Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Харитонов, О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 1, 126–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:32:43

О геометрии локально конформно почти косимплектических многообразий

С. В. Харитонова

Получена полная группа структурных уравнений локально конформно почти косимплектической (далее $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -) структуры и вычислены компоненты тензора римановой кривизны на пространстве присоединенной G -структуры. Более подробно изучены нормальные $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -структуры. В частности, доказано, что на нормальных $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -многообразиях выполняются контактные аналоги второго и третьего тождеств кривизны А. Грея, причем аналог первого тождества Грея выполняется тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим.

Библиография 17 названий.

Введение. Изучение свойств почти контактных метрических многообразий, инвариантных относительно конформных преобразований структуры, привлекает значительное внимание исследователей. В частности, большое число работ посвящено исследованию конформно-инвариантных свойств почти косимплектических многообразий ([1]–[3] и др.). В нашей работе показано, что само свойство почти косимплектичности, т.е. замкнутости контактной и фундаментальной форм структуры, не сохраняется при нетривиальных конформных преобразованиях структуры. Поэтому при рассмотрении данной проблематики естественно перейти к изучению более общего класса структур, а именно, класса так называемых *локально конформно почти косимплектических* (короче $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -) *структур*, который является предметом исследования настоящей работы.

В работе получена полная группа структурных уравнений $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -структуры и вычислены компоненты тензора римановой кривизны [4], [5] на пространстве присоединенной G -структуры. Более подробно изучены нормальные $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -структуры. В частности, доказано, что на нормальных $lc\mathcal{AC}_\mathcal{G}$ -многообразиях выполняются контактные аналоги второго и третьего тождеств кривизны Грея [6], причем аналог первого тождества Грея выполняется тогда и только тогда, когда многообразие является косимплектическим.

Предварительные сведения. Пусть M^{2n+1} – гладкое нечетномерное многообразие размерности свыше трех; $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1} ; $X(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M^{2n+1} . *Почти*

контактной структурой на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры; ξ – векторное поле, называемое характеристическим; Φ – поле тензора типа $(1; 1)$, называемое структурным эндоморфизмом модуля $X(M)$. При этом

- 1) $\eta(\xi) = 1$;
- 2) $\eta \circ \Phi = 0$;
- 3) $\Phi(\xi) = 0$;
- 4) $\Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi$.

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ такая, что

$$\langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in X(M),$$

то четверка (η, ξ, Φ, g) называется *почти контактной метрической* (короче, $\mathcal{AC}$ -структурой). Тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$ кососимметричен и называется *фундаментальной формой* $\mathcal{AC}$ -структуры. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим* ($\mathcal{AC}$ -) *многообразием*.

В $C^\infty(M)$ -модуле $X(M)$ гладких векторных полей на $\mathcal{AC}$ -многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора

$$\mathfrak{l} = \text{id} - \eta \otimes \xi = -\Phi^2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{m} = \eta \otimes \xi = \text{id} + \Phi^2$$

на распределения $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi = \ker \eta$ и $\mathcal{M} = \ker \Phi = L(\xi)$ размерностей $2n$ и 1 соответственно, причем $X(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Более того, комплексификация модуля $X(M)$, именно $X^C(M) = \mathbb{C} \otimes X(M)$ распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ^C :

$$X^C(M) = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0,$$

где $D_\Phi^0 = \mathcal{M}^C$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы

$$\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \bar{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi), \quad \mathfrak{m} = \text{id} + \Phi^2.$$

Доказано [5], что к $(2n+1)$ -мерному $\mathcal{AC}$ -многообразию, как метрическому f -многообразию дефекта 1, внутренним образом присоединяется G -структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$. Тотальное пространство этой G -структуры состоит из модифицированных A -реперов, т.е. комплексных реперов вида

$$(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_a)$, $(e_1, \dots, e_n)$ – комплексный ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_p$, как C -модуля, $p \in M$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в них принимают вид

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Здесь и далее индексы i, j, k пробегает значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$. Обозначим компоненты формы смещения через $\{\omega^i\}$ и введем обозначения $\omega^{\hat{a}} = \omega_a$, $\omega^0 = \omega_0 = \omega$.

Известно [5], что для $\mathcal{AC}$ -многообразия верно

$$\pi^*(\eta) = \omega, \quad (2)$$

$$\pi^*(\Omega) = -\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a = -\sqrt{-1}\delta_a^b \omega^a \wedge \omega_b, \quad (3)$$

где π – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры.

$\mathcal{AC}$ -Структура называется *нормальной* [7], если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]).$$

Локально конформно почти косимплектические многообразия. *Конформным преобразованием* $\mathcal{AC}$ -структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M [8] называется переход от S к $\mathcal{AC}$ -структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, при этом

$$\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta, \quad \tilde{\xi} = e^\sigma\xi, \quad \tilde{\Phi} = \Phi, \quad \tilde{g} = e^{-2\sigma}g,$$

где σ – определяющая функция соответствующего конформного преобразования. Если $\sigma = \text{const}$, конформное преобразование называется *тривиальным* или *гомотетией*. $\mathcal{AC}$ -Структура S на многообразии M называется *локально конформно почти косимплектической*, короче *lc $\mathcal{AC}$ -структурой*, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру. Назовем это преобразование *локально конформным*. Многообразие, на котором фиксирована *lc $\mathcal{AC}$ -структура*, называется *lc $\mathcal{AC}$ -многообразием*.

Напомним [9], [10], что почти контактная метрическая структура $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ называется *почти косимплектической* ($\mathcal{AC}$ -) *структурой*, если

$$1) \quad d\eta = 0;$$

$$2) \quad d\Omega = 0.$$

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической*.

Очевидно,

$$\tilde{\Omega}(X, Y) = \tilde{g}(X, \Phi Y) = e^{-2\sigma}g(X, \Phi Y) = e^{-2\sigma}\Omega(X, Y),$$

т.е. $\tilde{\Omega} = e^{-2\sigma}\Omega$.

Из того, что $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$ – $\mathcal{AC}$ -структура, следует, что

$$1) \quad d\tilde{\eta} = 0;$$

$$2) \quad d\tilde{\Omega} = 0.$$

Имеем

$$d\tilde{\eta} = d(e^{-\sigma}\eta) = -e^{-\sigma}d\sigma \wedge \eta + e^{-\sigma}d\eta = 0;$$

значит,

$$\begin{aligned} d\sigma \wedge \eta &= d\eta, \\ d\tilde{\Omega} &= d(e^{-2\sigma}\Omega) = -2e^{-2\sigma} d\sigma \wedge \Omega + e^{-2\sigma} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и, следовательно,

$$2d\sigma \wedge \Omega = d\Omega. \quad (5)$$

Итак, для $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий определяющими являются соотношения (4) и (5).

Покажем, что априори определенная локально 1-форма $d\sigma$ с компонентами $\{\sigma_i\}$ определена на M глобально. Для этого сначала рассмотрим вспомогательную лемму.

ЛЕММА. Пусть ψ – произвольная дифференциальная 1-форма на $\mathcal{AC}$ -многообразии, Ω – фундаментальная форма этого многообразия, тогда $\psi \wedge \Omega = 0$, если и только если $\psi = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \wedge \Omega = 0$. Положив $\psi = \psi_i \omega^i$ и учитывая (3), видим, что это тождество примет вид

$$\psi_{[a} \delta_{b]}^c \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega_c + \psi^{[a} \delta_c^{b]} \omega_a \wedge \omega^c \wedge \omega_b + \psi_0 \omega \wedge \omega^a \wedge \omega_a = 0.$$

В силу линейной независимости базисных форм получим

$$\psi_{[a} \delta_{b]}^c = 0, \quad \psi^{[a} \delta_c^{b]} = 0, \quad \psi_0 = 0.$$

Свертывая первые два соотношения по b и c с учетом того, что $\dim M > 3$, находим, что $\psi_i = 0$, т.е. $\psi = 0$.

Обратное очевидно.

Пусть U_1 и U_2 – две пересекающиеся окрестности, допускающие локально конформные преобразования в почти косимплектическую структуру, с определяющими функциями σ_1 и σ_2 , соответственно. С учетом (5) получаем, что на $U_1 \cap U_2$ справедливо тождество

$$d\Omega = 2d\sigma_i \wedge \Omega, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Обозначим $d\vartheta = d\sigma_1 - d\sigma_2$. Тогда с учетом (6) получаем, что $d\vartheta \wedge \Omega = 0$. Из леммы следует, что $d\vartheta = 0$, а значит, $d\sigma_1|_{U_1 \cap U_2} = d\sigma_2|_{U_1 \cap U_2}$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. На всяком $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразии M глобально определена дифференциальная 1-форма α такая, что $\alpha|_U = d\sigma$, где σ – определяющая функция соответствующего локально конформного преобразования.

Форма α с компонентами $\{\sigma_i\}$ называется *контактной формой Ли*.

Заметим, что само свойство почти косимплектичности, т.е. замкнутости контактной и фундаментальной форм структуры, не сохраняется при нетривиальных конформных преобразованиях структуры. А именно, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Образ почти косимплектической структуры при нетривиальном конформном преобразовании не является почти косимплектической структурой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ – почти косимплетическая структура, т.е. $d\eta = 0$ и $d\Omega = 0$. Пусть $f: S \rightarrow \tilde{S}$ – ее нетривиальное конформное преобразование. Допустим, что $\tilde{S}$ – почти косимплектическая структура, т.е. $d\tilde{\eta} = 0$ и $d\tilde{\Omega} = 0$. Тогда согласно (5) $d\sigma \wedge \Omega = 0$. С учетом леммы получаем, что $d\sigma = 0$, т.е. $\sigma = \text{const}$, а значит, конформное преобразование является тривиальным.

Известно [5], что на пространстве присоединенной G -структуры для фундаментальной формы $\mathcal{AC}$ -многообразия имеем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \pi^*(d\Omega) = \sqrt{-1} \{ & B_c^{ab} \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega^c - B^{abc} \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega_c + B^{ab} \omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega \\ & - B_{ab}^c \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega_c + B_{abc} \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega^c \\ & + B_{ab} \omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega + (B_b^a + B_b^a) \omega_a \wedge \omega^b \wedge \omega \}, \end{aligned} \quad (7)$$

где B_c^{ab} , B_{ab}^c ; B^{abc} , B_{abc} ; B^{ab} , B_{ab} ; B_b^a , B_b^a – гладкие функции на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами соответственно первого, второго, третьего и четвертого структурных тензоров (тензоров Кириченко) [5].

Заметим, что $\mathcal{AC}$ -структура с нулевым вторым структурным тензором называется *структурой келерова типа* [11].

С учетом вышесказанного на пространстве присоединенной G -структуры нами найдена первая группа структурных уравнений $lc\mathcal{AC}$ -многообразий:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b + B_c^{ab} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c + B_b^a \omega \wedge \omega^b + B^{ab} \omega \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c + B_a^b \omega \wedge \omega_b + B_{ab} \omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega &= C_b \omega \wedge \omega^b + C^b \omega \wedge \omega_b. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad B^{[abc]} &= B_{[abc]} = 0; \\ 2) \quad B^{[ab]} &= B_{[ab]} = 0; \\ 3) \quad B_a^b &= B_a^b = \sigma_0 \delta_a^b; \\ 4) \quad C^{ab} &= C_{ab} = 0; \\ 5) \quad B_c^{ab} &= 2\sigma^{[a} \delta_c^{b]}; \\ 6) \quad B_{ab}^c &= 2\sigma_{[a} \delta_{b]}^c; \\ 7) \quad C^b &= -\sigma^b; \\ 8) \quad C_b &= -\sigma_b, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\{\omega_i^j\}$ – компоненты римановой связности, а C^b , C_b ; C^{ab} , C_{ab} – гладкие функции на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами соответственно пятого и шестого структурных тензоров (тензоров Кириченко) [5].

Далее из (8), 3) следует, что первое фундаментальное распределение $\mathcal{L}$ инволютивно, а значит, и вполне интегрируемо. Покажем, что структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности этого распределения $\mathcal{L}$ введенных нами структур, является структурой класса $W_2 \oplus W_4$ в классификации Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур [12].

Действительно, как известно [11], на первом фундаментальном распределении пара $(\Phi|_{\mathcal{L}}, g|_{\mathcal{L}})$ задает почти эрмитову структуру. Причем структурные уравнения

этого многообразия будут иметь вид

- 1) $d\omega^a = -\omega_b^a \wedge \omega^b + B_c^{ab} \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c$;
- 2) $d\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c$.

Принадлежность почти эрмитова многообразия к одному из 16 классов Грея–Хервеллы определяется видом виртуального $\mathcal{B}$ и структурного $\mathcal{C}$ тензоров, а точнее видом разложения $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ на тензоры $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_0$ и $\mathcal{C}_1$ соответственно [5], [13].

Виртуальный и структурный тензоры интегральных многообразий максимальной размерности распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -структуры характеризуются следующим образом [5]: из (9), 1) следует, что $B^{[abc]} = 0$, что равносильно $\mathcal{C}_1 = 0$; при этом $\mathcal{C}_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $B^{[abc]} = B^{abc} = 0$, т.е. интегральное многообразие – многообразие келерова типа.

На пространстве присоединенной G -структуры условие $\mathcal{B}_0 = 0$ равносильно $B_c^{ab} = 2\sigma^a \delta_c^b$; а условие $\mathcal{B}_1 = 0$ равносильно $B_b^{ab} = 0$. Из (9), 5) получаем

$$B_b^{ab} = 2\sigma^a \delta_b^b = \sigma^a \delta_b^b - \sigma^b \delta_b^a = \sigma^a (n - 1) = 0 \iff \sigma^a = 0.$$

Итак, для интегральных многообразий максимальной размерности первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия всегда выполняются условия $\mathcal{B}_0 = 0$ и $\mathcal{C}_1 = 0$, а следовательно, на этих многообразиях индуцируется структура класса $W_2 \oplus W_4$ в классификации Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия является структурой класса $W_2 \oplus W_4$ в классификации Грея–Хервеллы почти эрмитовых структур.*

Интересно отметить, что таким образом нами получен конкретный пример почти эрмитовых многообразий со структурой данного класса Грея–Хервеллы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия, при условии $\alpha \parallel \omega$ является почти келеровой структурой.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия, при условии $B^{abc} = 0$ является структурой класса W_4 .*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения $\mathcal{L}$ $lcs\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия, при условиях*

- 1) $B^{abc} = 0$;
- 2) $\alpha \parallel \omega$

является келеровой структурой.

С использованием процедуры дифференциального продолжения уравнений (8), нами получена вторая группа структурных уравнений $lc\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{E}$ -многообразий:

$$\begin{aligned}
 1) \quad d\omega_b^a &= -\omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_b^{acd} \omega_c \wedge \omega_d + A_{bcd}^a \omega^c \wedge \omega^d \\
 &\quad + A_{bd}^{ac} \omega^d \wedge \omega_c + A_{bc0}^a \omega \wedge \omega^c + A_b^{ac0} \omega \wedge \omega_c; \\
 2) \quad dB^{abc} &= -B^{dbc} \omega_d^a - B^{adc} \omega_d^b - B^{abd} \omega_d^c + B^{abcd} \omega_d + B_d^{abc} \omega^d + B^{abc0} \omega; \\
 3) \quad B_{abc} &= B_{dbc} \omega_a^d + B_{adc} \omega_b^d + B_{abd} \omega_c^d + B_{abc}^d \omega_d + B_{abcd} \omega^d + B_{abc0} \omega; \\
 4) \quad dB^{ab} &= -B^{db} \omega_d^a - B^{ad} \omega_d^b + D^{abd} \omega_d + D_d^{ab} \omega^d + D^{ab0} \omega; \\
 5) \quad dB_{ab} &= B_{db} \omega_a^d + B_{ad} \omega_b^d + D_{ab}^d \omega_d + D_{abd} \omega^d + D_{ab0} \omega; \\
 6) \quad d\sigma^b &= -\sigma^c \omega_c^b + \sigma^{bc} \omega_c + \sigma_c^b \omega^c + \sigma^{b0} \omega; \\
 7) \quad d\sigma_b &= \sigma_c \omega_b^c + \sigma_{bc} \omega^c + \sigma_b^c \omega_c + \sigma_{b0} \omega; \\
 8) \quad d\sigma_0 &= \sigma_{0b} \omega^b + \sigma_0^b \omega_b + \sigma_{00} \omega,
 \end{aligned} \tag{10}$$

где A_b^{acd} , A_{bcd}^a , A_{bd}^{ac} , A_{bc0}^a , A_b^{ac0} , B^{abci} , B_{abci} , D^{abi} , D_{abi} , σ_{ij} – подходящие гладкие функции на пространстве присоединенной G -структуры.

При этом

$$\begin{aligned}
 1) \quad A_b^{acd} &= 2\delta_b^{[c} \sigma^{a]d} - 2\delta_b^{[d} \sigma^{a]c} + B_b^{acd} - 2\sigma^a \delta_b^{[d} \sigma^{c]} - 2\sigma_e B^{ae[d} \delta_b^{c]} + 2\sigma_b B^{acd}; \\
 2) \quad A_b^{[acd]} &= \sigma_e B^{e[da} \delta_b^{c]}; \\
 3) \quad A_{[bd]}^{ac} &= -2\delta_{[b}^{[c} \sigma_{d]}^a] + 2\sigma^{[a} \delta_b^{e]} \sigma_{[e} \delta_{d]}^c - 2\sigma^{[a} \delta_d^{e]} \sigma_{[e} \delta_b^c] + \frac{1}{2} B^{aec} B_{ebd}; \\
 4) \quad A_b^{ac0} &= -2\delta_b^{[c} \sigma^{a]0} + D_b^{ac} - \delta_b^a \sigma_0^c - 2B^{aec} B_{eb} - \sigma^a \sigma_0 \delta_b^c + 2B^{ac} \sigma_b - B^{ae} \sigma_e \delta_b^c; \\
 5) \quad A_b^{[ac]0} &= \sigma_0^{[c} \delta_b^{a]} - \sigma_d \delta_b^{[a} B^{d]c} + \sigma_0 \sigma^{[c} \delta_b^{a]} + \frac{1}{2} B^{dca} B_{bd}; \\
 6) \quad B^{a[bcd]} &= -B^{a[db} \sigma^{c]}; \\
 7) \quad B^{abc0} &= -2D^{a[bc]} - B^{abc} \sigma_0; \\
 8) \quad \sigma^{[cd]} &= \sigma_b B^{bcd}
 \end{aligned} \tag{11}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Оператор структуры Φ является тензором типа $(1;1)$ на многообразии M^{2n+1} . Поэтому согласно основной теореме тензорного анализа [5] его компоненты, как системы функций на пространстве присоединенной G -структуры, будут удовлетворять соотношениям

$$d\Phi_j^i - \Phi_k^i \theta_j^k + \Phi_j^k \theta_k^i = \Phi_{j,k}^i \omega^k, \tag{12}$$

где $\{\Phi_{j,k}^i\}$ – некоторая система гладких функций, значения которых на пространстве присоединенной G -структуры совпадают с компонентами ковариантного дифференциала оператора Φ в связности ∇ .

Расписывая тождества (12) на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (1) можно получить значения тензорных компонент формы римановой связно-

сти на пространстве присоединенной G -структуры:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \omega_b^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^a \omega^k; \\
 2) \quad \omega_0^a &= \sqrt{-1} \Phi_{0,k}^a \omega^k; \\
 3) \quad \omega_a^0 &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k; \\
 4) \quad \omega_b^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k; \\
 5) \quad \omega_0^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{0,k}^{\hat{a}} \omega^k; \\
 6) \quad \omega_a^0 &= \sqrt{-1} \Phi_{a,k}^0 \omega^k.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Кроме того, $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$, $\omega_0^0 = 0$, а значит, система функций $\{\Phi_{j,k}^i\}$ кососимметрична по первым двум индексам.

С учетом (9) получим соотношения для $\{\Phi_{j,k}^i\}$ – компонент ковариантного дифференциала оператора Φ в связности ∇ [5] для $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Phi_{0,b}^a &= -\Phi_{a,b}^0 = -i\delta_b^a \sigma_0; \\
 2) \quad \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,\hat{b}}^0 = i\delta_a^b \sigma_0; \\
 3) \quad \Phi_{0,0}^a &= -\Phi_{a,0}^0 = i\sigma^a; \\
 4) \quad \Phi_{0,0}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,0}^0 = -i\sigma_a; \\
 5) \quad \Phi_{b,c}^a &= 4i\sigma^{[a}\delta_c^{b]}; \\
 6) \quad \Phi_{b,\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4i\sigma_{[a}\delta_{b]}^c; \\
 7) \quad \Phi_{b,\hat{c}}^a &= 4iB^{cab}; \\
 8) \quad \Phi_{b,c}^{\hat{a}} &= -4iB_{cab}; \\
 9) \quad \Phi_{a,b}^0 &= -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -iB_{ab}; \\
 10) \quad \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 &= -\Phi_{0,\hat{b}}^a = iB^{ab}; \\
 11) \quad \Phi_{b,0}^a &= \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

С учетом соотношений (13) и (14) тензорные компоненты формы римановой связности $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий примут вид

$$\begin{aligned}
 \omega_b^a &= -2\sigma^{[a}\delta_c^{b]}\omega^c - 2B^{cab}\omega_c; \\
 \omega_b^{\hat{a}} &= -2\sigma_{[a}\delta_{b]}^c\omega_c - 2B_{cab}\omega^c; \\
 \omega_0^a &= \sigma_0\omega^a + B^{ab}\omega_b - \sigma^a\omega; \\
 \omega_a^0 &= -\sigma_0\omega_a - B_{ab}\omega^b + \sigma_a\omega; \\
 \omega_0^{\hat{a}} &= \sigma_0\omega_a + B_{ab}\omega^b - \sigma_a\omega; \\
 \omega_a^0 &= -\sigma_0\omega^a - B^{ab}\omega_b + \sigma^a\omega.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим вторую группу уравнений связности в главном расслоении реперов [5]:

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \tag{16}$$

где $\{R_{jkl}^i\}$ – компоненты тензора римановой кривизны на пространстве присоединенной G -структуры. Хорошо известно [4], что компоненты тензора римановой кривизны обладают свойствами

- 1) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$;
- 2) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$;
- 3) $R_{ijkl} = R_{klij}$;
- 4) $R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0$ – тождество Риччи.

На основании этих свойств на пространстве присоединенной G -структуры достаточно вычислить следующие компоненты: R_{bcd}^a , $R_{\hat{b}cd}^a$, $R_{b\hat{c}d}^a$, $R_{bcd}^{\hat{a}}$, R_{0cd}^a , $R_{b\hat{c}0}^a$, $R_{bcd}^{\hat{a}}$, R_{0b0}^a , $R_{0\hat{b}0}^a$, R_{00a}^0 , $R_{0c\hat{d}}^0$, R_{000}^0 .

Расписывая равенство (16) на пространстве присоединенной G -структуры $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий, с учетом свойств компонент тензора римановой кривизны, (10) и (15), получим следующие выражения для ненулевых компонент тензора римановой кривизны $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий:

$$\begin{aligned}
 R_{bcd}^a &= 2(A_{bcd}^a + 4\sigma^{[a}\delta_{[c}^{h]}B_{d]hb} - \sigma_0 B_{b[d}\delta_{c]}^a), \\
 R_{\hat{b}cd}^a &= 2(2\delta_{[c}^{[b}\sigma_{d]}^a] + 2B^{hab}B_{hdc} - \delta_{[c}^a\delta_{d]}^b\sigma_0^2), \\
 R_{b\hat{c}d}^a &= A_{bc}^{ad} + 4\sigma^{[a}\delta_c^{h]} \sigma_{[h}\delta_{b]}^d] - 4B^{dah}B_{chb} + B^{ad}B_{bc} - \delta_c^a\delta_b^d\sigma_0^2, \\
 R_{bcd}^{\hat{a}} &= 2(2B_{[c|ab|d]} - 2\sigma_{[a}B_{b]cd} + B_{a[c}B_{d]b}), \\
 R_{0cd}^a &= 2(\sigma_{0[c}\delta_{d]}^a] + B^{ab}B_{bcd} - 2\sigma^{[a}\delta_{[c}^{h]}B_{d]h}), \\
 R_{b\hat{c}0}^a &= A_b^{ac0} + \sigma_b B^{ac} - \delta_b^c\sigma_0\sigma^a, \\
 R_{bcd}^{\hat{a}} &= 2B_{cab0} + 2B_{cab}\sigma_0, \\
 R_{0b0}^a &= -\delta_b^a\sigma_{00} - \delta_b^a\sigma_0^2 - B_{cb}B^{ac} - \sigma_b^a - \sigma^a\sigma_b + 2\sigma^{[a}\delta_b^{c]}\sigma_c, \\
 R_{0\hat{b}0}^a &= 2\sigma_0 B^{ab} - D^{ab0} - \sigma^{ab} - \sigma^a\sigma^b + 2B^{bac}\sigma_c.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Нормальные локально конформно почти косимплектические многообразия. Известно [5], [14], что $\mathcal{AC}$ -структура нормальна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$\Phi_{b,c}^{\hat{a}} = \Phi_{\hat{b},c}^a = \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = \Phi_{b,0}^a = \Phi_{a,b}^0 = \Phi_{\hat{a},\hat{b}}^0 = \Phi_{a,0}^0 = \Phi_{\hat{a},0}^0 = 0.$$

В силу соотношений (14) $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является нормальным тогда и только тогда, когда

$$B^{abc} = B_{abc} = B^{ab} = B_{ab} = \sigma^a = \sigma_a = 0. \tag{18}$$

С учетом (8), (9) и (18) первая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия будет иметь вид

- 1) $d\omega^a = -\omega_b^a \wedge \omega^b + \delta_b^a\sigma_0\omega \wedge \omega^b$;
- 2) $d\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + \delta_a^b\sigma_0\omega \wedge \omega_b$;
- 3) $d\omega = 0$.

(19)

Используя процедуру дифференциального продолжения, с учетом (19) нами получена вторая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия

$$\begin{aligned} d\omega_b^a &= -\omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bd}^{ac} \omega^d \wedge \omega_c, \\ d\sigma_0 &= \sigma_{00} \omega, \end{aligned} \quad (20)$$

где A_{bd}^{ac} , σ_{00} – подходящие гладкие функции. При этом $A_{bd}^{[ac]} = A_{[bd]}^{ac} = 0$.

Кириченко [5] предложил следующую классификацию $\mathcal{AC}$ -структур. Рассмотрим прямоу сумму 11 подпространств

$$T = B_0 \oplus B_1 \oplus C_0 \oplus C_1 \oplus D_0 \oplus D_1 \oplus E_0 \oplus E_1 \oplus F_0 \oplus F_1 \oplus \mathcal{L}$$

или, после естественных переобозначений, $T = \bigoplus_{k=1}^{11} T_k$. Внутренним образом определены $2^{11} = 2048$ различных классов $\mathcal{AC}$ -структур в зависимости от того, в какое из подпространств попадает набор структурных тензоров данной $\mathcal{AC}$ -структуры. В данной классификации структуры обозначают символом $\mathcal{AC} - N$, где N – десятичное число, в двоичной записи которого на k -м месте стоит нуль, если составляющая соответствующего структурного тензора, лежащая в пространстве T_k , равна нулю. Эта классификация подобна известной классификации Чиней и Марреро [15].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ – $\mathcal{AC}$ -структура на многообразии M . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) S – нормальная $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -структура;
- (2) $B = C = D = F = G = 0$;
- (3) S – $\mathcal{AC}$ -25-структура,

где B , C , D , F , G – первый, второй, третий, пятый и шестой структурный тензоры соответственно [5].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На пространстве присоединенной G -структуры структурные тензоры имеют следующие ненулевые компоненты [5]:

$$\begin{aligned} B &= \{B_{jk}^i\}, & B_{bc}^a &= B_c^{ab}, & B_{bc}^{\hat{a}} &= B_{ab}^c, \\ C &= \{C_{jk}^i\}, & C_{bc}^a &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^a, & C_{bc}^{\hat{a}} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2} \Phi_{b,c}^{\hat{a}}, \\ D &= \{D_j^i\}, & D_b^a &= B^{ab}, & D_b^{\hat{a}} &= B_{ab}, \\ E &= \{E_j^i\}, & E_b^a &= B_b^a, & E_b^{\hat{a}} &= B_a^{\hat{b}}, \\ F &= \{F_j^i\}, & F_b^a &= \sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0, & F_b^{\hat{a}} &= -\sqrt{-1} \Phi_{a,b}^0, \\ G &= \{G^i\}, & G^a &= C^a, & G^{\hat{a}} &= C_a. \end{aligned} \quad (21)$$

Значит, с учетом (9), (14) и (18) получим для нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия $B = C = D = F = G = 0$.

Обратное очевидно.

С учетом (17) и (18) ненулевые компоненты тензора римановой кривизны на пространстве присоединенной G -структуры нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия имеют

вид

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a &= -2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b \sigma_0^2, \\ R_{bcd}^a &= A_{bc}^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d \sigma_0^2, \\ R_{0b0}^a &= -\sigma_{00} \delta_b^a - \sigma_0^2 \delta_b^a. \end{aligned} \quad (22)$$

Известно [6], [13], что Грей выделил три класса почти эрмитовых структур $(R_1, R_2$ и $R_3)$ по свойствам симметрии их тензора кривизны:

$$R_1: \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)Z, W \rangle;$$

$$R_2: \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)Z, W \rangle + \langle R(JX, Y)JZ, W \rangle + \langle R(JX, Y)Z, JW \rangle;$$

$$R_3: \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(JX, JY)JZ, JW \rangle,$$

где $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Почти эрмитовы структуры, тензор R которых удовлетворяет тождеству R_i , называются *структурами класса R_i* .

В контактной геометрии вводятся следующие их аналоги [16].

Назовем $\mathcal{AC}$ -многообразие *многообразием класса CR_1* , если

$$\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W \rangle = \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

Назовем $\mathcal{AC}$ -многообразие *многообразием класса CR_2* , если

$$\begin{aligned} \langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W \rangle &= \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W \rangle + \langle R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi^2 W \rangle \\ &+ \langle R(\Phi X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Назовем $\mathcal{AC}$ -многообразие *многообразием класса CR_3* , если

$$\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W \rangle = \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В данной работе под CR_i понимаются классы почти контактных многообразий, определенные свойствами симметрии тензора римановой кривизны, введенные Волковой [16], в отличие от классов почти эрмитовых многообразий, определенных свойствами тензора конформной кривизны с такими же обозначениями, введенных Третьяковой [17].

Справедливы следующие предложения [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $\mathcal{AC}$ -Многообразие является многообразием класса CR_3 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\mathcal{AC}$ -Многообразие является многообразием класса CR_2 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = 0$ и $R_{bcd}^{\hat{a}} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $\mathcal{AC}$ -Многообразие является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры $R_{bcd}^a = 0$, $R_{bcd}^{\hat{a}} = 0$ и $R_{bcd}^a = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для почти контактных многообразий справедливы включения

$$CR_1 \subset CR_2 \subset CR_3.$$

Из предложений 2–5 следует справедливость следующих теорем.

ТЕОРЕМА 4. *Нормальные $lс\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия являются многообразиями классов CR_2 и CR_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – нормальное $lс\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие. Из (22) следует, что $R_{bcd}^a = 0$ и $\hat{R}_{bcd}^a = 0$. Это в силу предложения 3 означает, что M – многообразие класса CR_2 . А значит, в силу предложения 5 M – многообразие класса CR_3 .

ТЕОРЕМА 5. *Нормальные $lс\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия являются многообразиями класса CR_1 тогда и только тогда, когда они являются косимплектическими многообразиями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть M – нормальное $lс\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие. По предложению 4 оно является многообразием класса CR_1 тогда и только тогда, когда $R_{bcd}^a = 0$. Согласно (22) это равносильно тому, что $\sigma_0 = 0$, что с учетом (18) означает: $d\sigma = 0$, т.е. $\sigma = \text{const}$. Следовательно, M гомотетично почти косимплектическому многообразию и нормально. Таким образом, M гомотетично косимплектическому многообразию, а значит, является косимплектическим многообразием.

Обратное очевидно.

Автор выражает искреннюю благодарность доктору физ.-матем. наук, профессору В.Ф. Кириченко за ценные замечания и предложения во время работы над данной статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Z. Olszak, “Locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Colloq. Math.*, **57**:1 (1989), 73–87.
- [2] K. Matsumoto, I. Mihai, R. Roşca, “A certain locally conformal almost cosymplectic manifolds and its submanifolds”, *Tensor (N.S.)*, **51**:1 (1992), 91–102.
- [3] D. W. Yoon, K. S. Cho, S. G. Han, “Some inequalities for warped products in locally conformal almost cosymplectic manifolds”, *Note Mat.*, **23**:1 (2004/05), 51–60.
- [4] Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.
- [5] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [6] A. Gray, “Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **28**:4 (1976), 601–612.
- [7] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, “On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, II”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **13**:2 (1961), 281–294.
- [8] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, “Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 347–360.
- [9] S. I. Goldberg, “Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds”, *Pacific J. Math.*, **27**:2 (1968), 275–281.
- [10] S. I. Goldberg, K. Yano, “Integrability of almost cosymplectic structures”, *Pacific J. Math.*, **31**:2 (1969), 373–382.
- [11] В. Ф. Кириченко, “Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **18**, ВИНТИ, М., 1986, 25–71.
- [12] A. Gray, L. M. Hervella, “The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **123**:1 (1980), 35–58.

- [13] В. Ф. Кириченко, “Обобщенные классы Грея–Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщенных почти эрмитовых структур”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 107–132.
- [14] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, “Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий”, *Матем. сб.*, **193**:8 (2002), 71–100.
- [15] D. Chinea, J. C. Marrero, “Classification of almost contact metric structures”, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **37**:3 (1992), 199–211.
- [16] Е. С. Волкова, “Тождества кривизны нормальных многообразий киллингова типа”, *Матем. заметки*, **62**:3 (1997), 351–362.
- [17] В. Ф. Кириченко, И. В. Третьякова, “О постоянстве типа почти эрмитовых многообразий”, *Матем. заметки*, **68**:5 (2000), 668–676.

С. В. Харитонова

Московский педагогический государственный университет

E-mail: hcb@yandex.ru

Поступило

11.07.2008

Исправленный вариант

09.12.2008