Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Спектральные асимптотики для одной стационарной задачи теплопроводности в перфорированной области, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 4, 600–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 18:34:59

УДК 517.946.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ ОДНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

С. Е. Пастухова

В статье изучаются собственные значения (СЗ) и собственные функции (СФ) краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими коэффициентами в периодически перфорированной области, когда краевое условие на внешней границе – первого типа, а на границе “дырок” – третьего типа, в том случае, когда ε – линейный размер периода перфорации – стремится к нулю. Доказано, что эти СЗ и СФ можно определять приближенно через СЗ и СФ существенно более простой задачи Дирихле для эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами в области без “дырок”. Для этих приближений даны оценки величины погрешности.

Библиография: 10 названий.

Введение. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей Γ , ω – неограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с 1-периодической структурой, граница $\partial\omega$ – кусочно гладкая, $\varepsilon\omega = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$. Если $K = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 < x_i < 1, i = 1, \dots, d\}$, $P = K \cap \omega$, $S = \partial\omega \cap K$, то предположим, что S отстоит от границы K на положительном расстоянии. Граница Ω_ε представляется в виде $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup S_\varepsilon$, где $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \varepsilon\omega$, $S_\varepsilon = \partial(\varepsilon\omega) \cap \Omega$. Таким образом, Ω_ε – перфорированная область первого типа по классификации [1, с. 38–39]. Рассмотрим в Ω_ε задачу на собственные значения (СЗ), взятую из теории стационарной теплопроводности:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u = \lambda u & \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 dx = 1, \\ B_\varepsilon u = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (1_\varepsilon)$$

В этой задаче:

- 1) $\varepsilon \in (0, 1)$ – малый параметр, стремящийся к нулю;
- 2) $A_\varepsilon = D_i a_{ij}(x/\varepsilon) D_j$ (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d), $D_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, d$; $a_{ij}(y)$ – гладкие 1-периодические вещественные функции для $i, j = 1, \dots, d$ такие, что $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i и j ; существуют константы $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ при всех $y \in K$ выполнено неравенство $\delta_1 \xi_i \xi_i \leq a_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \delta_2 \xi_i \xi_i$;
- 3) $B_\varepsilon = a_{ij} n_i D_j + a(x/\varepsilon)$, где $n = (n_1, \dots, n_d)$ – вектор единичной внешней нормали к S_ε , $a(y)$ – гладкая 1-периодическая неотрицательная функция (впрочем условие неотрицательности $a(y)$ в настоящей работе несущественно, и в его отсутствии верны основные результаты, сформулированные в теоремах 6, 7 (см. замечание после теоремы 7)).

Известно (см. [2]–[5]), что существует счетное множество решений задачи (1_ε) – СЗ $\lambda_{\varepsilon,k}$ и соответствующих им собственных функций (СФ) $u_{\varepsilon,k}$, обладающее свойствами:

- а) $\{u_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2(\Omega_\varepsilon)$;
- б) $0 < \lambda_{\varepsilon,1} \leq \dots \leq \lambda_{\varepsilon,k} \dots \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$;
- в) кратность $\lambda_{\varepsilon,k}$ конечна для любого k , в последовательности пункта б) каждое СЗ $\lambda_{\varepsilon,k}$ записано с учетом его кратности.

Задачу (1_ε) , в которой на части границы поставлено третье краевое условие, можно сравнить с двумя другими краевыми задачами на СЗ в Ω_ε : с первым и вторым краевым условием на границе S_ε и неизменным нулевым условием Дирихле на внешней границе Γ_ε . Трем краевым условиям на S_ε в этих краевых задачах на СЗ соответствует из теории стационарной теплопроводности один из трех температурных режимов на границе S_ε :

- 1) на S_ε поддерживается нулевая температура;
- 2) тепловой обмен через S_ε отсутствует;
- 3) тепловой обмен на S_ε происходит по закону Ньютона.

Собственные значения этих трех краевых задач $\lambda_{\varepsilon,k}^I, \lambda_{\varepsilon,k}^{II}, \lambda_{\varepsilon,k}^{III}, k = 1, 2, \dots$, пронумерованные в каждой серии по возрастанию с учетом кратности, удовлетворяют неравенству (см. [2], [4]):

$$0 \leq \lambda_{\varepsilon,k}^{III} \leq \lambda_{\varepsilon,k}^{II} \leq \lambda_{\varepsilon,k}^I, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ для СЗ $\lambda_{\varepsilon,k}^I, \lambda_{\varepsilon,k}^{II}$ (с условием Дирихле и Неймана соответственно) известны (см. [1]):

$$\lambda_{\varepsilon,k}^{II} = \lambda_k^{II} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \lambda_{\varepsilon,k}^I = \Lambda_0 \varepsilon^{-2} + \lambda_k^I + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $\lambda_k^I, \lambda_k^{II}$ – СЗ краевых задач Дирихле в области Ω для осредненных (в каждом случае по-своему) операторов, $\Lambda_0 = \text{const}(a_{ij}, P) > 0$. В настоящей работе получена асимптотика для СЗ $\lambda_{\varepsilon,k}^{III}$ и соответствующих им СФ; она оказывается промежуточной в смысле неравенства (2) по отношению к известным асимптотикам $\lambda_{\varepsilon,k}^I$ и $\lambda_{\varepsilon,k}^{II}$, а именно, если $\lambda_{\varepsilon,k}^{III} = \lambda_{\varepsilon,k} - \text{СЗ задачи } (1_\varepsilon)$, то

$$\lambda_{\varepsilon,k} = \Lambda \varepsilon^{-1} + \lambda_k + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где λ_k – СЗ некоторой задачи Дирихле в области Ω (приведены формулы для коэффициентов ее оператора), $\Lambda = \text{const}(a, P)$; при этом $\Lambda > 0$, если $a \geq 0, a \not\equiv 0$.

Отметим, что задачу (1_ε) можно рассматривать также для граничного оператора B_ε такого, что $\langle a \rangle_S = (\text{mes})^{-1} \int_S a(y) dy = 0$. Результаты ее усреднения так же, как и способ их получения, аналогичны тем, что получаются при $a \equiv 0$, т.е. при условии Неймана на границе S_ε . Если $\langle a \rangle_S = 0$, то пригодна абстрактная схема усреднения СЗ и СФ краевых задач, изложенная в [1], поскольку в этом случае разрешающий оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ краевой задачи

$$\begin{cases} A_\varepsilon u = f & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ B_\varepsilon u = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \quad u = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (3_\varepsilon)$$

близок в определенном смысле при $\varepsilon \rightarrow 0$ к разрешающему оператору некоторой задачи Дирихле в области Ω для эллиптического уравнения второго порядка с постоянными

коэффициентами (см. [6]). Если же $a \geq 0$ на S , то $\mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в определенном смысле (см. [7], [8] для частного случая, когда правая часть – функция f – финитна в Ω) и поэтому не выполняются условия (С2), (С3) из главы III [1], необходимые для использования абстрактной схемы усреднения спектра из [1]. В том и состоит трудность изучения задачи (1_ε) при $\varepsilon \rightarrow 0$, что для нее непосредственно без дополнительных построений и привязок не работает абстрактная схема усреднения из [1]. Точная формулировка полученных результатов с их доказательством дана в п. 2. Необходимые для этого вспомогательные утверждения вынесены в п. 1.

1. Вспомогательные утверждения. Далее используются стандартные пространства $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega, \Gamma)$, где $H^1(M, M_1) = \{u \in H^1(M) : u = 0 \text{ на } M_1\}$, и хорошо известные неравенства (см., например, [1, с. 11]) для функции $u(y) \in H^1(P)$:

$$\|u\|_{L^2(S)}^2 \leq C_1 \|u\|_{H^1(P)}^2, \quad (4)$$

$$\|u\|_{L^2(P)}^2 \leq C_2 \left(\frac{\partial}{\partial y_i} u, \frac{\partial}{\partial y_i} u \right), \quad \text{если } \int_P u(y) dy = 0, \quad (5)$$

где константы C_1, C_2 зависят лишь от геометрии области P .

Введем вспомогательные области $\Omega^0, \Omega', \Omega'_\varepsilon$:

- 1) Ω^0 – некоторая область такая, что $\Omega^0 \supset \Omega$, $\rho(\partial\Omega^0, \Omega) > 1$;
- 2) если $T_\varepsilon = \{z \in \mathbb{Z}^d : \varepsilon(P + z) \cap \Omega \neq \emptyset\}$, то Ω'_ε – множество внутренних точек множества $\bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(\overline{P} + z)$;
- 3) Ω' – множество внутренних точек множества $\bigcup_{z \in T_\varepsilon} \varepsilon(\overline{K} + z)$.

Видно, что $\Omega'_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N \overline{P}_\varepsilon^i$, $\Omega' = \bigcup_{i=1}^N \overline{K}_\varepsilon^i$, где $N = N(\varepsilon)$, P_ε^i – ячейка периодичности, гомотетичная P с коэффициентом ε , K_ε^i – куб с ребром ε , $P_\varepsilon^i \subset K_\varepsilon^i$. Пусть $S'_\varepsilon = \partial\Omega'_\varepsilon \setminus \partial\Omega'$, тогда если $S_\varepsilon^i = \partial P_\varepsilon^i \setminus \partial K_\varepsilon^i$, то по определению множеств $S'_\varepsilon, \Omega'_\varepsilon, \Omega'$ имеем

$$S'_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^N S_\varepsilon^i. \quad (6)$$

В [1, с. 43–44] доказана в рамках более общего утверждения следующая

ЛЕММА 1. При достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon_0$) существует оператор продолжения $\mathcal{P}^\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon) \rightarrow H_0^1(\Omega^0)$ такой, что для любой функции $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$

$$\mathcal{P}^\varepsilon U = 0 \quad \text{в } (\Omega'_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon) \cup (\Omega^0 \setminus \Omega')$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^d \|D_i \mathcal{P}^\varepsilon u\|_{L^2(\Omega^0)}^2 \leq C_3 \sum_{i=1}^d \|D_i u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$$

с константой C_3 , не зависящей от ε ($C_3 = \text{const}(\Omega, P)$).

Далее на протяжении всей работы будем обозначать:

- 1) скалярное произведение в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(S_\varepsilon)$ – через $(\cdot, \cdot)_\varepsilon$ и $(\cdot, \cdot)'_\varepsilon$ соответственно;
- 2) нормы в $L^2(\Omega_\varepsilon)$ и $L^2(S_\varepsilon)$ – через $\|\cdot\|_\varepsilon$ и $\|\cdot\|'_\varepsilon$ соответственно;
- 3) выражение $\sqrt{(D_i u, D_i u)_\varepsilon}$ – через $\|\nabla_x u\|_\varepsilon$;
- 4) k -мерную меру множества M , если $\dim M = k$, – через $|M|$.

Далее $\langle w \rangle_M = |M|^{-1} \int_M w \, ds$ – среднее функции w по множеству M . Через $C_i, i \in \mathbb{N}$, обозначаем константы, не зависящие от ε . В последующих утверждениях выражение “при $\varepsilon < \varepsilon_0$ ” означает, что значения ε рассматриваются достаточно малыми, меньшими некоторой величины ε_0 , и ε_0 определяется лишь геометрией областей Ω, P и, быть может, коэффициентами $a_{ij}(y), a(y)$.

ЛЕММА 2. *При $\varepsilon < \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = \text{const}(\Omega, P)$) для любой функции $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ верны неравенства:*

$$\|u\|_\varepsilon^2 \leq C_4 \|\nabla_x u\|_\varepsilon^2, \quad (7)$$

$$\|u\|_\varepsilon'^2 \leq C_1 (\varepsilon^{-1} \|u\|_\varepsilon^2 + \varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon^2), \quad (8)$$

$$\| \|u\|_\varepsilon'^2 - \varepsilon^{-1} |S| |P|^{-1} \|u\|_\varepsilon^2 \| \leq C_5 (\|u\|_\varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon + \varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon^2), \quad (9)$$

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) u^2 \, ds \right| \leq C_6 \gamma_0 (\|u\|_\varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon + \varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon^2), \quad (10)$$

где C_1 – константа из (4); $\gamma(y)$ – гладкая 1-периодическая функция, заданная на $\partial\omega$, такая, что $\langle \gamma \rangle_S = 0$, $|\gamma|_{C(S)} = \gamma_0$; $C_i = \text{const}(P)$, $i = 5, 6$; $C_4 = \text{const}(\Omega, P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $U = \mathcal{P}^\varepsilon u$, где $\mathcal{P}^\varepsilon$ – оператор продолжения из леммы 1. Применяя неравенство Фридрихса для области Ω^0 к функции $U \in H_0^1(\Omega^0)$, а также оценку из леммы 1, легко вывести (7).

2. Для такой же, как в пункте 1, функции U можно вывести из неравенства (4) и соображений подобия оценку

$$\|U\|_{L^2(S_\varepsilon^i)}^2 \leq C_1 \varepsilon^{d-1} (\varepsilon^{-d} \|U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2 + \varepsilon^{2-d} \|\nabla_x U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2),$$

где S_ε^i – произвольная компонента из представления (6) для множества $S'_\varepsilon, i = 1, \dots, N$. Далее, суммируя полученные оценки по i от 1 до N и учитывая свойства оператора $\mathcal{P}^\varepsilon$, получаем (8).

3. Чтобы доказать (9), сопоставим функции $U(x)$, определенной для $u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ так же, как в предыдущих пунктах, кусочно постоянную функцию $\hat{U}(x)$, равную $\langle U \rangle_{P_\varepsilon^i}$ на каждой из областей $K_\varepsilon^i, i = 1, \dots, N$, составляющих Ω' . Используя определение $\hat{U}$, можно получить следующие неравенства (подобные неравенства подробно доказаны в [9, с. 286–287]), вытекающие из оценок (4), (5) и неравенства Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} \|\hat{U}\|_{L^2(P_\varepsilon^i)} &\leq \|U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}, \\ \|\hat{U}\|_{L^2(S_\varepsilon^i)}^2 &\leq (\varepsilon \lambda)^{-1} \|U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2, \\ \|U - \hat{U}\|_{L^2(S_\varepsilon^i)}^2 &\leq \varepsilon C_1 (C_2 + 1) \|\nabla_x U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2, \\ \|U - \hat{U}\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2 &\leq C_2 \varepsilon^2 \|\nabla_x U\|_{L^2(P_\varepsilon^i)}^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $P_\varepsilon^i, i = 1, \dots, N$, – любая компонента из представления Ω'_ε . Далее представим величину $J = \|u\|_\varepsilon'^2 - \varepsilon \lambda \|u\|_\varepsilon'^2$, где $\lambda = |S|^{-1} |P|$, используя свойства оператора $\mathcal{P}^\varepsilon$, в следующем виде:

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Omega'_\varepsilon} (U - \hat{U}) U \, dx + \int_{\Omega'_\varepsilon} (U - \hat{U}) \hat{U} \, dx + \int_{\Omega'_\varepsilon} \hat{U}^2 \, dx - \varepsilon \lambda \int_{S'_\varepsilon} \hat{U}^2 \, ds \\ &\quad + \varepsilon \lambda \int_{S'_\varepsilon} \hat{U} (\hat{U} - U) \, ds + \varepsilon \lambda \int_{S'_\varepsilon} U (\hat{U} - U) \, ds = J_1 + \dots + J_6. \end{aligned} \quad (12)$$

В силу определения функции $\widehat{U}$ имеем

$$J_3 + J_4 = 0. \quad (13)$$

Оценим сверху $|J_i|$, $i = 1, 2, 5, 6$, в (12). Например,

$$J_1 = \sum_{i=1}^N J_{1i}, \quad \text{где } J_{1i} = \int_{P_\varepsilon^i} (U - \widehat{U})U \, dx$$

(см. определение J_1 и Ω'_ε), и поэтому в силу неравенства Коши–Буняковского, четвертого неравенства из (11) и свойств оператора продолжения $\mathcal{P}^\varepsilon$ имеем $|J_1| \leq C_7 \varepsilon \|u\|_\varepsilon \times \|\nabla_x u\|_\varepsilon$.

Подобным же образом с использованием неравенств из (11) выводятся аналогичные оценки для J_2 , J_5 , J_6 , а для оценки J_6 используем также (8):

$$\begin{aligned} |J_i| &\leq C_8 \varepsilon \|u\|_\varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon, \quad i = 2, 5, \\ |J_6| &\leq C_9 (\varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon \|u\|_\varepsilon + \varepsilon^2 \|\nabla_x u\|_\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из полученных оценок для J_1 , J_2 , J_5 , J_6 в силу (12) и (13) вытекает справедливость (9).

4. Для доказательства (10) будем использовать функции U , $\widehat{U}$ из предыдущего пункта, а также неравенства (11). Поскольку $\langle \gamma \rangle_S = 0$, то, учитывая свойства оператора $\mathcal{P}^\varepsilon$ и функции $\widehat{U}$, получаем представление для величины $I = \int_{S_\varepsilon} \gamma(x/\varepsilon) u^2 \, ds$:

$$I = \int_{S'_\varepsilon} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (U - \widehat{U})U \, ds + \int_{S'_\varepsilon} \gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \widehat{U}(U - \widehat{U}) \, ds = I_1 + I_2, \quad (14)$$

при этом аналогично тому, как доказывались оценки для величин J_i в пункте 3, можно показать, что

$$|I_1| \leq \gamma_0 C_{10} \|\nabla_x u\|_\varepsilon (\|u\|_\varepsilon + \|\nabla_x u\|_\varepsilon), \quad |I_2| \leq \gamma_0 C_{11} \|u\|_\varepsilon \|\nabla_x u\|_\varepsilon.$$

Из этих оценок для I_1 , I_2 ввиду представления (14) следует справедливость оценки (10).

2. Основные результаты и их доказательство. Введем вспомогательную задачу на СЗ, в которой $\Lambda = |S| |P|^{-1} \langle a \rangle_S$, t – произвольный вещественный параметр такой, что $t > t_0$, где $t_0 = \text{const}(\Omega, P, a_{ij}, a) > 0$, и выбор t_0 определится из дальнейшего:

$$\begin{cases} A_{\varepsilon, \Lambda, t} u \equiv (A_\varepsilon + \varepsilon^{-1} \Lambda - t)u = \mu u & \text{в } \Omega_\varepsilon, & \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 \, dx = 1, \\ B_\varepsilon u = 0 & \text{на } S_\varepsilon, & u = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (1_{\varepsilon, \Lambda, t})$$

ТЕОРЕМА 1. Собственные функции задач (1_ε) и $(1_{\varepsilon, \Lambda, t})$ совпадают, а их собственные значения связаны между собой соотношением: $\lambda_{\varepsilon, k} = \mu_{\varepsilon, k} + \varepsilon^{-1} \Lambda - t$, где $\mu_{\varepsilon, 1} \leq \mu_{\varepsilon, 2} \leq \dots$ – последовательность СЗ задачи $(1_{\varepsilon, \Lambda, t})$, упорядоченная по возрастанию с учетом их кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С задачами (1_ε) и $(1_{\varepsilon, \Lambda, t})$ связаны следующие квадратичные функционалы на пространстве функций $H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$:

$$I_\varepsilon(u) = \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) D_i u D_j u \, dx + \int_{S_\varepsilon} a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) ds$$

и

$$J_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(u) + (t - \varepsilon^{-1} \Lambda) \int_{\Omega_\varepsilon} u^2 \, dx$$

соответственно. Причем для всех u таких, что $\|u\|_\varepsilon = 1$, имеем: $I_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u) + \varepsilon^{-1} \Lambda - t$. Отсюда с учетом вариационного определения СЗ и СФ вытекает справедливость теоремы 1.

Рассмотрим связанную с задачей $(1_{\varepsilon, \Lambda, t})$ краевую задачу

$$\begin{cases} A_{\varepsilon, \Lambda, t} v \equiv (A_\varepsilon + \varepsilon^{-1} \Lambda - t) v = f + D_i f_i & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ B_\varepsilon v = g + f_i n_i & \text{на } S_\varepsilon, \quad v = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (15)$$

где $f, f_i \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, $i = 1, \dots, d$. Решение этой задачи рассматривается в обобщенном смысле, т.е. как некоторая функция $v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$, удовлетворяющая соответствующему интегральному тождеству.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ε, t^{-1} достаточно малы ($\varepsilon < \varepsilon_0(\Omega, P, a_{ij}, a)$, $t > t_0(P, a_{ij}, a)$). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если v – решение задачи (15), то для функции v выполнена оценка

$$\|\nabla_x v\|_\varepsilon \leq C_{12} \left(\|f\|_\varepsilon + \sum_{i=1}^d \|f_i\|_\varepsilon + \varepsilon^{-1/2} \|g\|'_\varepsilon \right); \quad (16)$$

2) если $g = f_i = 0$, $i = 1, \dots, d$, то задача (15) разрешима, притом единственным образом для любой функции $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из интегрального тождества, которому удовлетворяет решение задачи (15), выводим равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} D_i v D_j v \, dx + \int_{S_\varepsilon} a v^2 \, ds + (t - \varepsilon^{-1} \Lambda) \int_{\Omega_\varepsilon} v^2 \, dx \\ = -(f + D_i f_i, v)_\varepsilon + (g + f_i n_i, v)'_\varepsilon. \end{aligned}$$

Преобразуя его, получаем, используя эллиптичность оператора A_ε и то, что $\Lambda = |S| \times |P|^{-1} \langle a \rangle_S$:

$$\begin{aligned} \delta_1 \|\nabla_x v\|_\varepsilon^2 + \int_{S_\varepsilon} (a - \langle a \rangle_S) v^2 \, ds + \langle a \rangle_S (\|v\|_\varepsilon^2 - |S| |P|^{-1} \varepsilon^{-1} \|v\|_\varepsilon^2) + t \|v\|_\varepsilon^2 \\ \leq \|f\|_\varepsilon \|v\|_\varepsilon + \|f_i\|_\varepsilon \|D_i v\|_\varepsilon + \|g\|'_\varepsilon \|v\|'_\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда с помощью неравенств (7)–(10) выводим:

$$\begin{aligned} & \|v\|_\varepsilon^2(\delta_1 - C_5\varepsilon - C_6\gamma_0\varepsilon) - (C_5 + C_6\gamma_0)\|v\|_\varepsilon\|\nabla_x v\|_\varepsilon + t\|v\|_\varepsilon^2 \\ & \leq C_{13}\|\nabla_x v\|_\varepsilon(\|f\|_\varepsilon + (f_i, f_i)_\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{-1/2}\|g\|'_\varepsilon). \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть ε достаточно мало, так что $\delta_1 - C_5\varepsilon - C_6\gamma_0\varepsilon > \delta_1/2$, и далее используем неравенство $2\|v\|_\varepsilon\|\nabla_x v\|_\varepsilon \leq \rho^{-1}\|v\|_\varepsilon^2 + \rho\|\nabla_x v\|_\varepsilon^2$, где ρ выбрано достаточно малым, так что $(1/2)(C_5 + C_6\gamma_0)\rho < (1/4)\delta_1$. Тогда если в (17) $t > (C_5 + C_6\gamma_0)\rho^{-1}$, то при надлежащем выборе параметров ε, t из (17) вытекает доказываемая оценка (16).

2) Из оценки (16) следует, что задача (15) имеет тривиальное ядро, и стандартным образом из этой же оценки выводится разрешимость задачи (15) для любой правой части. Теорема 2 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся операторы: $A_{\alpha\beta} = (\partial/\partial\alpha_i)a_{ij}(y)(\partial/\partial\beta_j)$, $B_\alpha = a_{ij}(y)n_i\partial/\partial\alpha_j$, где вместо α, β могут стоять переменные x, y . Далее, как и раньше, $\Lambda = |S||P|^{-1}\langle a \rangle_S$. Введем 1-периодические по y функции $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$, $N^s(y)$, $N^{sj}(y)$, $s = 0, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, как решения формулируемых ниже краевых задач на ячейке P :

$$\begin{cases} A_{yy}v_1(x, y) = -(\Lambda + A_{yx})v(x) & \text{в } P, \quad \int_P v_1(x, y) dy = 0, \\ B_yv_1(x, y) = -(B_x + a(y))v(x) & \text{на } S, \\ v_1(x, y) & \text{1-периодическая по } y; \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} A_{yy}v_2(x, y) = -(\Lambda + A_{yx} + A_{xy})v_1(x, y) - (A_{xx} - t)v(x) + f(x) & \text{в } P, \\ B_yv_2(x, y) = -(B_x + a(y))v_1(x, y) & \text{на } S, \\ v_2(x, y) & \text{1-периодическая по } y, \quad \int_P v_2(x, y) dy = 0; \end{cases} \quad (II)$$

далее всюду считаем, что $a_{i0} = a_{0i} = 0$, $i = 1, \dots, d$, δ_{0s} – символ Кронекера:

$$\begin{cases} A_{yy}N^s(y) = -\Lambda\delta_{0s} - \frac{\partial}{\partial y_i}a_{is}(y) & \text{в } P, \\ B_yN^s(y) = -a_{is}(y)n_i - a(y)\delta_{0s} & \text{на } S, \\ N^s(y) & \text{1-периодическая по } y, \quad \langle N^s \rangle_P = 0; \end{cases} \quad (I_s, \quad s = 0, \dots, d)$$

$$\begin{cases} A_{yy}N^{sj} = -\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}N^s) - a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}N^s - a_{sj} + q_{sj} & \text{в } P, \\ B_yN^{sj} = -a_{ij}n_iN^s & \text{на } S, \\ N^{sj}(y) & \text{1-периодическая по } y, \quad \langle N^{sj} \rangle_P = 0; \end{cases} \quad (II_{sj}, \quad s, j = 1, \dots, d)$$

$$\begin{cases} A_{yy}N^{0j} = -\frac{\partial}{\partial y_i}(a_{ij}N^0) - a_{ij}\frac{\partial}{\partial y_i}N^0 - \Lambda N^j & \text{в } P, \\ B_yN^{0j} = -a_{ij}n_iN^0 - a(y)N^j & \text{на } S, \\ N^{0j}(y) & \text{1-периодическая по } y, \quad \langle N^{0j} \rangle_P = 0; \end{cases} \quad (II_{0j}, \quad j = 1, \dots, d)$$

$$\begin{cases} A_{yy}N^{00}(y) = -\Lambda N^0(y) + q_{00} & \text{в } P, \\ B_yN^{00}(y) = -a(y)N^0(y) & \text{на } S, \\ N^{00}(y) & \text{1-периодическая по } y, \quad \langle N^{00} \rangle_P = 0. \end{cases} \quad (II_{00})$$

В задачах для N^{sj} q_{sj} – константы, которые определяются через функции N^j по формулам

$$\begin{cases} q_{sj} = \left\langle a_{sj}(y) + a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} N^s(y) \right\rangle_P, & s, j = 1, \dots, d, \\ q_{00} = -|S| |P|^{-1} \langle a(y) N^0(y) \rangle_S. \end{cases} \quad (18)$$

Стандартно (см. в [1], [2] доказательство аналогичных утверждений) доказываются следующие две леммы.

ЛЕММА 3. 1) Задача (I_s) , $s = 0, \dots, d$, разрешима, притом единственным образом.

2) Задача (I) разрешима, притом единственным образом, для любой функции $v(x)$; ее решение связано с решениями задач (I_s) , $s = 0, \dots, d$, по формуле $v_1(x, y) = D_s v(x) N^s(y) + v(x) N^0(y)$.

ЛЕММА 4. Пусть константы q_{sj} , $s, j = 1, \dots, d$, q_{00} заданы по формулам (18). Тогда имеем:

- 1) задачи (Π_{00}) , (Π_{sj}) , $s = 0, \dots, d$, $j = 1, \dots, d$, разрешимы, притом единственным образом;
- 2) задача (II) имеет решение, притом единственное, для любой функции $f(x)$, если $v(x)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} Q_t v \equiv q_{sj} D_s D_j v + q_{00} v - t v = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (19)$$

и $v_1(x, y)$ – решение задачи (I) с той же самой функцией $v(x)$; при этом $v_2(x, y) = N^{sj}(y) D_s D_j v(x) + N^{0j}(y) D_j v(x) + N^{00}(y) v(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 3 И 4. Разрешимость задач (I_0) , (Π_{00}) , (I_s) , (Π_{sj}) , $s, j = 1, \dots, d$, обусловлена правильным выбором, во-первых, параметра Λ , а во-вторых, констант q_{sj} в соответствии с формулами (18). Менее тривиальна разрешимость задачи (Π_{0j}) , $j = 1, \dots, d$. Поясним этот момент подробнее. Обозначим правые части из уравнения и краевого условия на границе S в этой задаче через $g(y)$ и $h(y)$ соответственно. Тогда разрешимость задачи следует из условия $\int_P g(y) dy - \int_S h(y) ds = 0$. Но его, учитывая то, что $\langle N^j \rangle_P = 0$, легко привести к виду:

$$\int_P a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} N^0(y) dy - \int_S a(y) N^j(y) ds = 0. \quad (20)$$

Чтобы доказать (20), запишем, во-первых, интегральное тождество, которому удовлетворяет решение задачи (I_s) , $s = 1, \dots, d$, и, во-вторых, интегральное тождество, которому удовлетворяет решение (I_0) . Тогда соответственно получим:

$$\begin{aligned} \int_P a_{ij} \frac{\partial N^s}{\partial y_j} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy &= - \int_P a_{is} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy, & s = 1, \dots, d, \\ \int_P a_{ij} \frac{\partial N^0}{\partial y_j} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy &+ \int_S a w ds = \Lambda \int_P w dy, \end{aligned}$$

где $w(y)$ – произвольная 1-периодическая функция из $H^1(P)$. Возьмем в первом тождестве $w = N^0$, а во втором – $w = N^s$, $s = 1, \dots, d$. Тогда, учитывая условие $\langle N^s \rangle_P = 0$, $s = 1, \dots, d$, получаем для $s = 1, \dots, d$:

$$\int_P a_{ij} \frac{\partial N^s}{\partial y_j} \frac{\partial N^0}{\partial y_i} dy = - \int_P a_{is} \frac{\partial N^0}{\partial y_i} dy, \quad (21)$$

$$\int_P a_{ij} \frac{\partial N^0}{\partial y_j} \frac{\partial N^s}{\partial y_i} dy + \int_S a N^s ds = 0. \quad (22)$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то из равенств (21), (22) вытекает справедливость (20). Значит, разрешимость задачи (Π_0) , $j = 1, \dots, d$, показана.

ЛЕММА 5. 1. *Оператор Q_t задачи (19) эллиптический и самосопряженный при любом t .*

2. *Задача (19) имеет решение (в обобщенном смысле), притом единственное, для любой $f \in L^2(\Omega)$, если $t > t_0 = \text{const}(P, a, a_{ij})$, причем $t_0 = q_{00}$ и q_{00} определено в (18).*

3. *Если $t > t_0$ (t_0 из пункта 2) и $\mathcal{A}_0: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ – разрешающий оператор задачи (19), то $\mathcal{A}_0$ – самосопряженный, компактный, положительно определенный оператор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 утверждения леммы 5 доказывается так же, как аналогичные утверждения из [1], [9], [10], возникающие при усреднении различных краевых задач. Из формул (18) видно, что q_{ij} , $i, j = 1, \dots, d$, зависят лишь от N^j , $j = 1, \dots, d$, и, значит, не зависят от коэффициента $a(y)$. Поэтому $q_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta'_1 \xi_i \xi_i$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$, где $\delta'_1 = \text{const}(a_{ij}, P) > 0$ и δ'_1 не зависит от $a(y)$. Напротив, q_{00} (см. (18)) определяется через $a(y)$ и $N^0(y)$, значит, $q_{00} = \text{const}(P, a, a_{ij})$. Если $q_{00} - t \leq 0$, т.е. $t \geq q_{00}$, то, как легко видеть, ядро задачи (19) тривиально. И далее пункты 2 и 3 доказываются стандартно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что при $a(y) \not\equiv 0$ в (18) имеем: $q_{00} > 0$. Действительно, из определения q_{00} , а также из интегрального тождества, которому удовлетворяет функция $N^0(y)$ как решение задачи (I_0) , следует:

$$|P|q_{00} = - \int_S a N^0 ds = \int_P a_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} N^0 \frac{\partial}{\partial y_j} N^0 dy > 0.$$

Поэтому для корректности определения разрешающего оператора $\mathcal{A}_0$ в задаче (19) нельзя рассматривать оператор Q_t при $t = 0$, если не допускать дополнительных требований (например, на согласованный выбор данных задачи (1_ε) $a_{ij}(y)$, $a(y)$, Ω , P так, чтобы $(Q_t u, u)_{L^2(\Omega)}$ была положительно определенной формой на $H_0^1(\Omega)$).

Для заданной функции $f \in H^1(\Omega)$ при достаточно малых ε , t^{-1} (таких, что разрешимы задачи (19) и (15) с $g = f_i = 0$, $i = 1, \dots, d$) определим две функции:

- 1) v_ε – решение задачи (15) с $g = f_i = 0$, $i = 1, \dots, d$;
- 2) $v_\varepsilon^{(1)}(x) = v(x) + \varepsilon(D_k v(x) N^k(x/\varepsilon) + v(x) N^0(x/\varepsilon))$, где $v(x)$, $N^k(y)$, $k = 0, \dots, d$, – решения задач (19) и (Π_k) соответственно. Связь между этими двумя функциями устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_0$, $t > t_0$, $f \in H^1(\Omega)$, тогда

$$\|v_\varepsilon - v_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C_{14} \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{H^1(\Omega)}, \quad (23)$$

где константа C_{14} не зависит от ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что ε, t^{-1} достаточно малы, так что для заданной $f \in H^1(\Omega)$ по указанной выше процедуре можно определить функции v_ε и $v_\varepsilon^{(1)}$. Пусть $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная функция такая, что $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$, $\varphi_\varepsilon = 1$ на Γ , $\varphi_\varepsilon = 0$ вне θ_ε – ε -окрестности Γ , при $j = 1, \dots, d$ всюду $|\varepsilon D_j \varphi_\varepsilon| \leq C$ и константа C не зависит от ε . Положим $v_1(x, y) = D_k v(x) N^k(y) + v(x) N^0(y)$ (т.е. $v_1(x, y)$ такая же, как в лемме 3), $\eta(x) = v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon^{(1)}(x) + \varepsilon \varphi_\varepsilon(x) v_1(x, x/\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{\varepsilon, \Lambda, t}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{(1)}) &= f - (A_\varepsilon + \varepsilon^{-1} \Lambda - t) v_\varepsilon^{(1)} \\ &= f - \varepsilon^{-1} (A_{yy} v_1(x, y) + A_{yx} v(x) + \Lambda v(x)) \Big|_{y=x/\varepsilon} \\ &\quad - ((A_{xy} + A_{yx} + \Lambda) v_1(x, y) + (A_{xx} - t) v(x) + A_{yy} v_2(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon} \\ &\quad + (A_{yy} v_2(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $v_2(x, y)$ – решение задачи (II) для заданных выше функций $v(x)$ и $v_1(x, y)$. Поэтому в силу выбора функций v, v_1, v_2 в соответствии с утверждениями лемм 3 и 4 имеем

$$A_{\varepsilon, \Lambda, t}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{(1)})(A_{yy} v_2(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon} = \varepsilon D_i \mathcal{F}_i,$$

где $\mathcal{F}_i = (a_{ij}(y)(\partial/\partial y_j) v_2(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon}$, $i = 1, \dots, d$.

Отсюда в Ω_ε получаем

$$A_{\varepsilon, \Lambda, t} \eta = A_{\varepsilon, \Lambda, t}(v_\varepsilon - v_\varepsilon^{(1)}) + A_{\varepsilon, \Lambda, t} \varepsilon \varphi_\varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = D_i (\varepsilon \mathcal{F}_i + \mathcal{G}_i) + \mathcal{F}_0, \quad (24)$$

где $\mathcal{G}_i = a_{ij}(x/\varepsilon) D_i (\varepsilon \varphi_\varepsilon v_1(x, x/\varepsilon))$, $i = 1, \dots, d$, $\mathcal{F}_0 = (\Lambda - \varepsilon t) \varphi_\varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)$.

В силу выбора функций $v_1(x, y), v_2(x, y)$ также имеем

$$\begin{aligned} B_\varepsilon \eta &= B_\varepsilon v_\varepsilon - B_\varepsilon v_\varepsilon^{(1)} + B_\varepsilon \left(\varepsilon \varphi_\varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \\ &= -(B_x v(x) + a(y) v(x) + B_y v_1(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon} \\ &\quad - \varepsilon (B_x v_1(x, y) + a(y) v_1(x, y) + B_y v_2(x, y)) \Big|_{y=x/\varepsilon} + \varepsilon B_y v_2(x, y) \Big|_{y=x/\varepsilon} \\ &\quad + B_\varepsilon \left(\varepsilon \varphi_\varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = \varepsilon B_y v_2(x, y) \Big|_{y=x/\varepsilon} + B_\varepsilon \left(\varepsilon \varphi_\varepsilon v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \quad \text{на } S_\varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому

$$B_\varepsilon \eta = (\varepsilon \mathcal{F}_i + \mathcal{G}_i) n_i + g \quad \text{на } S_\varepsilon, \quad (25)$$

где $g = \varepsilon a \varphi_\varepsilon v_1(x, x/\varepsilon)$. Кроме того, в силу своего выбора

$$\eta = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon. \quad (26)$$

Из (24)–(26) в силу оценки (16), верной при достаточно малых ε и t^{-1} , вытекает неравенство

$$\|\nabla_x \eta\|_\varepsilon \leq C_{12} \left(\|\mathcal{F}_0\|_\varepsilon + \sum_{i=1}^d (\varepsilon \|\mathcal{F}_i\|_\varepsilon + \|\mathcal{G}_i\|_\varepsilon) + \varepsilon^{-1/2} \|g\|'_\varepsilon \right). \quad (27)$$

Но в силу определений для функций $\mathcal{F}_i(x)$, $i = 0, \dots, d$, $\mathcal{G}_i(x)$, $i = 1, \dots, d$, $g(x)$ и свойств участвующих в этих определениях функций v , v_1 , v_2 (см. леммы 3 и 4) можно вывести оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_i\|_\varepsilon &\leq C_{15} \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, d; \\ \|\mathcal{G}_i\|_\varepsilon &\leq C_{16} \|v\|_{H^1(\Omega \cap \mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C_{17} \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, d; \\ \|\mathcal{F}_0\|_\varepsilon &\leq C_{18} \|v\|_{H^1(\Omega \cap \mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C_{19} \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^2(\Omega)}, \\ \varepsilon^{-1/2} \|g\|'_\varepsilon &\leq C_{20} \sqrt{\varepsilon} \left\| v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathcal{S}_\varepsilon \cap \mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C_{21} \left\| v_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \cap \mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C_{22} \|v\|_{H^3(\Omega)}. \end{aligned}$$

В трех последних цепочках неравенств на заключительных этапах использовалась оценка, верная для всех $w \in H^1(\Omega)$:

$$\|w\|_{L^2(\Omega \cap \mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C_{23} \sqrt{\varepsilon} \|w\|_{H^1(\Omega)}.$$

Поскольку $f \in H^1(\Omega)$, то для решения задачи (19) справедлива оценка $\|v\|_{H^3(\Omega)} \leq C_{24} \|f\|_{H^1(\Omega)}$, и потому из (27) и последующих неравенств для величин, фигурирующих в правой части (27), вытекает неравенство $\|\nabla_x \eta\|_\varepsilon \leq C_{25} \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{H^1(\Omega)}$, из которого следует оценка (23). Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ 3. *В предположениях теоремы 3 верна оценка*

$$\|v_\varepsilon - v\|_\varepsilon \leq C_{26} \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{H^1(\Omega)}$$

с константой C_{26} , не зависящей от ε .

Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon: L^2(\Omega_\varepsilon) \rightarrow L^2(\Omega_\varepsilon)$, $\mathcal{A}_0: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ – разрешающие операторы задачи (15), в которой $g = f_i = 0$, $i = 1, \dots, d$, и задачи (19) соответственно (при этом мы считаем, что параметры ε , t^{-1} достаточно малы, так что эти операторы определены). Тогда нетрудно увидеть, что условия (C1)–(C4) главы III из [1] выполнены. Это следует из утверждений теорем 2 и 3, а также леммы 5. Поэтому из теорем 1.9 и 1.12 главы III [1] можно вывести справедливость следующих двух теорем 4 и 5. Прежде чем их сформулировать, введем связанную с задачей Дирихле (19) задачу на СЗ для оператора Q_t в области Ω при $t > q_{00}$ (см. q_{00} в (18)):

$$\begin{cases} Q_t u = -\mu u & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1. \end{cases} \quad (28)$$

Из свойств оператора Q_t , перечисленных в лемме 5, следует, что существует счетное множество решений задачи (28), а именно: СЗ $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ и соответствующих им СФ $\{u_k\}_{k=1}^\infty$; при этом выполнено:

- $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$;
- $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$;
- кратность μ_k для всех k конечна и в последовательности пункта а) каждое СЗ записано с учетом его кратности.

(29)

ТЕОРЕМА 4. Пусть ε, t^{-1} достаточно малы и пусть $0 < \mu_{\varepsilon,1} \leq \dots \leq \mu_{\varepsilon,k} \leq \dots$, $0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_k \leq \dots$ – последовательности СЗ задач $1_{\varepsilon,\Lambda,t}$ и (28) соответственно, упорядоченные по возрастанию с учетом их кратности. Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_k$ имеет место неравенство

$$|\mu_{\varepsilon,k} - \mu_k| \leq c_k \sqrt{\varepsilon},$$

где константа c_k не зависит от ε , $k = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в предположениях теоремы 4 $\mu_0 = 0$, $\mu_k < \mu_{k+1} = \dots = \mu_{k+m} < \mu_{k+m+1}$, т.е. кратность СЗ μ_{k+1} задачи (28) равна m . Тогда для любой $w \in N(\mu_{k+1})$ (линейное подпространство СФ задачи (28), соответствующих СЗ μ_{k+1}) такой, что $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\bar{u}^\varepsilon$ СФ $u_{\varepsilon,k+1}, \dots, u_{\varepsilon,k+m}$ задачи $(1_{\varepsilon,\Lambda,t})$, соответствующих СЗ $\mu_{\varepsilon,k+1}, \dots, \mu_{\varepsilon,k+m}$, такая, что

$$\|\bar{u}^\varepsilon\|_\varepsilon = 1, \quad \|\bar{u}^\varepsilon - w\|_\varepsilon \leq d_k \sqrt{\varepsilon}$$

при $\varepsilon < \varepsilon_k$, где константа d_k не зависит от ε , $k = 0, 1, \dots$.

Пусть $Q_0 = Q_t|_{t=0}$, где Q_t – оператор из задачи (19). Тогда можно рассматривать и для оператора Q_0 задачу Дирихле на СЗ в области Ω :

$$\begin{cases} Q_0 u = -\lambda u & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1. \end{cases} \quad (30)$$

Очевидно, что СЗ λ задачи (30) порождает СЗ $\mu = \lambda + t$ задачи (28), и, наоборот, любое СЗ μ задачи (28) порождает СЗ $\lambda = \mu - t$ задачи (30), при этом СФ, соответствующие СЗ λ задачи (30) и СЗ $\mu = \lambda + t$ задачи (28), можно рассматривать одними и теми же. Поэтому можно утверждать, что существует счетное множество решений задачи (30): СЗ $\{\lambda_k\}_{k=0}^\infty$ и соответствующих им СФ $\{u_k\}_{k=1}^\infty$. При этом:

- $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$;
- $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2(\Omega)$;
- кратность λ_k для всех k конечна и в последовательности пункта а) каждое СЗ записано с учетом его кратности. (31)

Можно считать, что последовательности СФ задачи (28) и (30), указанные в пунктах в) соответственно (29) и (31), совпадают. Отсюда, в частности, следует, что $N(\lambda_k) = N(\mu_k)$, $k = 1, 2, \dots$ (определение $N(\mu)$ для СЗ μ см. в формулировке теоремы 5). Из этих соображений, учитывая также теорему 1, получаем две теоремы об асимптотике СЗ и СФ исходной задачи (1_ε) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть при ε достаточно малом $\lambda_{\varepsilon,1} \leq \dots \leq \lambda_{\varepsilon,k} \leq \dots$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ – последовательности СЗ задач (1_ε) и (30) соответственно, упорядоченные по возрастанию с учетом их кратности. Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_k$ имеет место оценка

$$|\lambda_{\varepsilon,k} - \varepsilon^{-1}\Lambda - \lambda_k| \leq c_k \sqrt{\varepsilon}, \quad \text{где } \Lambda = |S||P|^{-1}\langle a \rangle_S$$

и константа c_k не зависит от ε , $k = 1, 2, \dots$.

ТЕОРЕМА 7. В предположениях теоремы 6 пусть $\lambda_0 = \lambda_1 - 1$, $\lambda_k < \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+m} < \lambda_{k+m+1}$, т.е. кратность СЗ λ_{k+1} задачи (30) равна m . Тогда при любой функции $w \in N(\lambda_{k+1})$, $\|w\|_{L^2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\bar{u}^\varepsilon$ СФ $u_{\varepsilon,k}, \dots, u_{\varepsilon,k+m}$ задачи (1_ε) , соответствующих СЗ $\lambda_{\varepsilon,k+1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,k+m}$, такая, что

$$\|\bar{u}^\varepsilon\|_\varepsilon = 1, \quad \|\bar{u}^\varepsilon - w\|_\varepsilon \leq d_k \sqrt{\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon < \varepsilon_k,$$

где константа d_k не зависит от ε , $k = 0, 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как отмечалось во введении работы, в задаче (1_ε) необязательно считать, что $a(y) \geq 0$. Предположение о неотрицательности $a(y)$ было удобно для того, чтобы не задумываться о существовании решения задачи (1_ε) , а, сославшись на известные результаты о существовании ее решения при $a(y) \geq 0$, видеть главную свою цель в нахождении первых членов асимптотики решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и в оценке остаточного члена. Но и для $a(y)$ общего вида привлечение вспомогательной задачи $(1_{\varepsilon,\Lambda,t})$ при подходящем t и достаточно малых ε позволяет доказать существование счетного множества решений задачи (1_ε) : СЗ $\{\lambda_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^\infty$ и соответствующих им СФ $\{u_{\varepsilon,k}\}_{k=1}^\infty$ со свойствами, перечисленными во введении работы в пунктах а)–в), за исключением свойства неотрицательности всех СЗ. Разумеется, утверждения теорем 6 и 7 справедливы и в этом общем случае.

Предположение о неотрицательности $a(y)$ было уместно также для того, чтобы согласовать результаты по асимптотике СЗ краевых задач с хорошо известными оценками (2), справедливыми лишь при $a(y) \geq 0$. Ясно, что если $\langle a \rangle_S < 0$ (тогда неизбежно $a(y)$ принимает отрицательные значения на части границы S), то неравенства в (2) нарушаются при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В заключение хочу выразить свою искреннюю благодарность М.В. и В.М. Леоновым за неоценимую помощь в компьютерной подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих тел. М.: Изд-во МГУ, 1990.
- [2] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1951.
- [3] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [4] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- [5] Мидзохота С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
- [6] Сукретный В.И. Усреднение краевых задач для эллиптических уравнений в перфорированных областях // УМН. 1983. Т. 38. № 6. С. 125–126.
- [7] Сукретный В.И. Асимптотическое разложение решений третьей краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях // УМН. 1984. Т. 39. № 4. С. 120–121.
- [8] Сукретный В.И. О задаче стационарной теплопроводности в перфорированных областях. Препринт № 84.48. Киев: Институт математики АН УССР, 1984.
- [9] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
- [10] Санчес-Паленсия Е. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.