E_1 x &= (0, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots), & x &= (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X, \\ E_2 x &= (x_1, 0, 0, \dots, 0, \dots), & x &= (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X. \end{aligned}$$

Таким образом, применяя теорему о радиусах устойчивости положительных систем, получим

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_+ = \frac{1}{\max_{i \in \{0,1\}} \|G_i(0)\|}.$$

Можно вычислить

$$\begin{aligned} \|G_1(0)\| &= \|E_1(I - A)^{-1}D\| = 6, \\ \|G_2(0)\| &= \|E_2(I - A)^{-1}D\| = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = r_+ = \frac{1}{6}.$$

Далее, предположим, что операторы A_i , $i = 1, 2$, подвергаются аффинным возмущениям вида

$$\begin{aligned} A_1 &\hookrightarrow A_1 + \delta_{11}A_{11} + \delta_{12}A_{12}, \\ A_2 &\hookrightarrow A_2 + \delta_{21}A_{21} + \delta_{22}A_{22}, \end{aligned}$$

где $A_{ij} \in \mathcal{L}^+(X)$, $i, j = 1, 2$, определены соотношениями

$$\begin{aligned} A_{11}x &= \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{3}x_2, \dots, 0, \dots\right), & A_{12}x &= \left(0, \frac{1}{2}x_2, 0, \dots, 0, \dots\right), \\ A_{21}x &= \left(\frac{1}{3}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, 0, \dots\right), & A_{22}x &= \left(\frac{7}{6}x_1, \frac{2}{3}x_2, 0, \dots, 0, \dots\right). \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.6 о положительных радиусах устойчивости в случае аффинных возмущений, имеем

$$r_{\mathbb{C}}^{\delta} = r_{\mathbb{R}}^{\delta} = r_+^{\delta} = \frac{1}{r[(I - A_0 - A_1)^{-1}(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22})]}.$$

После несложных вычислений получим

$$r[(I - A_0 - A_1)^{-1}(A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22})] = 3.$$

Таким образом, имеем

$$r_{\mathbb{C}}^{\delta} = r_{\mathbb{R}}^{\delta} = r_+^{\delta} = \frac{1}{3}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Fischer, “Stability radii of infinite-dimensional positive systems”, *Math. Control Signals Systems*, **10**:3 (1997), 223–236.
- [2] D. Hinrichsen, A. J. Pritchard, *Mathematical Systems Theory. v. 1: Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*, Texts Appl. Math., **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] B. T. Anh, N. K. Son, “Stability radii of positive higher order difference system in infinite dimensional spaces”, *Systems Control Lett.*, **57**:10 (2008), 822–827.
- [4] B. T. Anh, N. K. Son, D. D. X. Thanh, “Stability radii of delay difference systems under affine parameter perturbations in infinite dimensional spaces”, *Appl. Math. Comput.*, **202**:2 (2008), 562–570.
- [5] B. T. Anh, N. K. Son, “Stability radii of positive linear systems under affine parameter perturbations in infinite dimensional spaces”, *Positivity*, **12**:4 (2008), 677–690.
- [6] B. T. Anh, N. K. Son, D. D. X. Thanh, “Robust stability of Metzler operator and delay equation in $L^p([-h, 0]; X)$ ”, *Vietnam J. Math.*, **34**:3 (2006), 357–368.
- [7] А. В. Булатов, Ф. Даймонд, “Оценки вещественного структурного радиуса устойчивости линейных бесконечномерных систем”, *Автомат. и телемех.*, 2002, № 5, 24–33.
- [8] Н. А. Бобылев, А. В. Булатов, “Оценка вещественного радиуса устойчивости линейных бесконечномерных систем с непрерывным временем”, *Нелинейная динамика и управление. т. 1*, Физматлит, М., 2001, 77–86.
- [9] S. Clark, Yu. Latushkin, S. Montgomery-Smith, T. Randolph, “Stability radius and internal versus external stability in Banach spaces: an evolution semigroup approach”, *SIAM J. Control Optim.*, **38**:6 (2000), 1757–1793.
- [10] D. Hinrichsen, A. J. Pritchard, “Robust stability of linear evolution operators on Banach spaces”, *SIAM J. Control Optim.*, **32**:6 (1994), 1503–1541.
- [11] D. Hinrichsen, A. J. Pritchard, “Stability radii of linear systems”, *Systems Control Lett.*, **7**:1 (1986), 1–10.
- [12] M. Adimy, K. Ezzinbi, “Local existence and linearized stability for partial functional-differential equations”, *Dynam. Systems Appl.*, **7**:3 (1998), 389–403.
- [13] M. Adimy, K. Ezzinbi, “A class of linear partial neutral functional-differential equations with nondense domain”, *J. Differential Equations*, **147**:2 (1998), 285–332.
- [14] J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [15] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, “Strong stabilization of neutral functional differential equations”, *IMA J. Math. Control Inform.*, **19**:1–2 (2002), 5–23.
- [16] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther, *Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Appl. Math. Sci., **110**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [17] W. Michiels, T. Vyhldal, “An eigenvalue based approach for the stabilization of linear time-delay systems of neutral type”, *Automatica J. IFAC*, **41**:6 (2005), 991–998.
- [18] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Grundlehren Math. Wiss., **215**, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [19] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [20] A. C. Zaanen, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

Буи Тхе Ан

Pedagogical University, Ho Chi Minh City, Вьетнам

E-mail: bt_anh80@yahoo.com

Поступило

28.06.2008

Исправленный вариант

11.11.2008

Нгуен Хоа Сон

Hanoi Institute of Mathematics, Вьетнам