Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Глазатов, О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня трансзвуковой газовой динамики, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 1, 137–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:57:19

О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линия–Рейсснера–Цзяня трансзвуковой газовой динамики

С. Н. Глазатов

В работе [1] для описания плоско-параллельных нестационарных течений газа в околозвуковом диапазоне скоростей выведено уравнение

$$A\Phi \equiv \Phi_{xt} + \Phi_x \Phi_{xx} - \Phi_{yy} = h(x, y, t). \quad (1)$$

Здесь $h(x, y, t)$ играет роль внешних массовых сил, Φ_x и Φ_y – компоненты вектора скорости газового потока в соответствующих направлениях, $\Phi(x, y, t)$ – потенциал поля скоростей. Скорость звука считается равной нулю. Уравнение (1) является квазилинейным гиперболическим независимо от знака Φ_x .

Возникает вопрос об исследовании задачи Коши и начально-краевых задач для уравнения (1) в различных областях.

Эти задачи являются довольно трудными из-за специфики (1), и этим можно объяснить то, что автору известны лишь работа [2] и монография [3], где предприняты попытки исследования начально-краевых задач для (1). Основной результат [3; гл. 3, п. 3] имеет тот недостаток, что некоторые факты не доказываются, а лишь констатируются со ссылками на экспериментальные данные.

Некоторые авторы, (см. монографию [4; гл. 1, п. 2.5] и работу [5]), исследовали задачу Коши и начально-краевые задачи для линеаризованного варианта уравнения (1), имеющего вид

$$Lu \equiv u_{xt} + (k(x, y, t)u_x)_x - u_{yy} = f(x, y, t), \quad (2)$$

где $k(x, y, t)$ – произвольная гладкая функция. Отметим, что и уравнение (2) является гиперболическим при любой функции $k(x, y, t)$.

Однако в цитированных работах не обоснована корректность метода линеаризации.

В настоящей работе для уравнения (1) предложена новая начально-краевая задача. Выделен класс функций, в котором доказана теорема единственности и получена оценка условной устойчивости решения этой задачи. Далее, эта же задача рассмотрена для уравнения (2). Здесь доказана теорема существования и единственности гладкого решения, обоснован метод линеаризации и показана адекватность полученных результатов тем априорным физическим предположениям, при которых выведено уравнение (1).

Рассмотрим уравнение (1) в области $Q = G \times (0, T)$, где $G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$, $x \in (0, 2\pi)$, $y \in (0, 1)$, $0 < T < +\infty$.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. *Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям*

$$\Phi|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (3)$$

$$D_x^j \Phi|_{x=0} = D_x^j \Phi|_{x=2\pi}, \quad j = 0, 1, \quad (4)$$

$$\Phi_y|_{y=0} = \Phi_y|_{y=1} = 0. \quad (5)$$

Условия (5) – это условия непротекания. Что касается (4), то здесь, в отличие от [3], не задаются нулевые значения Φ или Φ_x на соответствующих частях границы, а требуется определенный режим течения газа. Это принципиальное отличие, которое и придает задаче новизну. Такой режим при любом $t \in (0, T)$ является собственно трансзвуковым в области G , поскольку $\iint_G \Phi_x dx dy = 0$ в силу (4), а это обеспечивает (в невырожденном случае) трансзвуковой характер течения газа.

Обозначим через $W(Q)$ пространство функций с нормой

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{W(Q)} &= \|\Phi\|_{L^2(Q)} + \|D_y^3 \Phi\|_{L^2(0,T;W_2^1(G))} \\ &\quad + \|D_x^5 \Phi\|_{L^2(Q)} + \|D_x^3 D_y^2 \Phi\|_{L^2(Q)} + \|\Phi_{xt}\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))}, \end{aligned}$$

которые удовлетворяют условию $\int_0^{2\pi} \Phi(x, y, t) dx = 0$ для п.в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Заметим, что существование производных меньшего порядка из $L^2(Q)$ доказывается элементарно, а эквивалентность соответствующих норм является следствием теоремы 11.2 из [6; гл. 3, п. 11].

Обозначим $B_R = \{z(x, y, t) \in W(Q) : \|z\|_{W(Q)} \leq R\}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $h(x, y, t)$ и $\varphi(x, y)$ таковы, что существует решение $\Phi(x, y, t) \in W(Q)$ начально-краевой задачи (1), (3)–(5), то это решение единственно в $W(Q)$.

Пусть $\Phi(x, y, t) \in W(Q)$ – решение начально-краевой задачи (1), (3)–(5), а $\Psi(x, y, t) \in W(Q)$ – решение уравнения (1) с правой частью $h(x, y, t) + \tilde{h}(x, y, t)$, удовлетворяющее условиям (4), (5) и начальному условию $\Psi|_{t=0} = \varphi(x, y) + \tilde{\varphi}(x, y)$. Ясно, что $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t) \in B_R$ при некотором $R > 0$.

Заметим, что если $u, u_x \in L^2(Q)$ и $\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = 0$ для п.в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$, то справедливо легко проверяемое неравенство

$$\|u\|_{L^2(Q)} \leq C \|u_x\|_{L^2(Q)},$$

где C не зависит от функции u .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $h, \tilde{h} \in L^2(Q)$, а $\varphi, \tilde{\varphi}, \varphi_x, \tilde{\varphi}_x \in L^2(G)$. Тогда для решений $\Phi(x, y, t)$ и $\Psi(x, y, t)$ справедлива оценка

$$\|\Phi - \Psi\|_{L^2(Q)} \leq C \|(\Phi - \Psi)_x\|_{L^2(Q)} \leq M(T) \exp(M_1(T)R) (\|\tilde{h}\|_{L^2(Q)} + \|\tilde{\varphi}_x\|_{L^2(G)}).$$

Заметим, что если $\tilde{\varphi}_x = 0$, то $\tilde{\varphi}(x, y) = 0$ для п.в. $(x, y) \in G$, поскольку $\tilde{\varphi} = (\Psi - \Phi)|_{t=0}$, а $\Phi, \Psi \in W(Q)$ и, как нетрудно показать, непрерывны в $\bar{Q}$. Значит, $\int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(x, y) dx = 0$ для п.в. $y \in (0, 1)$.

Поскольку нам неизвестно, существует ли решение задачи (1), (3)–(5), а если существует, априори неизвестно какая гладкость правой части и начальной функции и какие дополнительные условия обеспечивают принадлежность решения пространству $W(Q)$, мы ограничились теми условиями, которые фигурируют в формулировках теорем 1 и 2.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи для уравнения (2), но сначала отметим, что метод линеаризации состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в виде

$$\tilde{\Phi} = v + u,$$

где $v(x, y, t)$ – известная гладкая функция, удовлетворяющее условиям (4), (5), и выполнено $\int_0^{2\pi} v(x, y, t) dx = 0$ для п.в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$. При этом $v|_{t=0} = 0$. В полученном для $\tilde{\Phi}$ уравнении слагаемое $u_x u_{xx}$ отбрасывается. В итоге получается уравнение

$$Lu = h - Av \equiv f,$$

где $k = v_x$. Ясно, что функцию v можно выбрать так, что норма Av в нужном нам пространстве С. Л. Соболева достаточно мала и, кроме того, $\|\nabla_{x,y} v\|_{C(\bar{Q})}$ – также достаточно малая величина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для заданного $\varepsilon > 0$ назовем ε -квазирешением задачи (1), (3)–(5), функцию $\tilde{\Phi}(x, y, t) \in W(Q)$, если она удовлетворяет условиям (3)–(5) и выполнено неравенство

$$\|A\tilde{\Phi} - h\|_{C(\bar{Q})} < \varepsilon. \quad (6)$$

Вернемся к уравнению (2). Начально-краевую задачу для (2) мы будем решать как самостоятельную, не забывая, однако, о чем идет речь. Как отмечено выше, $k(x, y, t)$ – произвольная гладкая функция. При этом предположим, что $k(0, y, t) = k(2\pi, y, t)$ для всех $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. *Найти в области Q решение уравнения (2), удовлетворяющее начально-краевым условиям (3)–(5).*

Очевидно, что задача (2)–(5) в общем случае переопределена, поскольку условие периодичности u_x нужно задавать лишь на тех участках границы, на которых $k(0, y, t)$ и $k(2\pi, y, t)$ не обращаются в нуль. Однако, наложенные условия согласования на функции φ , f и k позволяют доказать корректность этой задачи в классе гладких функций.

Введем анизотропные функциональные пространства $H(Q)$ и $V(G)$ с нормами

$$\begin{aligned}\|f\|_{H(Q)} &= \|f\|_{L^2(Q)} + \|f_{xx}\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|D_x^5 f\|_{L^2(Q)}, \\ \|\varphi\|_{V(G)} &= \|\varphi\|_{L^2(G)} + \|\varphi_x\|_{W_2^3(G)} + \|D_x^3 \varphi\|_{W_2^2(G)} + \|D_x^6 \varphi\|_{L^2(G)}.\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $k(x, y, t) \in C^6(\overline{Q})$,

$$D_x^j k|_{x=0} = D_x^j k|_{x=2\pi} \quad \text{при } j = 0, \dots, 6,$$

и $k_y|_{y=0} = k_y|_{y=1} = 0$. Пусть $f \in H(Q)$,

$$D_x^s f|_{x=0} = D_x^s f|_{x=2\pi} \quad \text{при } s = 0, \dots, 4,$$

и $f_y|_{y=0} = f_y|_{y=1} = 0$. Пусть $\varphi \in V(G)$,

$$D_x^l \varphi|_{x=0} = D_x^l \varphi|_{x=2\pi} \quad \text{при } l = 0, \dots, 5,$$

и $\varphi_y|_{y=0} = \varphi_y|_{y=1} = 0$.

Кроме того, пусть $\int_0^{2\pi} f(x, y, t) dx = 0$ для п.в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$ и $\int_0^{2\pi} \varphi(x, y) dx = 0$ для п.в. $y \in (0, 1)$.

Тогда существует единственное решение $u(x, y, t) \in W(Q)$ начально-краевой задачи (2)–(5).

Важно отметить, что для полученного решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W(Q)} \leq \widetilde{M}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}), \quad (7)$$

где $\widetilde{M}$ не зависит от u , f и φ .

Из (7), теоремы 3.1 из [7; гл. 1, п. 3.1] и теоремы 9.8 из [7; гл. 1, п. 9.4] можно вывести оценку

$$\|u_{xx}\|_{C(\overline{Q})} + \|\nabla_{x,y} u\|_{C(\overline{Q})} \leq \widetilde{M}_1(T)(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}). \quad (8)$$

Из (8) тривиальным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого $\rho > 0$ существует $\delta(\rho, T) > 0$ такое, что если

$$\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)} < \delta,$$

то

$$\|u_{xx}\|_{C(\overline{Q})} < \rho, \quad \|\nabla_{x,y} u\|_{C(\overline{Q})} < \rho.$$

Таким образом, малость правой части (8) обеспечивает то, что течение газа, описываемое уравнением (2) имеет околзвучовой характер, а условия выбора функции u обеспечивают то, что и течение Φ обладает тем же свойством.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{\delta}(\varepsilon, T) > 0$ такое, что если

$$\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)} < \tilde{\delta},$$

то для функции $\tilde{\Phi} = u + v$ справедливо неравенство (6), и она является ε -квазирешением задачи (1), (3)–(5).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть существует $\Phi(x, y, t) \in W(Q)$ – решение задачи (1), (3)–(5). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\tilde{\delta}_1(\varepsilon, T) > 0$ такое, что если

$$\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)} < \tilde{\delta}_1,$$

то

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}\|_{L^2(Q)} < \varepsilon.$$

Можно было бы сразу положить функцию $v \equiv 0$, что упростило бы решение линейризованной задачи, но главной целью было показать, что линейризация (1) на функциях из достаточно широкого класса приводит к приемлемому результату. Такой подход дает возможность выбора функции $v(x, y, t)$ с заранее заданными свойствами, например, $v_x|_{x=0} = v_x|_{x=2\pi} > 0$ (< 0), и если u_x – близкая к нулю в $\sup$ -норме величина, то это свойство сохраняется и у приближенного решения. Произвол в выборе $v(x, y, t)$ не может быть очень большим, поскольку выбор ограничен требованиями малости величин $\nabla_{x,y} v$ в $\sup$ -норме и Au в описанной соболевской норме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. С. Лин, Е. Reissner, Н. S. Tsien, *J. Math. Phys.*, **27**:3 (1948), 220–231. [2] Е. В. Мамонтов, *Нестационарные проблемы механики*, Динамика сплошной среды, **37**, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 139–143. [3] Н. А. Ларькин, *Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики*, Наука, Новосибирск, 1991. [4] А. И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1990. [5] С. Н. Глазатов, *Сиб. матем. журн.*, **37**:5 (1996), 1019–1029. [6] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975. [7] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971.

С. Н. Глазатов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск

E-mail: glaz@math.nsc.ru

Поступило

27.06.2008