Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 179–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:31:27

О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова

Изучается параболическая система вида $\partial_t u = \operatorname{div}_x A(x, t, \nabla_x u)$ в ограниченном цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbb{R}_{x,t}^{n+1}$. Здесь матричная функция $A(x, t, \xi)$ подчинена по переменной ξ степенным условиям роста и коэрцитивности с переменным показателем $p(x, t)$. Предполагается, что $p(x, t)$ имеет логарифмический модуль непрерывности и удовлетворяет оценке

$$\frac{2n}{n+2} < \alpha \leq p(x, t) \leq \beta < \infty.$$

Для слабого решения системы получены внутри цилиндра Q_T оценки повышенной суммируемости градиента. Основу метода составляют специального рода локализация и адаптированный для параболических задач локальный вариант леммы Геринга с переменным показателем суммируемости, доказываемый в работе.

Библиография: 10 названий.

1. Введение

1.1. Постановка задачи и основной результат. Изучается регулярность решений параболической системы

$$\partial_t u_i = \operatorname{div}_x A_i(x, t, \nabla u), \quad i = 1, \dots, N, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) = Q_T, \quad (1.1)$$

где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, $u = (u_1, \dots, u_N)$ – вектор решения, $\nabla u = \{\partial_{x_j} u_i\}$ – матрица градиента. Вектор-функция

$$A_i(x, t, \xi): \Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

предполагается каратеодориевой, т.е. измеримой по x, t для всех ξ и непрерывной по ξ для п.в. x, t . Кроме того, $A_i(x, t, \xi)$ подчинена следующему структурному условию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-9907-а).

УСЛОВИЕ (S). Пусть

$$p = p(x, t) \in C(Q_T), \quad \frac{2n}{n+2} < \alpha \leq p(x, t) \leq \beta < \infty, \quad (x, t) \in Q_T,$$

и пусть существуют константы $c_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, такие, что

$$\sum_{i=1}^N A_i(x, t, \xi) \cdot \xi_i \geq c_0 |\xi|^p - h_0, \\ |A_i(x, t, \xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1} + h_1, \quad i = 1, \dots, N,$$

для п.в. $(x, t) \in Q_T$, где h_0, h_1 – заданные на Q_T измеримые функции такие, что

$$\| |h_1|^{p/(p-1)} + |h_0| \|_{L^q(Q_T)} < c_2, \quad q > 1.$$

Здесь $\xi_1, \dots, \xi_N$ – столбцы матрицы ξ .

Условию (S) удовлетворяет система с $p(x, t)$ -лапласианом

$$\partial_t u_i = \operatorname{div}_x (|\nabla u|^{p(x,t)-2} \nabla u_i + g_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

если $|g|^{p/(p-1)} \in L^q(Q_T)$ для некоторого $q > 1$.

Далее показатель $p(x, t)$ имеет логарифмический модуль непрерывности:

$$|p(x, t) - p(x', t')| \leq \frac{1}{\ln(1/|x - x'| + 1/|t - t'|)}, \\ (x, t), (x', t') \in Q_T, \quad |x - x'| + |t - t'| \leq \frac{1}{2}. \quad (1.3)$$

Введем класс функций

$$W = W(Q_T) = \{u(x, t) : u \in L^2(Q_T)^N, |\nabla u|^p \in L^1(Q_T)\}.$$

Наделенный естественной нормой он становится банаховым пространством. Будем называть его параболическим пространством Соболева–Орлича с переменным показателем p .

Под слабым решением системы (1.1) понимаем функцию $u \in W$, для которой уравнения (1.1) выполнены в смысле распределений.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если u – слабое решение системы (1.1), то существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\| |\nabla u|^{p+\delta} \|_{L^1(Q')} \leq C < \infty, \quad Q' \Subset Q_T. \quad (1.4)$$

Постоянная δ зависит лишь от n и констант c_0, c_1, q, β из условия (S), а постоянная C – от тех же величин, а также от $N, c_2, \| |\nabla u|^p \|_{L^1(Q_T)}$ и Q' .

Как следствие, слабое решение локально внутри Q_T принадлежит пространству Соболева–Орлича с показателем, превышающим показатель энергетического пространства. Еще большим, благодаря теоремам вложения, оказывается показатель суммируемости самого решения.

При $p = \text{const} > 2n/(n+2)$ теорема 1.1 доказана в [1]. Скалярное уравнение (1.2) (т.е. $N = 1$) изучалось в [2], где специфика скалярной задачи оказалась весьма существенной, причем охвачен был фактически лишь случай $p(x, t) \geq 2$.

1.2. Теоремы о плотности и сглаживание. Данное выше определение слабого решения системы (1.1) допускает (как и в случае постоянного p , см. [3], [4]) несколько эквивалентных формулировок. Укажем те из них, которые наиболее удобны для вывода интересующих нас оценок.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Для функции $u \in W$ выполнены в смысле распределений уравнения (1.1) тогда и только тогда, когда для любой функции $\zeta \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)^N)$ справедливо интегральное тождество*

$$\int_{\Omega} u \cdot \zeta dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(-u \cdot \partial_t \zeta + \sum_i A_i \cdot \nabla \zeta_i \right) dx dt = 0 \quad \text{для н.в. } t_1, t_2 \in (0, T). \quad (1.5)$$

Встает вопрос о расширении множества пробных функций в (1.5), прежде всего, в связи с методом доказательства. Поясним это обстоятельство подробнее.

Доказательство свойства повышенной суммируемости (1.4) следует адаптированной к параболическим задачам методике, предложенной Модика и Джаквинта при изучении эллиптических уравнений, см. [5], [6]. Эта методика заключается в том, что сначала доказывается параболическое неравенство Каччопполи, а затем из него с помощью соответствующих неравенств Соболева–Пуанкаре выводится для градиента решения так называемое обратное неравенство Гёльдера с разными носителями, что позволяет на заключительной стадии применить теорему типа классической леммы Геринга [7]. Все перечисленные утверждения в параболической ситуации с переменным порядком суммируемости нетрадиционны, имеют усложненную форму и требуют дополнительных усилий. Этот весьма длинный и многоэтапный путь начинается с первого шага – подстановки в тождество (1.5) подходящей пробной функции. Таковой в идеале, при достаточной регулярности решения, могла бы стать функция ψu – произведение самого решения u на специально подобранную срезку ψ . К сожалению, в общих предположениях решение недостаточно регулярно, прежде всего по переменной t , и на некоторых этапах приходится заменять решение регулярными аппроксимациями, например, сглаживаниями.

Уточним определение операции сглаживания: для $f \in L^1(Q_T)$ полагаем

$$I^h f = f_h(x, t) \equiv h^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho\left(\frac{x - x'}{h}, \frac{t - t'}{h}\right) f(x', t') dx' dt', \quad (1.6)$$

где $\rho(x, t)$ – гладкое неотрицательное финитное четное ядро сглаживания такое, что $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho dx dt = 1$, и h – малый положительный параметр. Ввиду четности ядра сглаживания выполнено равенство

$$\int_{Q_T} f_h g dx dt = \int_{Q_T} f g_h dx dt$$

для любых функций $f, g \in L^2(Q_T)$, одна из которых имеет компактный в Q_T носитель.

Сглаживание находит широкое применение в параболической теории с постоянным показателем p , см. [3], [4], благодаря следующим свойствам.

ТЕОРЕМА 1.3. *Если $f \in L^\gamma(Q_T)$, где $\gamma \geq 1$, то при $h \rightarrow 0$ имеет место сходимость $f_h \rightarrow f$ в $L^\gamma(Q')$ для любого $Q' = \Omega' \times (t_1, t_2) \Subset Q_T$ и $f_h(\cdot, t) \rightarrow f(\cdot, t)$ в $L^\gamma(\Omega')$ для н.в. $t \in (0, T)$ и любой $\Omega' \Subset \Omega$.*

Здесь мы имеем дело с обычными пространствами Лебега $L^\gamma(Q_T)$, которым приписан постоянный порядок γ . Их аналогами “переменного порядка” будут пространства Орлича $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ (см. определение в разделе 7), естественно возникающие при изучении уравнений с переменным порядком нелинейности. Для нас будет важна

ТЕОРЕМА 1.4. *При выполнении логарифмического условия (1.3) имеет место сходимость $f_h \rightarrow f$ в $L^{p(\cdot)}(Q')$, $Q' \Subset Q_T$, при $h \rightarrow 0$ для любой функции $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$.*

Ввиду равенства $(\nabla f)_h = \nabla(f)_h$ из теорем 1.3 и 1.4 (а также свойств сходимости в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$, см. раздел 7) следует

ТЕОРЕМА 1.5. *При выполнении логарифмического условия (1.3), если $f \in W(Q_T)$ и $Q' \Subset Q_T$, то $\int_{Q'} (|f - f_h|^2 + |\nabla f - \nabla f_h|^p) dx dt \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.*

Коротко о доказательстве самой теоремы 1.4. Ключевым в нем оказывается установленный в [8] факт об ограниченности оператора сглаживания I^h в пространствах Орлича. Для полноты изложения мы даем вывод этого утверждения в разделе 7. Там же приведены другие необходимые для нас сведения из теории пространств Орлича и Соболева–Орлича.

В терминах сглаживания формулируется еще одно тождество для слабого решения системы (1.1), полезное в дальнейшем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\partial_t u_h \cdot \zeta + \sum_i (A_i)_h \cdot \nabla \zeta_i) dx dt = 0, \quad \zeta \in C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega)^N), \quad 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (1.7)$$

Для вывода (1.7) запишем по определению слабого решения тождество на финитных функциях

$$\int_{Q_T} \left(-u \cdot \partial_t \zeta + \sum_i A_i \cdot \nabla \zeta_i \right) dx dt = 0, \quad \zeta \in C_0^\infty(Q_T)^N,$$

и возьмем в качестве пробной функции сглаживание $\zeta = \eta_h$, где $\eta \in C_0^\infty(Q_T)^N$. Тогда по свойствам сглаживания

$$\int_{Q_T} \left(\partial_t u_h \cdot \eta + \sum_i (A_i)_h \cdot \nabla \eta_i \right) dx dt = 0, \quad \eta \in C_0^\infty(Q_T)^N. \quad (1.8)$$

Теперь выберем функцию η специальным образом, используя ζ из (1.7),

$$\eta(x, t) = \zeta(x, t) \chi_k(t), \quad \chi_k \in C_0^\infty(0, T), \quad (1.9)$$

где $\chi_k = 0$ вне (t_1, t_2) , $\chi_k = 1$ на $(t_1 + 1/k, t_2 - 1/k)$, χ_k монотонна на $(t_1, t_1 + 1/k)$ и $(t_2 - 1/k, t_2)$. Переход к пределу при $k \rightarrow \infty$ в тождестве (1.8) с пробной функцией η вида (1.9) дает (1.7).

Далее повсеместно используем следующие обозначения:

- $z = (x, t)$, $z_0 = (x_0, t_0)$ – координаты точки в $\mathbb{R}^{n+1}$;
- $B_r(x_0)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке x_0 ;
- $Q_{r,\tau}(z_0) = B_r(x_0) \times (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в точке z_0 ;
- $|E|$ – m -мерная мера Лебега m -мерного измеримого множества E ;
- $f_E \cdot = (1/|E|) \int_E \cdot$ – среднее по множеству E ;
- ω_n – объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

2. Выбор геометрических параметров

В нашем методе доказательства повышенной суммируемости градиента решения системы (1.1) (см. краткое описание в п. 1.2) один из важнейших моментов, он же и начальный, – выбор подходящей срезающей функции, иными словами, специального рода локализация. Эта локализация проводится в малых цилиндрах $Q_{r,\tau}(z_0)$, $z_0 \in Q_T$, со специально подобранными геометрическими параметрами r и τ . Подбирая параметры r и τ , мы преследуем, прежде всего, две цели. Во-первых, компенсируем неоднородность параболического оператора порядка $p > 1$. Напомним, что показатель $p = p(z)$ переменный и меняется в любом диапазоне $[\alpha, \beta] \subset (2n/(n+2), \infty)$. Во-вторых, мы добиваемся некоторой подчиненности определенных интегральных средних (см. (2.7)), что существенно помогает при выводе локальных оценок. Специальный выбор геометрических параметров мы описываем в общей ситуации для произвольного параболического цилиндра и заданной в нем функции. Далее, изучая решение u системы (1.1), саму эту функцию мы строим подходящим образом, включая в нее градиент ∇u и функции h_0 и h_1 из условия (S). Отметим, что отдаленность показателя $p(z)$ от нижней границы $2n/(n+2)$ используется в наших построениях постоянно.

Пусть Q – цилиндр в $\mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывный в $\bar{Q}$ показатель $p(z)$ удовлетворяет условию

$$\frac{2n}{n+2} < \alpha \leq p(z) \leq \beta < \infty, \quad z \in \bar{Q}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим $f \geq 0$ такую, что $f^p \in L^1(Q)$. Далее обозначаем через $d(z)$ параболическое расстояние от точки z до границы ∂Q . Напомним, что параболическое расстояние между точками $z = (x, t)$, $z' = (x', t')$ есть $\max\{|x - x'|, |t - t'|^{1/2}\}$. Удобно считать цилиндр Q достаточно малым, так что $d(z)|_Q \leq 1$.

Случай $p_0 = p(z_0) \geq 2$. Определим константу $\lambda_0 > 1$ равенством $\int_Q f^p dz + 1 = \lambda_0^2$ и введем функции

$$F(z) = f(z)\rho(z)\tilde{c}^{-1}, \quad \rho(z) = d(z)^{(n+2)/2}, \quad (2.2)$$

где константа $\tilde{c} > 1$ уточнена позже. Пусть $F(z_0) > \lambda \geq \lambda_0$, т.е. $f(z_0) > \tilde{c}\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} = \lambda/\rho_0$ и $\rho_0 = \rho(z_0)$. Положим $\theta = \tilde{\lambda}^{2-p_0}$ и будем рассматривать цилиндры $Q_r = Q_{r,\theta r^2}(z_0)$. Поскольку $0 < \theta \leq 1$ (так как $\tilde{\lambda} \geq 1$, $p_0 \geq 2$), при $r \in [d(z_0)/16, d(z_0))$ имеем $Q_r \subset Q$ и для достаточно большой константы $\tilde{c}$ ($\tilde{c} \geq 16^{n+2}/2\omega_n$)

$$\int_{Q_r} f^p dz \leq \frac{1}{2\omega_n \theta r^{n+2}} \int_Q f^p dz \leq \frac{\lambda^{p_0-2} \rho_0^{2-p_0} \lambda_0^2}{2\omega_n r^{n+2}} \leq \left(\frac{\lambda}{\rho_0}\right)^{p_0} \tilde{c}^{p_0} = (\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0}.$$

Вспомним, что $f(z_0) > \tilde{c}\tilde{\lambda}$ и по теореме Лебега $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{Q_r} f^p dz > (\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0}$ для п.в. z_0 . Тогда из непрерывности интеграла $\int_{Q_r} f^p dz$ по r следует существование такого $r = r_{z_0} \in (0, d(z_0)/16)$, что

$$(\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0} = \int_{Q_r} f^p dz > \int_{Q_R} f^p dz \quad \text{для любого } R \in (r, d(z_0)). \quad (2.3)$$

Случай $p_0 = p(z_0) < 2$. Определим константу $\lambda_0 > 1$ равенством $\int_Q f^p dz + 1 = \lambda_0^{(\alpha(n+2)-2n)/2}$ и введем функции

$$F(z) = f(z)\rho(z)\tilde{c}^{-1}, \quad \rho(z) = d(z)^{\sigma(z)}, \quad \sigma(z) = \frac{2(n+2)}{p(n+2)-2n}, \quad (2.4)$$

где константа $\tilde{c} > 1$ та же, что ранее. Рассмотрим цилиндры

$$Q_\gamma = Q_{\tilde{\lambda}^{(p_0-2)/2}\gamma, \gamma^2}(z_0), \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho_0}.$$

Если $\gamma \in [d(z_0)/16, d(z_0))$, то $Q_\gamma \subset Q$ (так как $\tilde{\lambda} > 1$, $p_0 < 2$) и

$$\begin{aligned} \int_{Q_\gamma} f^p dz &\leq \frac{1}{|Q_\gamma|} \int_Q f^p dz \leq \left(\frac{\lambda}{\rho_0}\right)^{(2-p_0)n/2} \frac{\lambda_0^{(p_0(n+2)-2n)/2}}{2\omega_n \gamma^{n+2}} \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{\rho_0}\right)^{p_0} \frac{\rho_0^{(p_0-2)n/2+p_0}}{2\omega_n \gamma^{n+2}} = \frac{\tilde{\lambda}^{p_0}}{2\omega_n} \left(\frac{d(z_0)}{\gamma}\right)^{n+2} \leq (\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0}. \end{aligned}$$

Пусть $F(z_0) > \lambda$, т.е. $f(z_0) > \tilde{c}\tilde{\lambda}$. Тогда те же соображения непрерывности, что и раньше, приводят к существованию для п.в. z_0 такого $\gamma_0 \in (0, d(z_0)/16)$, что

$$(\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0} = \int_{Q_{\gamma_0}} f^p dz > \int_{Q_\gamma} f^p dz \quad \text{для любого } \gamma \in (\gamma_0, d(z_0)). \quad (2.5)$$

Положим $r = \tilde{\lambda}^{(p_0-2)/2}\gamma_0$, $\theta = \tilde{\lambda}^{2-p_0}$. Тогда $Q_{\gamma_0} = Q_{\tilde{\lambda}^{(p_0-2)/2}\gamma_0, \gamma_0^2}(z_0) = Q_{r, \theta r^2}(z_0)$, и можно придать единую форму неравенствам (2.3), (2.5), равно как соотношениям (2.2), (2.4), если ввести

$$F(z) = f(z)\rho(z)\tilde{c}^{-1}, \quad \rho(z) = d(z)^{\sigma(z)}, \quad \sigma(z) = \begin{cases} \frac{n+2}{2} & \text{при } p(z) \geq 2, \\ \frac{2(n+2)}{p(n+2)-2n} & \text{при } p(z) < 2. \end{cases} \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.1. Для некоторых констант $\tilde{c} = \tilde{c}(n) > 1$ и $\lambda_0 = \lambda_0(n, \alpha, \|f^p\|_{L^1(Q)}) > 1$ и для п.в. z_0 , удовлетворяющих условию

$$f(z_0) > \tilde{c}\tilde{\lambda}, \quad \text{где } \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho_0}, \quad \lambda \geq \lambda_0, \quad \rho_0 = \rho(z_0)$$

(с.м. $\rho(z)$ в (2.6)), найдется $r = r_{z_0} \in (0, d(z_0)/16)$ такое, что

$$(\tilde{c}\tilde{\lambda})^{p_0} = \int_{Q_{r, \theta r^2}(z_0)} f^p dz > \int_{Q_{R, \theta R^2}(z_0)} f^p dz, \quad \theta = \tilde{\lambda}^{2-p_0}, \quad r < R < d(z_0). \quad (2.7)$$

Введем цилиндры

$$Q^i = Q_{2^i r, 2^{2i} \theta r^2}(z_0), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.8)$$

с такими же параметрами r и θ , как в (2.7). Справедлива

ЛЕММА 2.2. Пусть $z_0, \lambda, r = r(z_0, \lambda), \rho(z)$ те же, что в лемме 2.1. Тогда найдутся константы $k_i(n) > 1$ такие, что

$$k_i^{-1} \tilde{\lambda}^{p_0} \leq \int_{Q^i} f^p dz \leq k_i \tilde{\lambda}^{p_0}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\rho(z_0)}, \quad \theta = \tilde{\lambda}^{2-p_0}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно неравенство

$$\int_{Q^{i+1}} f^p dz \geq \frac{|Q^i|}{|Q^{i+1}|} \int_{Q^i} f^p dz = 2^{-(n+2)} \int_{Q^i} f^p dz, \quad i = 0, 1, 2,$$

которое вместе с (2.7) дает соотношения

$$\begin{aligned} c_0^3 (\tilde{c} \tilde{\lambda})^{p_0} &\leq c_0^2 \int_{Q^1} f^p dz \leq c_0 \int_{Q^2} f^p dz \\ &\leq \int_{Q^3} f^p dz < \int_{Q^0} f^p dz = (\tilde{c} \tilde{\lambda})^{p_0}, \quad c_0 = 2^{-(n+2)}, \end{aligned}$$

откуда следует (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойства (2.7) и (2.9), которыми обладают цилиндры вида (2.8), налагают связи между параметрами r и $\tilde{\lambda}$. В частности,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{p_0} &\leq \frac{1}{|Q^0|} \|f^p\|_{L^1(Q)} = \frac{c}{r^{n+2} \tilde{\lambda}^{2-p_0}}, \quad \tilde{\lambda}^2 \leq \frac{c}{r^{n+2}}, \quad r \leq c \tilde{\lambda}^{-2/(n+2)}, \\ \theta r^2 &= \tilde{\lambda}^{2-p_0} r^2 \leq c^2 \tilde{\lambda}^{2-p_0-4/(n+2)} = c^2 \tilde{\lambda}^{2n/(n+2)-p_0}, \quad c = c(n, \|f^p\|_{L^1(Q)}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

и благодаря нижней оценке (2.1), за счет выбора достаточно больших $\tilde{\lambda}$ как угодно малы r и θr^2 . Как следствие, если $\omega(s) = \kappa / \ln(1/s)$, $\kappa > 0$, то

$$\tilde{\lambda}^{\omega(r+\theta r^2)} \leq c, \quad c = (n, \alpha, \kappa, \|f^p\|_{L^1(Q)}). \quad (2.11)$$

3. Неравенства Соболева–Пуанкаре в цилиндре

Начнем с одного мультипликативного неравенства.

ЛЕММА 3.1. В цилиндре $Q \equiv B_r(x_0) \times (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q |u|^q dz &\leq c_{q,n} \left(\int_Q |\nabla u|^{q/\gamma} dz \right)^{\gamma n/(n+2)} \\ &\quad \times \sup_{|t-t_0| < \tau} \left(\int_{B_r(x_0)} |u|^2 dx \right)^{q/(n+2)}, \quad \gamma \in \left[1, \frac{n+2}{n} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

если

$$\int_{B_r(x_0)} u(x, t) dx = 0, \quad q \geq \frac{n+2}{n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (см. [3; с. 79–80])

$$\int_{B_r} |u|^q dx \leq c_{q,n} \left(\int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{q/(n+2)} \int_{B_r} |\nabla u|^{qn/(n+2)} dx, \quad q \geq \frac{n+2}{n},$$

следует проинтегрировать по $t \in (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$:

$$\int_Q |u|^q dz \leq C(q, n) \int_Q |\nabla u|^{qn/(n+2)} dz \sup_{|t-t_0| < \tau} \left(\int_{B_r} |u|^2 dx \right)^{q/(n+2)}$$

и далее применить неравенство Гёльдера к одному из интегралов:

$$\int_Q |\nabla u|^{qn/(n+2)} dz \leq \left(\int_Q |\nabla u|^{q/\gamma} dz \right)^{\gamma n/(n+2)}, \quad \gamma \in \left[1, \frac{n+2}{n} \right].$$

Лемма доказана.

Теперь приведем неравенство Пуанкаре–Соболева в цилиндре

$$Q_r = Q_r(z_0) = B_r(x_0) \times (t_0 - \theta r^2, t_0 + \theta r^2), \quad \theta \in (0, 1), \quad Q_r(z_0) \in Q_T, \quad (3.2)$$

предполагая, что показатель p удовлетворяет условиям из раздела 1.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\nabla v \in L^{p(\cdot)}(Q)$, $Q_r(z_0)$ – цилиндр вида (3.2), $p_2 = \max_{Q_r} p$. Тогда найдутся не зависящие от $z_0 \in Q_T$ константы C и r_0 такие, что

$$\int_{Q_r(z_0)} \left| \frac{v}{r} \right|^{p_2} dz \leq C \left(\int_{Q_r(z_0)} |\nabla v|^{p(z)} dz + 1 \right), \quad r \leq r_0, \quad (3.3)$$

если

$$\int_{B_r(x_0)} v(x, t) dx = 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_0 - \theta r^2, t_0 + \theta r^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем стандартное неравенство Соболева–Пуанкаре в шаре $B_r = B_r(x_0)$:

$$\int_{B_r} \left| \frac{v}{r} \right|^{s\gamma} dx \leq c_{n,s} \left(\int_{B_r} |\nabla v|^s dx \right)^\gamma \quad (3.4)$$

для всех $s \geq 1$, $\gamma \in \left[1, \frac{n}{n-1} \right]$, если $\int_{B_r} v dx = 0$.

Отсюда, если $p_2/\gamma = p_1/q$, где $q \in [1, (n+1)/n]$ и $p_1 = \min_{Q_r} p$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left| \frac{v}{r} \right|^{p_2} dx &\leq c \left(\int_{B_r} |\nabla v|^{p_2/\gamma} dx \right)^\gamma = c \left(\int_{B_r} |\nabla v|^{p_1/q} dx \right)^{qp_2/p_1} \\ &\leq c \left(\int_{B_r} |\nabla v|^{p/q} dx + 1 \right)^{q+\omega(r)q} \leq C \left(\int_{B_r} |\nabla v|^p dx + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь, обозначив $\omega(r) = p_2 - p_1$, мы использовали соотношения

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 + \omega(r)}{p_1} \leq 1 + \omega(r),$$

а также вытекающее из логарифмического условия (1.3) свойство ограниченности $r^{-\omega(r)} \leq C$ с константой, не зависящей от $r \leq r_0$ и x_0 . Для законного применения (3.4) осталось проверить выполнение условия $\gamma \leq n/(n-1)$ при достаточно

малом r . В самом деле, для $r \leq r_0$, если r_0 взято таким, что $\omega(r_0) \leq 1/(n^2 - 1)$, имеем

$$\gamma = \frac{p_2}{p_1} q < (1 + \omega(r))q \leq \frac{n^2}{n^2 - 1} q \leq \frac{n}{n - 1},$$

так как $q \leq (n+1)/n$. Из (3.5) интегрированием по t выводим (3.3). Лемма доказана.

В дальнейшем, чтобы обеспечить необходимое для неравенства (3.3) условие ортогональности, нам придется менять весовые средние по шару B . В связи с этим полезна

ЛЕММА 3.3. Пусть $\rho_1, \rho_2 \in L^\infty(B)$,

$$\int_B (\rho_1 - \rho_2) dx = 0, \quad \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^\infty} \leq c_0 |B|^{-1}.$$

Тогда для средних $u_i = \int_B u \rho_i dx$, $i = 1, 2$, верно неравенство

$$|u_1 - u_2|^q \leq c_0^q \int_B |u - u_i|^q dx, \quad i = 1, 2, \quad q = \text{const} \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления

$$u_1 - u_2 = \int_B u(\rho_1 - \rho_2) dx = \int_B (u - u_i)(\rho_1 - \rho_2) dx$$

по неравенству Гёльдера выводим искомое соотношение

$$|u_1 - u_2|^q \leq c_0^q \left(\int_B |u - u_i| dx \right)^q \leq c_0^q \int_B |u - u_i|^q dx.$$

Лемма доказана.

Одним из простых следствий леммы 3.2 является принцип локализации в пространстве $W = W(Q_T)$ (см. определение пространства в разделе 1):

$$u \in W, \quad \varphi \in C_0^\infty(Q_T) \quad \implies \quad \varphi u \in W. \quad (3.6)$$

Действительно, справедливо утверждение $|\nabla u|^p \in L^1(Q_T) \Rightarrow |u|^p \in L_{\text{loc}}^1(Q_T)$, для вывода которого достаточно заметить, что в силу (3.3) $|u|^p \in L^1(Q_r)$, где Q_r — произвольные принадлежащие Q_T цилиндры вида (3.2) с достаточно малым радиусом r .

4. Неравенство Каччопполи и его следствия

В этом разделе, помимо уже принятых, используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &= \Lambda_{t_0}(s) = \{t \in \mathbb{R}^1 : |t - t_0| < s\}, \\ Q_R &= Q_R(z_0) = Q_{R, \theta R^2}(z_0) = B_R(x_0) \times \Lambda_{t_0}(\theta R^2), \\ u_R &= u_R(t) = \int_{B_R} u(x, t) dx, \\ h^p &= |h_1|^{p/(p-1)} + |h_0|, \quad \text{где } h_0, h_1 \text{ — функции из условия (S)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

4.1. Докажем неравенство Каччопполи для решения системы (1.1).

ЛЕММА 4.1. Пусть u – слабое решение системы (1.1), $Q_{2r}(z_0) \in Q_T$ и $p_2 = \max_{Q_{2r}} p$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{\Lambda_{t_0}(\theta r^2)} \int_{B_r(x_0)} |u(x, t) - u_r(t)|^2 dx + \int_{Q_r(z_0)} |\nabla u|^{p(z)} dz &\leq C(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + |Q_{2r}|), \\ \Psi_1 &= \frac{1}{\theta r^2} \int_{Q_{2r}(z_0)} |u - u_{2r}(t)|^2 dz, \quad \Psi_2 = \int_{Q_{2r}(z_0)} \left| \frac{u - u_{2r}}{r} \right|^{p_2} dz, \\ \Psi_3 &= \int_{Q_{2r}(z_0)} h^p dz, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где постоянная C зависит от n , N и констант c_0, c_1, β из условия (S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В тождестве (1.5) возьмем $t_2 = s \in \Lambda(\theta r^2)$, $t_1 \notin \text{supp } \xi_0$ и пробную функцию

$$\zeta = (u - \tilde{u}_{2r}(t))\psi,$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \xi^{p_2}(x) \xi_0^2(t), \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_{2r}(t) = \left(\int_{B_{2r}} \xi^{p_2}(x) dx \right)^{-1} \int_{B_{2r}} u(x, t) \xi^{p_2}(x) dx, \\ \xi &\in C_0^\infty(B_{2r}), \quad \xi|_{B_r} \equiv 1, \quad r|\nabla \xi| < c, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \xi_0 &\in C_0^\infty(\Lambda(4r^2\theta)), \quad \xi_0|_{\Lambda(\theta r^2)} \equiv 1, \quad \theta r^2 |\xi'_0| < c, \quad 0 \leq \xi_0 \leq 1, \end{aligned}$$

что возможно, если u достаточно регулярна. После несложных преобразований выводим равенство

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{B_{2r}} |u(x, s) - \tilde{u}(s)|^2 \psi dx + \int_{t_1}^s \int_{B_{2r}} \sum_i A_i \cdot \nabla u_i \psi dx \\ &= -p_2 \int_{t_1}^s \int_{B_{2r}} \sum_i A_i \cdot (u_i - \tilde{u}_i) \xi^{p_2-1} \nabla \xi \xi_0^2 dz + \int_{t_1}^s \int_{B_{2r}} |u - \tilde{u}|^2 \xi^{p_2} \xi_0 \xi'_0 dz, \end{aligned} \quad (4.3)$$

уже не содержащее производной по t функции u . В случае недостаточной регулярности решения u используем в пробной функции ζ вместо u сглаживание u_h (см. (1.6)) и, исходя из тождества (1.7), получаем сначала равенство (4.3), в котором u и A_i заменены на сглаживания u_h и $(A_i)_h$. Далее, устремляя $h \rightarrow 0$, на основании теоремы 1.5 и (3.6) приходим к самому равенству (4.3). Этот предельный переход использует свойства пространств Орлича, которые приведены в разделе 7 (см., например, (7.5)).

По свойствам средних u_r , u_{2r} и $\tilde{u}_{2r}$ имеем соотношения в каждом сечении $t = \text{const}$

$$\int_{B_r} |u - u_r|^2 dx \leq \int_{B_r} |u - \tilde{u}_{2r}|^2 dx \leq \int_{B_{2r}} |u - \tilde{u}_{2r}|^2 \xi^{p_2} dx \leq \int_{B_{2r}} |u - u_{2r}|^2 dx, \quad (4.4)$$

которые позволяют далее менять в квадратических интегралах среднее $\tilde{u}_{2r}$ на u_r или u_{2r} . По неравенству Юнга, используя условие (S) и свойства функции $\xi(x)$,

получаем в цилиндре Q_{2r} неравенства

$$\begin{aligned} p_2 \sum_i |A_i| \xi^{p_2-1} |\nabla \xi| |u_i - \tilde{u}_i| &\leq \varepsilon |\nabla u|^p \xi^{p_2} + C_\varepsilon (\xi^{p_2-p} |\nabla \xi|^p |u - \tilde{u}|^p + h^p) \\ &\leq \varepsilon |\nabla u|^p \xi^{p_2} + C_\varepsilon \left| \frac{u - \tilde{u}}{r} \right|^p + C_\varepsilon h^p, \\ \left| \frac{u - \tilde{u}}{r} \right|^p &\leq \left| \frac{u - \tilde{u}}{r} \right|^{p_2} + 1, \quad \tilde{u} = \tilde{u}_{2r}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.3)–(4.5) с учетом условия (S), свойств функций $\xi(x)$, $\xi_0(t)$ и леммы 3.3 выводим при достаточно малых ε

$$\int_{B_r} |u - u_r(t)|^2 dx + \int_{Q_r} |\nabla u|^p dz \leq C(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + |Q_{2r}|), \quad t \in \Lambda(\theta r^2).$$

Лемма доказана.

В лемме 4.1 на геометрию цилиндра $Q_{r, \theta r^2}(z_0)$ (т.е. на параметры r и θ) никаких ограничений не накладывалось. В следующей лемме рассматривается цилиндр со свойствами (4.6), (4.7), которые можно обеспечить специальным выбором геометрических параметров (см. лемму 2.2 применительно к $f^p = |\nabla u|^p + h^p$, более подробно об этом в разделе 6).

ЛЕММА 4.2. Пусть u – слабое решение системы (1.1), $Q_{4r} = Q_{4r, \theta(4r)^2}(z_0) \Subset Q_T$, $\lambda > 0$, $p_0 = p(z_0)$ и для некоторой постоянной $c_3 > 1$

$$c_3^{-1} \lambda^{p_0} \leq \int_{Q_{4r, \theta(4r)^2}(z_0)} (|\nabla u|^p + h^p) dz \leq c_3 \int_{Q_{r, \theta r^2}(z_0)} (|\nabla u|^p + h^p) dz \leq c_3^2 \lambda^{p_0}, \quad (4.6)$$

где

$$\theta = \lambda^{2-p_0}. \quad (4.7)$$

Тогда, если λ достаточно велико, т.е. $\lambda > \lambda_* \geq 1$, то

$$X \equiv \sup_{\Lambda_{t_0}(\theta 4r^2)} \int_{B_{2r}(x_0)} \left| \frac{u(x, t) - u_{2r}(t)}{r} \right|^2 dx \leq c_4 \lambda^2, \quad (4.8)$$

где постоянные c_4 , λ_* зависят от размерностей n , N и констант c_0, c_1, β из условия (S), а c_4 – еще и от константы c_3 из (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случаи $p_0 \geq 2$ и $p_0 < 2$ изучаются по-разному. Далее используем обозначения

$$p_1 = \min_{Q_{4r}} p, \quad p_2 = \max_{Q_{4r}} p.$$

Случай $p_0 \geq 2$. Из соотношений (4.2), записанных для цилиндров Q_{2r} и Q_{4r} , имеем

$$X \leq C(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + |Q_{4r}|) r^{-(n+2)}.$$

Здесь слагаемое Ψ_1 оказывается подчиненным Ψ_2 . В самом деле, по неравенству Юнга

$$\frac{1}{\theta} \left| \frac{u - u_{4r}}{r} \right|^2 \leq \left| \frac{u - u_{4r}}{r} \right|^{p_2} + \theta^{-p_2/(p_2-2)}. \quad (4.9)$$

При этом мы считаем $p_2 > 2$ (случай $p_2 = 2$ далее разобран отдельно). Тогда (см. (4.7)) $\theta^{-p_2/(p_2-2)} = \lambda^{p_2(p_0-2)/(p_2-2)} \leq \lambda^{p_0}$ и, интегрируя (4.9) по цилиндру Q_{4r} , получаем

$$\Psi_1 \leq \Psi_2 + \lambda^{p_0} |Q_{4r}| \leq \Psi_2 + c(n) \lambda^2 r^{n+2}.$$

Теперь изучим слагаемые Ψ_2 и Ψ_3 . В соответствии с неравенством (3.3) для функции $u - u_{4r}$ в цилиндре Q_{4r} имеем оценку

$$\int_{Q_{4r}} \left| \frac{u - u_{4r}}{r} \right|^{p_2} dz \leq c \left(\int_{Q_{4r}} |\nabla u|^{p(z)} dz + 1 \right).$$

Отсюда в силу (4.6), (4.7)

$$r^{-(n+2)}(\Psi_2 + \Psi_3) = C\theta \left(\int_{Q_{4r}} (|\nabla u|^p + h^p) dz + 1 \right) \leq C_1 \lambda^{2-p_0} \lambda^{p_0} = C_1 \lambda^2.$$

Из полученных оценок при достаточно большом λ следует неравенство (4.8).

Равенство $p_2 = 2$ возможно только, если $p_0 = 2$. Но тогда в наших оценках $\Psi_1 = \Psi_2$, так как $\theta = \lambda^{2-p_0} = 1$. Осталось заметить, что прежняя оценка для Ψ_2 проходит при $p_2 = 2$.

Случай $p_0 < 2$. В тождестве (1.5) полагаем (с теми же оговорками насчет использования сглаживаний, что при выводе леммы 4.1)

$$\zeta = (u - \tilde{u}(t))\xi^2(x),$$

где

$$\begin{aligned} \xi &\in C_0^\infty(B_{4r}), \quad \xi|_{B_{2r}} \equiv 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad r|\nabla \xi| < 2, \\ \tilde{u}(t) &= \tilde{u}_{4r}(t) = \left(\int_{B_{4r}} \xi^2 dx \right)^{-1} \int_{B_{4r}} u(x, t) \xi^2(x) dx, \end{aligned}$$

считая $t_2 = s \in \Lambda_{t_0}(4r^2\theta)$, $t_1 = \hat{t} \in \Lambda_{t_0}(\theta r^2)$, и более точный выбор $\hat{t}$ укажем позже. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{B_{4r}} |u(x, s) - \tilde{u}(s)|^2 \xi^2 dx + \int_{\hat{t}}^s \int_{B_{4r}} \sum_i A_i \cdot \nabla u_i \xi^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_{4r}} |u(x, \hat{t}) - \tilde{u}(\hat{t})|^2 \xi^2 dx + 2 \int_{\hat{t}}^s \int_{B_{4r}} \sum_i A_i \cdot (u_i - \tilde{u}_i) \xi \nabla \xi dz. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Оценим последний интеграл $I(s)$. По неравенству Юнга и условию (S), см. также (4.1), имеем

$$\sum_i |A_i| |u_i - \tilde{u}_i| \xi |\nabla \xi| \leq \varepsilon \frac{1}{\theta r^2} |u - \tilde{u}|^2 \xi^2 + C_\varepsilon \theta (|\nabla u|^{2(p_2-1)} + h^{2(p_2-1)} + 1), \quad \varepsilon > 0,$$

и, соответственно, $I(s) \leq \varepsilon I_1(s) + C_\varepsilon I_2(s)$, где при достаточно малом ε слагаемое

$$\varepsilon I_1(s) \equiv \varepsilon \frac{1}{\theta r^2} \int_{\hat{t}}^s \int_{B_{4r}} |u - \tilde{u}|^2 \xi^2 dz, \quad s \in \Lambda_{t_0}(4r^2\theta),$$

впоследствии поглощается левой частью неравенства (4.11). Отсюда, учитывая условие (S) и свойства средних u_{2r} , u_{4r} , $\tilde{u} = \tilde{u}_{4r}$, подобные свойствам (4.4), выводим из (4.10)

$$\begin{aligned} X &\leq \sup_{\Lambda_{t_0}(4r^2\theta)} \int_{B_{4r}} \left| \frac{u - \tilde{u}}{r} \right|^2 \xi^2 dx \\ &\leq C \int_{B_{4r}} \left| \frac{u(x, \hat{t}) - u_{4r}(\hat{t})}{r} \right|^2 dx + C \int_{Q_{4r}} (\theta^2(|\nabla u|^{2(p_2-1)} + h^{2(p_2-1)} + 1) + \theta h^p) dz \\ &\equiv X_1 + X_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

По неравенству Соболева ($2n/(n+2) < p_1$) имеем

$$\int_{B_{4r}} \left| \frac{u(x, \hat{t}) - u_{4r}(\hat{t})}{r} \right|^2 dx \leq C_1 \left(\int_{B_{4r}} |\nabla u(x, \hat{t})|^{p_1} dx \right)^{2/p_1} \leq C_2 \left(\int_{Q_{4r}} |\nabla u|^{p_1} dx \right)^{2/p_1},$$

если $\hat{t} \in \Lambda_{t_0}(\theta r^2)$ выбрано так, что для функции $f \equiv |\nabla u|^{p_1}$ выполнены неравенства

$$\int_{B_{4r}} f(\hat{t}, x) dx \leq |\Lambda_{t_0}(\theta r^2)|^{-1} \int_{Q_{4r}} f(z) dz, \quad \int_{B_{4r}} f(\hat{t}, x) dx \leq 16 \int_{Q_{4r}} f(z) dz.$$

Тогда в силу (4.6) при достаточно больших $\lambda \geq \lambda_*$

$$X_1 \leq c \left(\int_{Q_{4r}} |\nabla u|^p dz + 1 \right)^{2/p_1} \leq C \lambda^{2p_0/p_1} \leq C_1 \lambda^2.$$

К заключительному неравенству здесь приводят те же аргументы, что и в случае (2.11), поскольку

$$\frac{p_0}{p_1} = 1 + \frac{p_0 - p_1}{p_1} \leq 1 + \omega(r), \quad \text{где } \omega(r) = p_2 - p_1,$$

и $\lambda^{\omega(r)} \leq C$ в силу (1.3).

Изучая слагаемое X_2 , считаем параметр λ столь большим и, значит, радиус r столь малым (см. замечание в разделе 2), что $p_2 < 2$ и $2p_2 - 2 < p_1$, т.е. $p_2 - p_1 < 2 - p_2$. Тогда по неравенству Гёльдера и условию (4.6)

$$\begin{aligned} \int_{Q_{4r}} h^{2(p_2-1)} dz &\leq \left(\int_{Q_{4r}} h^{p_1} dz \right)^{2(p_2-1)/p_1} \\ &\leq \left(\int_{Q_{4r}} h^p dz + 1 \right)^{2(p_2-1)/p_1} \leq c \lambda^{2(p_2-1)p_0/p_1}, \end{aligned}$$

и оценка остается в силе, если h заменить на $|\nabla u|$. Отсюда те же соображения, что и при изучении X_1 , дают неравенство

$$X_2 \leq C(\theta^2 \lambda^{2(p_2-1)p_0/p_1} + \theta \lambda^{p_0}) = C(\lambda^2 + \lambda^2 \lambda^{2-2p_0+2(p_2-1)p_0/p_1}) \leq C_1 \lambda^2,$$

поскольку $\lambda^{\omega(r)} \leq C$ и

$$1 - p_0 + (p_2 - 1) \frac{p_0}{p_1} \leq \frac{p_0}{p_1} (p_2 - p_1) \leq 2\omega(r), \quad \text{где } \omega(r) = p_2 - p_1.$$

Из (4.11) и оценок для X_1 и X_2 вытекает неравенство (4.8). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. В условиях леммы 4.2 при достаточно большом $\lambda > \lambda_* \geq 1$

$$\int_{Q_r} |\nabla u|^p dz \leq c_5 \left[1 + \int_{Q_{2r}} h^p dz + \left(\int_{Q_{2r}} |\nabla u|^{2/\gamma'} dz \right)^{p_0 \gamma'/2} + \left(\int_{Q_{2r}} |\nabla u|^{p_2/\gamma} dz \right)^\gamma \right], \quad (4.12)$$

где $\gamma, \gamma' \in [1, (n+2)/n]$, $p_0 = p(z_0)$, $p_2 = \max_{Q_{2r}} p$, $Q_r = Q_{r, \theta r^2}(z_0)$, $Q_{2r} = Q_{r, \theta(2r)^2}(z_0)$ – цилиндры со свойством (4.6), а константа c_5 того же типа, что c_4 в (4.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $v = |\nabla u|$, в силу (4.2) имеем

$$\int_{Q_r} v^p dz \leq C(\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + |Q_{2r}|). \quad (4.13)$$

Для оценки Ψ_1 применим неравенство (3.1) (при $q = 2$ и $\gamma' \in [1, (n+2)/n]$), а затем соотношения (4.7) и (4.8):

$$\begin{aligned} |Q_{2r}|^{-1} \Psi_1 &\leq C(\theta r^2)^{-1} \left(\sup_{|t-t_0| < 4\theta r^2} \int_{B_{2r}} |u - \bar{u}_{2r}|^2 dx \right)^{2/(n+2)} \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/\gamma'} dz \right)^{\gamma' n/(n+2)} \\ &\leq C \lambda^{p_0-2} r^{-2} (\lambda^2 r^{n+2})^{2/(n+2)} \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/\gamma'} dz \right)^{\gamma' n/(n+2)} \\ &= c \lambda^{p_0-2n/(n+2)} \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/\gamma'} dz \right)^{\gamma' n/(n+2)} \leq \varepsilon \lambda^{p_0} + C_\varepsilon \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/\gamma'} dz \right)^{\gamma' p_0/2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где в конце использовано неравенство Юнга с $\varepsilon \in (0, 1)$.

Аналогично, применяя на этот раз (3.1) при $q = p_2$ и $\gamma \in [1, (n+2)/n]$, получаем оценку для Ψ_2

$$\begin{aligned} |Q_{2r}|^{-1} \Psi_2 &\leq C r^{-p_2} (r^{n+2} \lambda^2)^{p_2/(n+2)} \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_2/\gamma} dz \right)^{\gamma n/(n+2)} \\ &= C \lambda^{2p_2/(n+2)} \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_2/\gamma} dz \right)^{\gamma n/(n+2)} \leq \varepsilon \lambda^{p_2} + C_\varepsilon \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_2/\gamma} dz \right)^\gamma, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где, как и при выводе леммы 4.2, можно показать, что $\lambda^{p_2} = \lambda^{p_0} \cdot \lambda^{p_2-p_0} \leq C \lambda^{p_0}$. В итоге из (4.13)–(4.15) и (4.6) следует (4.12), если ε достаточно мало. Лемма доказана.

4.2. Собранного материала достаточно, чтобы доказать обратное неравенство Гёльдера для градиента решения системы (1.1).

Предварительно введем величину

$$\varsigma = \frac{1}{m} \left[\alpha \left(\frac{2n}{n+2} \right)^{-1} - 1 \right] > 0, \quad (4.16)$$

где $m \geq 2$ столь велико, что $\varsigma < 2/n$. Последнее неравенство обеспечивает необходимое в дальнейшем включение

$$s = \frac{n+2}{n(1+\varsigma)} \in \left(1, \frac{n+2}{n} \right). \quad (4.17)$$

ЛЕММА 4.4. В условиях леммы 4.3 выполнены неравенства для $v = |\nabla u|$

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} v^p dz &\leq c_6 \left(1 + \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/s} dz \right)^{p_0 s/2} + \int_{Q_{2r}} h^p dz \right), & \text{если } p_0 \leq 2, \\ \int_{Q_r} v^p dz &\leq c_6 \left(1 + \left(\int_{Q_{2r}} v^{p/s} dz \right)^s + \int_{Q_{2r}} h^p dz \right), & \text{если } p_0 > 2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где s определено в (4.17), (4.16) и c_6 – константа того же типа, что c_4 в (4.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Пусть $p_0 \leq 2$. Положим $p_1 = \min_{Q_{2r}} p$, $p_2 = \max_{Q_{2r}} p$, $\omega(r) = p_2 - p_1$. В оценке (4.12) берем $\gamma' = s$ и $\gamma = sp_2/p_1$. Это законно, так как $\gamma', \gamma \in (1, (n+2)/n]$, см. (4.17) и следующие неравенства:

$$1 < \gamma = \frac{p_2}{p_1} s \leq (1 + p_2 - p_1)s \leq (1 + \varsigma) \frac{n+2}{n(1+\varsigma)} = \frac{n+2}{n}, \quad (4.19)$$

которые верны, если r столь мало, что $\omega(r) \leq \varsigma$. Тогда неравенство (4.12) принимает вид

$$\int_{Q_r} v^p dz \leq c_4 \left[1 + \int_{Q_{2r}} h^p dz + \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/s} dz \right)^{p_0 s/2} + \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1/s} dz \right)^\gamma \right], \quad (4.20)$$

и последний интеграл подлежит оценке. Поскольку $\gamma = s + s\omega(r)$ (см. (4.19)), $s > 1$ и $p_1 \leq 2$, нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1/s} dz \right)^\gamma &\leq \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1/s} dz \right)^s \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1} dz \right)^{\omega(r)} \\ &\leq \left(\int_{Q_{2r}} v^{2/s} dz \right)^{p_1 s/2} \left[|Q_{2r}|^{-\omega(r)} \left(\int_{Q_{2r}} v^p dz + 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Заметим, что $|Q_{2r}| = 2\omega_n(\theta r^2)r^n$ и величины r , θr^2 имеют оценку типа (2.10). Поэтому выражение в квадратной скобке ограничено допустимой константой в силу логарифмического условия на показатель $p(z)$. Отсюда и из (4.20) следует (4.18)₁, так как $p_1 \leq p_0$.

2°. Пусть $p_0 > 2$; тогда, тем более, $p_2 > 2$. В неравенстве (4.12) возьмем такие γ и γ' , что

$$\frac{p_2}{p_1} s = \gamma \leq \gamma' < \frac{n+2}{n}$$

(условие $\gamma = sp_2/p_1 < (n+2)/n$ проверено ранее). Тогда ввиду очевидных неравенств $2/\gamma' \leq 2/\gamma < p_2/\gamma$ в (4.12) последний интеграл доминирует над предшествующим, при этом имеет место оценка (аналогичная (4.21))

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_2/\gamma} dz \right)^\gamma &= \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1/s} dz \right)^{sp_2/p_1} \\ &\leq C \left(\int_{Q_{2r}} v^{p_1/s} dz \right)^s \leq C \left(1 + \int_{Q_{2r}} v^{p/s} dz \right)^s, \end{aligned}$$

которая и приводит к неравенству (4.18)₂. Лемма доказана.

Неравенства (4.18) можно объединить в одно:

$$\int_{Q_r} |\nabla u|^{p(z)} dz \leq c_6 \left(1 + \left(\int_{Q_{2r}} |\nabla u|^{p(z)/q(z)} dz \right)^{q_0} + \int_{Q_{2r}} h^{p(z)} dz \right), \quad q_0 = q(z_0),$$

$$q(z) = \begin{cases} s, & \text{если } p(z) \geq 2, \\ \frac{p(z)s}{2}, & \text{если } p(z) < 2. \end{cases} \quad (4.22)$$

Показатель $q(z)$ наследует от $p(z)$ логарифмический модуль непрерывности.

5. Вариант леммы Геринга

Пусть $Q = O \times (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = (x, t)$, O — область в $\mathbb{R}^n$, функция $q(z)$ такова, что

$$1 < \gamma_1 \leq q(z) \leq \gamma_2 < \infty, \quad z \in \overline{Q},$$

$$|q(z) - q(z')| \leq \omega(|z - z'|), \quad z, z' \in \overline{Q}, \quad |z - z'| < \frac{1}{2}, \quad \omega(s) = \frac{\kappa}{\ln(1/s)}, \quad \kappa > 0, \quad (5.1)$$

и аналогичным требованиям подчинена функция $p(z)$.

Пусть $z_0 = (x_0, t_0) \in Q$, $q(z_0) = q_0$, $p(z_0) = p_0$ и $Q_{r,\tau}(z_0) = B_r(x_0) \times (t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ — параболические цилиндры с центром в точке z_0 . Следующее условное утверждение является модификацией леммы Геринга и обслуживает параболические уравнения переменного порядка нелинейности.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть функции $F \geq 0$, $G \geq 0$ таковы, что $F^p, G^p \in L^1(Q)$, и пусть для некоторых констант $\lambda_0 \geq 1$, $c_0 \geq 1$, $c_1 \geq 1$, $l > 0$ и для п.в. точек

$$z_0 \in E(\lambda) = \{z \in Q : F > \lambda\}, \quad \lambda \geq \lambda_0,$$

имеются $r = r(z_0, \lambda) > 0$, $\tau = \tau(z_0, \lambda) > 0$ и соответствующие этим параметрам концентрические цилиндры

$$Q^i = Q_{2^i r, 2^{2i} \tau}(z_0) \subset Q, \quad i = 1, 3, \quad (5.2)$$

такие, что

$$r \leq c_1 \lambda^{-l}, \quad \tau \leq c_1 \lambda^{-l}, \quad (5.3)$$

$$c_0^{-1} \int_{Q^3} F^p dz \leq \lambda^{p_0} \leq c_0 \left(\left(\int_{Q^1} F^{p/q} dz \right)^{q_0} + \int_{Q^1} G^p dz \right). \quad (5.4)$$

Тогда найдется такое $\delta_0 > 0$, что

$$\int_Q F^{p+\delta} dz \leq C \int_Q (F^p + G^{p+\delta} + 1) dz, \quad \delta \in (0, \delta_0). \quad (5.5)$$

Постоянные δ_0 и C зависят от размерности n и констант γ_1 , γ_2 , κ , l , c_0 , c_1 из (5.1)–(5.4), а постоянная C — еще и от λ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1°. Оценим интегралы по Q^1 из (5.4). Полагаем

$$q_1 = \min_{Q^1} q, \quad q_2 = \max_{Q^1} q, \quad p_1 = \min_{Q^1} p, \quad p_2 = \max_{Q^1} p.$$

В силу (5.1), (5.3)

$$\lambda^{q_2 - q_1} \leq C, \quad \lambda^{p_2 - p_1} \leq C, \quad (5.6)$$

где C не зависит от z_0 , λ и r . Применяя неравенство Гёльдера и (5.4), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \left(\int_{Q^1} F^{p/q} dz \right)^{q_0} \leq \left(\int_{Q^1} F^{q_1 p/q} dz \right)^{(q_0 - 1)/q_1} \cdot \int_{Q^1} F^{p/q} dz \\ &\leq \left(\int_{Q^1} F^p dz + 1 \right)^{(q_0 - 1)/q_1} \cdot \int_{Q^1} F^{p/q} dz \\ &\leq c_1 \lambda^{p_0(q_0 - 1)/q_1} \int_{Q^1} F^{p/q} dz \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$\int_{Q^1} F^p dz \leq \frac{|Q^3|}{|Q^1|} \int_{Q^3} F^p dz.$$

Поскольку

$$\int_{Q^1} F^{p/q} dz \leq (\varepsilon \lambda)^{p_2/q_1} + \frac{1}{|Q^1|} \int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} F^{p/q} dz, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

имеем в силу (5.6)

$$I_1 \leq c_2 \left[\lambda^{p_0} \varepsilon^{\gamma_1/\gamma_2} + \lambda^{p_0(q_0 - 1)/q_0} \frac{1}{|Q^1|} \int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} F^{p/q} dz \right].$$

Полагая $D(\lambda) = \{z \in Q : G(z) > \lambda\}$, снова в силу (5.6) устанавливаем

$$I_2 \equiv \int_{Q^1} G^p dz \leq c_3 \left[\lambda^{p_0} \varepsilon^{\gamma_1} + \frac{1}{|Q^1|} \int_{Q^1 \cap D(\varepsilon \lambda)} G^p dz \right], \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Из (5.4) и оценок для I_1 , I_2 , выбирая ε достаточно малым, выводим

$$\int_{Q^3} F^p dz \leq c \left[\lambda^{p_0(q_0 - 1)/q_0} \int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} F^{p/q} dz + \int_{Q^1 \cap D(\varepsilon \lambda)} G^p dz \right]. \quad (5.7)$$

Согласно (5.6) эта оценка сохраняет свой вид, если значения q_0 , p_0 заменить значениями $\widehat{q}$, $\widehat{p}$, которые даются теоремой о среднем значении

$$\int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} \lambda^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz = \lambda^{\widehat{p}(\widehat{q}-1)/\widehat{q}} \int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} F^{p/q} dz.$$

Поэтому оценка (5.7) принимает вид

$$\int_{Q^3} F^p dz \leq c \left[\int_{Q^1 \cap E(\varepsilon \lambda)} \lambda^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz + \int_{Q^1 \cap D(\varepsilon \lambda)} G^p dz \right]. \quad (5.8)$$

2°. Итак, для п.в. точек $z_0 \in E(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0$, существуют цилиндры Q^1 , Q^3 вида (5.2) с центром в точке z_0 , для которых выполнена оценка (5.8). По теореме Витали найдется счетное семейство попарно непересекающихся цилиндров $\{Q_j^1\}$ такое, что $E(\lambda) \subset \cup_j Q_j^3$, и из (5.8) получим

$$\int_{E(\lambda)} F^p dz \leq c \left[\int_{E(\lambda_\varepsilon)} \lambda^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz + \int_{D(\lambda_\varepsilon)} G^p(z) dz \right]. \quad (5.9)$$

В случае постоянных $q > 1$ и $\delta > 0$ верна формула интегрирования

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{E(\lambda_0)} F^{p+\delta} dz = - \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^\delta d\lambda \int_{E(\lambda)} F^p dz \\ &= \delta \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{E(\lambda)} F^p dz d\lambda + \lambda_0^\delta \int_{E(\lambda_0)} F^p dz, \end{aligned} \quad (5.10)$$

которая справедлива и для переменных показателей, в чем можно убедиться, рассматривая кусочно-постоянные приближения. Поэтому из (5.10) и (5.9) выводим

$$\begin{aligned} I &\leq c_1 \delta \left[\int_{s_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{E(\lambda)} \lambda^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz d\lambda + \int_{s_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{D(\lambda)} G^p dz d\lambda \right] \\ &\quad + \lambda_0^\delta \int_{E(\lambda_0)} F^p dz, \quad s_0 = \varepsilon \lambda_0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Оценим сверху слагаемые в квадратных скобках. Очевидно, что (см. формулу типа (5.10) для G вместо F)

$$\delta \int_{s_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{D(\lambda)} G^p dz d\lambda \leq \int_{D(s_0)} G^{p+\delta} dz.$$

Кроме того, из равенства типа (5.10)

$$\begin{aligned} I_0 &\equiv \int_{E(s_0)} F^{p+\delta} dz \\ &= \int_{s_0}^{\infty} (\delta + 1) \lambda^\delta \int_{E(\lambda)} \lambda^{p(q-1)/q-1} F^{p/q} dz d\lambda + s_0^\delta \int_{E(s_0)} s_0^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz, \end{aligned}$$

следует оценка

$$\int_{s_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1} \int_{E(\lambda)} \lambda^{p(q-1)/q} F^{p/q} dz d\lambda \leq \frac{1}{\delta+1} I_0 \leq \frac{1}{\delta+1} [I + \lambda_0^{2+\delta} |Q|].$$

В результате из (5.11) получаем

$$I \leq \frac{c_1 \delta}{\delta+1} (I + \lambda_0^{2+\delta} |Q|) + \lambda_0^\delta \int_{E(\lambda_0)} F^p dz + c_1 \int_{D(s_0)} G^{p+\delta} dz.$$

Взяв $2\delta_0 = 1/c_1$, приходим к оценкам с независимыми от $\delta \in (0, \delta_0)$ константами

$$\begin{aligned} \int_{E(\lambda_0)} F^{p+\delta} dz &\leq c \int_Q (F^p + G^{p+\delta} + 1) dz, \\ \int_Q F^{p+\delta} dz &\leq C \int_Q (F^p + G^{p+\delta} + 1) dz, \quad \delta \in (0, \delta_0), \end{aligned} \quad (5.12)$$

из которых следует утверждение теоремы 5.1.

6. Локальная повышенная суммируемость

Перейдем к непосредственному выводу неравенства (1.4), для чего суммируем полученные в разделе 4 результаты в такой форме, чтобы воспользоваться теоремой 5.1. Дальнейшие построения проводятся по отношению к некоторому фиксированному цилиндру $Q \in Q_T$. Устраиваем локализацию в окрестности любой точки $z_0 \in Q$ с помощью специально построенных в разделе 2 цилиндров, учитывая несколько факторов: значение $p_0 = p(z_0)$, расстояние до границы ∂Q , значения $|\nabla u|$ и функций h_i из условия (S) в точке z_0 . Отметим особо различие в геометрии цилиндров для случаев $p_0 < 2$ и $p_0 \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Выделим несколько шагов.

1°. Применяя лемму 2.2 к функции $f^p = |\nabla u|^p + h^p$, убеждаемся в выполнении условий (4.6), (4.7), если в них большой параметр λ заменить на $\tilde{\lambda} = \lambda/\rho(z_0)$, где вес $\rho(z)$ определен в (2.6). Это относится к тем точкам z_0 , в которых $f(z_0) > \tilde{c}\lambda/\rho(z_0)$, $\lambda > \lambda_0 \geq 1$. Константы $\tilde{c}$ и λ_0 могут быть точно указаны, см. раздел 2, а константа c_3 из (4.6) зависит лишь от размерности n . По лемме 2.2 получаем также неравенство

$$c^{-1} \int_{Q^3} (|\nabla u|^p + h^p) dz \leq \tilde{\lambda}^{p_0} \leq c \int_{Q^0} (|\nabla u|^p + h^p) dz, \quad c > 1. \quad (6.1)$$

2°. Коль скоро обеспечены условия (4.6) и (4.7), можно считать доказанным неравенство (4.22). Совмещая различные обозначения из разделов 2 и 4 для одних и тех же цилиндров $Q_r = Q^0$, $Q_{2r} = Q^1$, $Q_{8r} = Q^3$, записываем (4.22) в следующем виде:

$$\int_{Q^0} |\nabla u|^p dz \leq c_6 \left(1 + \left(\int_{Q^1} |\nabla u|^{p/q} dz \right)^{q_0} + \int_{Q^1} h^p dz \right), \quad q_0 = q(z_0),$$

что вместе с (6.1) дает для функции $f^p = |\nabla u|^p + h^p$ неравенство

$$C^{-1} \int_{Q^3} f^p dz \leq \tilde{\lambda}^{p_0} \leq C \left(1 + \left(\int_{Q^1} f^{p/q} dz \right)^{q_0} + \int_{Q^1} h^p dz \right), \quad C > 1. \quad (6.2)$$

Из соотношений $1/2 \leq d(z)/d(z_0) \leq 3/2$, $z \in Q^3$, следуют аналогичные соотношения для веса $\rho(z)$:

$$0 < \hat{c} \leq \frac{\rho(z)}{\rho(z_0)} \leq \hat{c}^{-1}, \quad z \in Q^3.$$

Тогда из (6.2), полагая

$$F^p = (f \tilde{c}^{-1})^p, \quad G^p = (h^p + 1)\rho^p, \quad (6.3)$$

имеем $F(z_0) > \lambda$, при этом

$$\hat{c}_0^{-1} \int_{Q^3} F^p dz \leq \lambda^{p_0} \leq \hat{c}_0 \left(\left(\int_{Q^1} F^{p/q} dz \right)^{q_0} + \int_{Q^1} G^p dz \right), \quad \hat{c}_0 > 1.$$

Таким образом, для функции F из (6.3) проверено условие (5.4), причем показатели p и q , с которыми мы работаем, подчинены соотношениям (5.1).

3°. Геометрические параметры построенных в лемме 2.1 цилиндров (см. (2.8)), удовлетворяют условиям (2.10):

$$r \leq c\tilde{\lambda}^{-2/(n+2)} = c\lambda^{-2/(n+2)}\rho_0^{2/(n+2)} \leq c_1\lambda^{-l},$$

$$\tau = \theta r^2 = \tilde{\lambda}^{2-p_0}r^2 \leq c^2\tilde{\lambda}^{2n/(n+2)-\alpha} = c^2\lambda^{2n/(n+2)-\alpha}\rho_0^{\alpha-2n/(n+2)} \leq c_1\lambda^{-l}$$

для подходящих констант $c_1, l > 0$. Таким образом, проверены неравенства (5.3). В итоге все предположения теоремы 5.1 выполнены для функции F из (6.3).

4°. По теореме 5.1 при достаточно малом $\delta > 0$ конечна норма $\|F^{q+\delta}\|_{L^1(Q)}$, если $G^{q+\delta} \in L^1(Q)$. Возвращаясь от функций F и G к исходным функциям $|\nabla u|$ и h , выводим отсюда свойство локальной повышенной суммируемости (1.4). Теорема 1.1 доказана.

7. О пространствах Соболева–Орлича

7.1. Пусть p – измеримая в Q_T функция такая, что $1 < \alpha \leq p(z) \leq \beta < \infty$. Через $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ обозначим множество всех измеримых в Q_T функций $f(z)$ таких, что

$$A_p(f) = \int_{Q_T} |f(z)|^{p(z)} dz < \infty.$$

Класс $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ будет рефлексивным банаховым пространством, называемым *пространством Орлича*, если норму $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 : A_p(\lambda^{-1}f) \leq 1\}. \quad (7.1)$$

Заметим, что нижняя грань в (7.1) достигается, если $A_p(f) > 0$. Кроме того,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \lambda > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A_p(\lambda^{-1}f) = 1.$$

Отсюда выводятся свойства нормы $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$, связывающие ее с интегралом $A_p(f)$:

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad A_p(f) \leq 1, \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1 &\implies \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\alpha \leq A_p(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\beta, \\ \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1 &\implies \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\beta \leq A_p(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\alpha, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ в } L^{p(\cdot)}(Q_T) \quad \Longleftrightarrow \quad A_p(f - f_\varepsilon) \rightarrow 0.$$

Справедливы также следующие простые факты:

(i) имеет место непрерывное вложение пространств

$$L^\beta(Q_T) \subset L^{p(\cdot)}(Q_T) \subset L^\alpha(Q_T);$$

(ii) выполнено обобщенное неравенство Гёльдера

$$\int_{Q_T} fg \, dz \leq 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(Q_T)}, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \quad (7.4)$$

Из (7.4) нетрудно вывести утверждение:

$$f_h \rightarrow f \text{ в } L^{p(\cdot)}(Q_T), \quad g_h \rightarrow g \text{ в } L^{p'(\cdot)}(Q_T) \implies \int_{Q_T} f_h g_h dz \rightarrow \int_{Q_T} f g dz. \quad (7.5)$$

Введенное в разделе 1 пространство $W(Q_T)$ рассматривается как подпространство в $L^2(Q_T) \times L^{p(\cdot)}(Q_T)^n$ с нормой

$$\|u\|_{W(Q_T)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)^n} + \|u\|_{L^2(Q_T)}.$$

Легко видеть, что $W(Q_T)$ замкнуто в $L^2(Q_T) \times L^{p(\cdot)}(Q_T)^n$.

Другие свойства пространств Соболева–Орлича можно почерпнуть из обширной литературы по этому вопросу, см., например, [9], [10].

7.2. Приведем доказательство теоремы 1.4, в котором ключевой оказывается

ЛЕММА 7.1. Пусть определенная на Q_T функция $p(z)$ удовлетворяет условиям: $p(z) \geq 1$ и

$$|p(z) - p(z')| \leq \omega(|z - z'|),$$

где

$$\omega(s) = \frac{k}{\ln(1/s)}, \quad k = \text{const} > 0, \quad s \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Тогда для сглаживаний $f_h(z)$ (см. (1.6)) справедлива оценка

$$\int_{Q'} |f_h(z)|^{p(z)} dz \leq c_0 \int_{Q_T} (|f(z)|^{p(z)} + 1) dz, \quad Q' \Subset Q_T, \quad (7.6)$$

где $c_0 = 2e^{k(n+1)} + 1$, $h \in (0, h_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.1. Начнем с простого наблюдения

$$|f_h(z)| \leq h^{-(n+1)} (\sup \rho) \|f\|_{L^1(Q_T)} \equiv h^{-(n+1)} \hat{c}. \quad (7.7)$$

Кроме того, полагая

$$p^h(z) = \min\{p(z'), |x - x'| < h, |t - t'| < h\},$$

имеем

$$\begin{aligned} 1 \leq p^h(z) \leq p(z') & \quad \text{при } |x - x'| < h, \quad |t - t'| < h, \\ \lambda^{p(z)} \leq c_0 \lambda^{p^h(z)} & \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq \hat{c} h^{-(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Для вывода (7.8)₂ заметим, что $0 \leq p(z) - p^h(z) \leq \omega(h)$ и $h^{-\omega(h)} = e^k$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda^{p(z)} &= \lambda^{p(z) - p^h(z)} \lambda^{p^h(z)} \leq (\lambda^{\omega(h)} + 1) \lambda^{p^h(z)} \\ &\leq \left[\left(\frac{\hat{c}}{h^{n+1}} \right)^{\omega(h)} + 1 \right] \lambda^{p^h(z)} \leq c_0 \lambda^{p^h(z)}, \quad h \in (0, h_0]. \end{aligned}$$

Из (7.7), (7.8) по интегральному неравенству Йенсена, получаем

$$\begin{aligned} |f_h(z)|^{p(z)} &\leq c_0 |f_h(z)|^{p^h(z)} \leq c_0 h^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho\left(\frac{z - z'}{h}\right) |f(z')|^{p^h(z)} dz', \\ |f_h(z)|^{p(z)} &\leq c_0 h^{-(n+1)} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \rho\left(\frac{z - z'}{h}\right) (|f(z')|^{p(z')} + 1) dz'. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Интегрируя (7.9) с изменением порядка интегрирования в правой части, выводим

$$\int_{Q'} |f_h(z)|^{p(z)} dz \leq c_0 \int_{Q_T} (|f(z)|^{p(z)} + 1) dz,$$

что и требуется. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Оценку (7.6) легко переписать в нормах Орлича:

$$\|f_h\|_{L^{p(\cdot)}(Q')} \leq c_1 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, \quad c_1 = c_0(1 + |Q_T|). \quad (7.10)$$

Действительно, достаточно рассмотреть случай $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq 1$. Тогда из (7.2) и (7.6) получим

$$\int_{Q'} |f_h|^p dz \leq c_1,$$

а сама оценка (7.10) следует теперь из (7.3).

Итак, сглаживания $I^h: L^{p(\cdot)}(Q_T) \rightarrow L^{p(\cdot)}(Q')$ равномерно ограничены по операторной норме. Поскольку $I^h f \rightarrow f$ равномерно в Q' , если $f \in C_0^\infty(Q_T)$, и множество функций $C_0^\infty(Q_T)$ плотно в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$, то из теоремы Банаха–Штейнгауза получаем сходимость сглаживающих операторов, указанную в теореме 1.4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Kinnunen, J. L. Lewis, “Higher integrability for parabolic systems of p -Laplacian type”, *Duke Math. J.*, **102**:2 (2000), 253–271.
- [2] S. Antontsev, V. Zhikov, “Higher integrability for parabolic equations of $p(x, t)$ -Laplacian type”, *Adv. Differential Equations*, **10**:9 (2005), 1053–1080.
- [3] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. М. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [4] E. DiBenedetto, *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [5] M. Giaquinta, G. Modica, “Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems”, *J. Reine Angew. Math.*, **311/312** (1979), 145–169.
- [6] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variation and Nonlinear Elliptic Systems*, Ann. of Math. Stud, **105**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [7] F. W. Gehring, “The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping”, *Acta Math.*, **130** (1973), 265–277.
- [8] В. В. Жиков, “О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 35, Зап. научн. сем. ПОМИ, **310**, ПОМИ, СПб., 2004, 67–81.
- [9] D. E. Edmunds, J. Rákosník, “Sobolev embeddings with variable exponent”, *Studia Math.*, **143**:3 (2000), 267–293.
- [10] X. Fan, J. Shen, D. Zhao, “Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **262**:2 (2001), 749–760.

В. В. Жиков

Владимирский государственный гуманитарный университет

E-mail: zhikov@vladgu.ru

Поступило

22.06.2008

С. Е. Пастухова

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

E-mail: pas-se@yandex.ru