Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Ласурия, φ -Сильная суммируемость рядов Фурье–Лапласа функций класса $L(S^{m-1})$, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 144–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:54:00

φ -Сильная суммируемость рядов Фурье–Лапласа функций класса $L(S^{m-1})$

Р. А. Ласурия

В работе установлена φ -сильная суммируемость почти всюду на единичной сфере S^{m-1} ряда Фурье–Лапласа произвольной функции класса $L(S^{m-1})$.

1. Пусть $L(S^{m-1})$ – это пространство функций, суммируемых на единичной сфере $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ с центром в начале координат,

$$S^{(\lambda)}[f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{S^{m-1}} f(y) P_n^{(\lambda)}(\cos \gamma) dS(y) \quad (1)$$

– ряд Фурье–Лапласа функции $f \in L(S^{m-1})$, $\lambda = (m-2)/2$, $m \geq 3$,

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f; x) = \frac{1}{A_n^\lambda} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\lambda-1} S_k^{(\lambda)}(f; x)$$

– средние Чезаро (C, λ) ряда (1), $S_n^{(\lambda)}(f; x)$ – частная сумма порядка n ряда (1), $\cos \gamma = (x, y)$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in S^{m-1}$, $P_n^{(\lambda)}(t)$ – многочлены Гегенбауэра, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция. Пусть, далее,

$$\Delta_k^{(n)} = \left[\frac{k\pi}{2(n+1)}, \frac{(k+1)\pi}{2(n+1)} \right], \quad k = 0, \dots, 2n+1,$$

$$g_x(\gamma) = \int_{(x,y)=\cos \gamma} [f(y) - f(x)] dt(y),$$

$$h_{n,p}^{(\lambda)}(f, x) = \left\{ \sum_{k=0}^{2n+1} \left[\left(\frac{n+1}{k+1} \right)^{2\lambda+1} \int_{\Delta_k^{(n)}} |g_x(\gamma)| d\gamma \right]^p \right\}^{1/p}, \quad p > 1,$$

$$G_p^* = G_p^*(f) = \left\{ x \in S^{m-1} : \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f, x^*) = 0 \right\},$$

где x^* – точка, диаметрально противоположная точке x .

В работе [1] приводятся такие утверждения.

ЛЕММА А. Для любой функции $f \in L(S^{m-1})$, $m \geq 3$, и любого $p > 1$ почти всюду на S^{m-1}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,p}^{(\lambda)}(f; x) = 0.$$

Утверждение леммы А является сферическим аналогом известного утверждения Габисония [2].

ТЕОРЕМА А. Если $f \in L(S^{m-1})$, то для любого $q_1 \in (0, q]$, $q \geq 2$, $q = p/(p-1)$, в каждой точке $x \in G_p^*$, т.е. почти всюду на S^{m-1} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x)|^{q_1} = 0.$$

В настоящей статье анонсируется, в частности, результат (теорема 2), согласно которому для любой функции $f \in L(S^{m-1})$, $m \geq 3$, почти всюду на S^{m-1} имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(|\sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x)|) = 0, \quad (2)$$

где $\varphi(u) = \exp |u| - 1$.

Аналоги теоремы A и соотношения (2) для тригонометрических рядов Фурье функций одной переменной с заменой величин $\sigma_k^{(\lambda)}(f; x)$ на суммы Фурье $S_k(f; x)$ ранее были доказаны в работах [2]–[4].

При установлении соотношения (2) привлекаются методы, основанные на поведении мажорантных операторов сильных средних рядов Фурье–Лапласа, предложенные Родным при исследовании аналогичных вопросов сильной суммируемости тригонометрических рядов Фурье [4]. Следуя этому пути, положим $\overline{\Delta}_k^{(n)} = [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, \dots, n-1$, $\chi_{\overline{\Delta}_k^{(n)}}(t)$ – характеристическая функция множества $\overline{\Delta}_k^{(n)}$, и определим ступенчатую функцию

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f; x; t) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k^{(\lambda)}(f; x) \chi_{\overline{\Delta}_k^{(n)}}(t),$$

$x \in S^{m-1}$, $t \in [0, 1]$.

Для $g \in L([0, 1])$, $I \subset [0, 1]$ обозначим $g_I = |I|^{-1} \int_I g(s) ds$, $\wp(g) = \sup_I (|g(s) - g_I|)_I$.

Пусть $\text{ВМО}([0, 1])$ – непериодический аналог пространства функций ограниченной средней осцилляции с конечной нормой

$$\|g\|_{\text{ВМО}} = \wp(g) + \left| \int_0^1 g(s) ds \right|.$$

Обозначим через L_φ пространство Орлича с нормой

$$\|g\|_{L_\varphi} = \inf \left\{ \alpha : \alpha > 0, \int_0^1 \varphi \left(\frac{|g(t)|}{\alpha} \right) dt \leq 1 \right\}$$

и с φ -функцией $\varphi(u) = \exp |u| - 1$. Тогда (2) запишется в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (\sigma_k^{(\lambda)}(f; x) - f(x)) \chi_{\overline{\Delta}_k^{(n)}}(t) \right\|_{L_\varphi} = 0.$$

Для функции $f \in L(S^{m-1})$ определим квазилинейный оператор

$$B^{(\lambda)} f(x) = \sup_{n \geq 0} \|\sigma_{2^n}^{(\lambda)}(f; x; t)\|_{\text{ВМО}}.$$

2. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $B^{(\lambda)} f$ имеет слабый $\text{тип } (1, 1)$, т.е.

$$\text{mes}\{x \in S^{m-1} : B^{(\lambda)} f(x) > y\} \leq \frac{K}{y} \int_{S^{m-1}} |f(x)| dS(x), \quad K = \text{const} > 0.$$

Основная часть доказательства теоремы 1 заключается в установлении того, что почти всюду на S^{m-1} имеем $B^{(\lambda)} f(x) < \infty$. Последнее базируется на утверждении, вытекающем из леммы A, а именно: если

$$h_2^{(\lambda)} f(x) \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{n \geq 0} \left\{ \sum_{k=0}^{2^{n+1}} \left[\left(\frac{n+1}{k+1} \right)^{2\lambda+1} \int_{\Delta_k^{(n)}} |g_x(\gamma)| d\gamma \right]^2 \right\}^{1/2},$$

то для любой функции $f \in L(S^{m-1})$ почти всюду на S^{m-1} выполнено $h_2^{(\lambda)} f(x) < \infty$.

Неравенство Джона–Ниренберга (см. [5]) позволяет установить включение $L_\varphi \supset \text{ВМО}$ (см. [4]) и неравенство $\|g\|_{L_\varphi} \leq K \|g\|_{\text{ВМО}}$. Из этого неравенства, теоремы 1 и того, что L_φ – идеальная структура, вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для любой функции $f \in L(S^{m-1})$, $m \geq 3$, почти всюду на S^{m-1} справедливо равенство (2).*

В [4] было отмечено, что включение $\text{ВМО} \subset L_\varphi$ обладает тем экстремальным свойством, что если E – симметричное пространство и $\text{ВМО} \subset E$, то $L_\varphi \subseteq E$.

Автор выражает благодарность профессору Б. И. Голубову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. А. Ласурия, *Укр. матем. журн.*, **54**:10 (2002), 1437–1439. [2] О. Д. Габисония, *Матем. заметки*, **14**:5 (1973), 615–626. [3] Л. Д. Гоголадзе, *Матем. сб.*, **135**:2 (1988), 158–168. [4] В. А. Родин, *Anal. Math.*, **16**:4 (1990), 291–302. [5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

Р. А. Ласурия

Абхазский государственный университет, г. Сухум

Поступило

03.07.2008