Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Туляков, Система рекуррентных соотношений для рациональных аппроксимаций постоянной Эйлера, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 782–787

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:03:48

Система рекуррентных соотношений для рациональных аппроксимаций постоянной Эйлера

Д. Н. Туляков

Получена система рекуррентных соотношений для рациональных аппроксимаций постоянной Эйлера, обобщающая рекуррентные соотношения, полученные ранее Аптекаревым с соавторами. Рекуррентные соотношения этой системы имеют старший коэффициент единица, что позволяет контролировать целочисленность генерируемых чисел.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В сборнике статей [1] получено рекуррентное соотношение для некоторых рациональных аппроксимаций постоянной Эйлера

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

Это соотношение

$$(16n - 15)q_{n+1} = (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n - n^2(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + n^2(n-1)^2(16n+1)q_{n-2} \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 2, & p_2 &= 31, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= 3, & q_2 &= 50, \end{aligned} \quad (1.2)$$

генерирует числители p_n и знаменатели q_n аппроксимаций, для которых справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)! \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \\ p_n - \gamma q_n &= (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Формальное доказательство (1.1)–(1.3) см. в [2]–[5].

В настоящей работе мы получим систему рекуррентных соотношений (с единичным старшим коэффициентом) для величин p_n и q_n из (1.1)–(1.3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00179), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3906.2008.1) и программы № 1 ОМН РАН.

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть последовательность чисел $\tilde{p}_n$ и $\tilde{q}_n$ определена системой рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{4n-1} &= n\tilde{q}_{4n-3} + \tilde{q}_{4n-2}, \\ \tilde{q}_{4n} &= n\tilde{q}_{4n-4} - n\tilde{q}_{4n-3} + 3\tilde{q}_{4n-2}, \\ \tilde{q}_{4n+1} &= n\tilde{q}_{4n-1} + (n+1)\tilde{q}_{4n}, \\ \tilde{q}_{4n+2} &= n\tilde{q}_{4n-2} + (2n+1)^2\tilde{q}_{4n} - n\tilde{q}_{4n+1},\end{aligned}\quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned}\tilde{p}_0 &= 0, & \tilde{p}_1 &= 1, & \tilde{p}_2 &= 1, \\ \tilde{q}_0 &= 1, & \tilde{q}_1 &= 1, & \tilde{q}_2 &= 1.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Тогда для p_n и q_n из (1.1)–(1.3) справедливо

$$p_n = \tilde{p}_{4n}, \quad q_n = \tilde{q}_{4n}.$$

Отметим, что из (1.4)–(1.5) следует целочисленность числителей p_n и знаменателей q_n аппроксимаций постоянной Эйлера, причем это важное следствие непосредственно из (1.1)–(1.3) не вытекало.

2. Рекуррентные соотношения для многочленов, задаваемых формулой Родрига. Стартовой точкой в [1] для получения рекуррентных соотношений (1.1)–(1.3) были интегральные представления

$$p_n - \gamma q_n = \int_0^\infty Q_n(x) e^{-x} \ln(x) dx, \quad q_n = \int_0^\infty Q_n(x) e^{-x} dx, \quad (2.1)$$

где многочлены Q_n задаются следующей обобщенной формулой Родрига:

$$Q_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \frac{e^x}{x-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x}. \quad (2.2)$$

Эти многочлены являются частным случаем приведенных в работе [6] многочленов

$$Q_{[n,m]}(x) = w_1^{-1} \frac{d^m}{dx^m} \left[w_1 x^m w_0^{-1} \frac{d^n}{dx^n} [w_0 x^n (1-x)^{(n+m)}] \right], \quad (2.3)$$

где весовые функции w_j имеют вид

$$w_j(x) = x^{a_j} (1-x)^\alpha e^{\beta x}, \quad j = 0, 1. \quad (2.4)$$

Многочлены Q_n в (2.1), (2.2) (с точностью до нормировки) получаются из (2.3), полагая

$$m = n, \quad a_0 = a_1 = 0, \quad \alpha = -\beta = 1. \quad (2.5)$$

В свою очередь, многочлены $Q_{(n,n,m,m)}^{(a_0,a_1,\alpha,\beta)}(x) := Q_{[n,m]}(x)$ были приведены в [6] как пример совместно (“multiple”) ортогональных многочленов

$$Q_{\vec{n}}(x) = Q_{(n,n,m,m)}^{(a_0,a_1,\alpha,\beta)}(x), \quad \vec{n} := (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}^4, \quad \deg Q_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := \sum_{j=1}^4 n_j,$$

удовлетворяющих следующей системе из четырех соотношений ортогональности с весами (2.4), взятыми на отрезках $\Delta_1 = [0; 1]$, $\Delta_2 = [1; \infty)$:

$$\int_{\Delta_i} Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_j(x) dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n_{2j+i} - 1, \quad j = 0, 1, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Отметим, что при стремлении значений параметров к (2.5) и неравенствах $n_{i+2} \leq n_i$ для предельных $Q_{\vec{n}}$ имеют место соотношения ортогональности (2.6) с весами

$$w_0(x) = (1-x)e^{-x}, \quad w_1(x) = (1-x)\ln(x)e^{-x}.$$

Известно (см., например, [7]), что p соотношений ортогональности могут порождать для совместно ортогональных многочленов $(p+2)$ -членные рекуррентные соотношения. В рассматриваемой ситуации многочленов (2.6) речь идет о рекурсиях, связывающих шесть последовательных многочленов из так называемой “step-line”:

$$\dots, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_1}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_2}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_3}, Q_{\vec{n}}, Q_{\vec{n}+\vec{e}_1}, \dots, \quad (2.7)$$

где

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \vec{e}_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \vec{e}_4 = (1, 1, 1, 1).$$

Причем, чтобы определять все многочлены вдоль линии (2.7), необходим набор из четырех последовательных рекурсий. Явный вид коэффициентов четырех шестичленных рекуррентных соотношений из такого набора был получен в работе Христоворова [2]. Однако ввиду того, что среди набора многочленов (2.7) встречаются не только многочлены с индексами $\vec{n} = (n, n, m, m)$, определяемые (2.3), эти рекуррентные соотношения содержат коэффициенты с “трансцендентной” зависимостью от входных параметров. В работе Боголюбского [3] при значении параметров (2.5) найдены рекуррентные соотношения с рациональными по n и z коэффициентами, связывающие только “родриговы” многочлены многомерного “step-line” – система из двух семичленных рекуррентных соотношений, а также одно восьмичленное рекуррентное соотношение. Эти рекуррентные соотношения хороши для компьютерных экспериментов и компьютерных доказательств (с помощью них и была открыта и доказана в [4] рекурсия (1.1), (1.2)), однако аналитическое их использование не представляется возможным ввиду громоздкости их коэффициентов.

В настоящей работе для получения системы рекуррентных соотношений (1.4) мы также используем соотношения (2.1) с подстановкой многочленов, определяемых формулами Родрига (2.3). Мы выводим новый набор из четырех шестичленных соотношений, который в отличие от рекуррентных соотношений работы [2] связывает только многочлены вида (2.3) – для смежных параметров a_j и $a_j + 1$, $j = 1, 2$, в (2.3), (2.4) и, как результат, коэффициенты этих рекуррентных соотношений превращаются в рациональные функции от входных параметров – $(n, m, a_j, \alpha, \beta)$. Обозначим

$$\begin{aligned} Q_{4k} &= Q_{(k,k,k+t,k+t)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\ \{Q_n\}_{n=0}^\infty: \quad Q_{4k+1} &= x Q_{(k,k,k+t,k+t)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x), \\ Q_{4k+2} &= Q_{(k+1,k+1,k+t,k+t)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\ Q_{4k+3} &= x Q_{(k+1,k+1,k+t,k+t)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Для последовательного определения многочленов $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ из (2.8), (2.3) имеют место рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}
 xQ_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) &= (c_{mn}^{(15)}x + c_{mn}^{(14)})Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(13)}xQ_{(m,m,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(12)}Q_{(m,m,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(11)}xQ_{(m-1,m-1,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(10)}Q_{(m-1,m-1,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\
 Q_{(m+1,m+1,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) &= (c_{mn}^{(25)}x + c_{mn}^{(24)})xQ_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(23)}Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(22)}xQ_{(m,m,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(21)}Q_{(m,m,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(20)}xQ_{(m-1,m-1,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + C_{mn}^{(2)}Q_{(m-1,m-1,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\
 xQ_{(m+1,m+1,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) &= (c_{mn}^{(35)}x + c_{mn}^{(34)})Q_{(m+1,m+1,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(33)}xQ_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(32)}Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(31)}xQ_{(m,m,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(30)}Q_{(m,m,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\
 Q_{(m+1,m+1,n+1,n+1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) &= (c_{mn}^{(45)}x + c_{mn}^{(44)})xQ_{(m+1,m+1,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(43)}Q_{(m+1,m+1,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(42)}xQ_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + c_{mn}^{(41)}Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) \\
 &\quad + c_{mn}^{(40)}xQ_{(m,m,n-1,n-1)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + C_{mn}^{(4)}Q_{(m,m,n-1,n-1)}^{a,b,\alpha,\beta}(x),
 \end{aligned}$$

где коэффициенты первых двух соотношений имеют вид

$$\begin{aligned}
 c_{mn}^{(15)} &= 1, \\
 c_{mn}^{(14)}\beta &= m + n, \\
 c_{mn}^{(13)}\beta &= -2m^2 - 3mn - 2n^2 - (\alpha + a)m - (\alpha + b)n, \\
 c_{mn}^{(12)}\beta^2 &= \beta(m^2 + mn + n^2 + am + bn) + m(m + a - b)(2m + n + a + \alpha), \\
 c_{mn}^{(11)}\beta^2 &= -m(m + a - b)[(m + a)\beta + (2m + n + a + \alpha)(2m + n + a + \alpha - 1)], \\
 c_{mn}^{(10)}\beta^2 &= m(m + a - b)(m + a)(\beta + 2m + n + a + \alpha), \\
 c_{mn}^{(25)} &= \beta, \\
 c_{mn}^{(24)} &= 3m + 2n + a + \alpha + 2 - \beta, \\
 c_{mn}^{(23)}\beta &= -\beta(m + a + 1) - 2m^2 + 3mn + 2n^2 + (\alpha + a + 1)m + (\alpha + b + 1)n, \\
 c_{mn}^{(22)}\beta &= -\beta(m + n)(n + m + \alpha) + 4(m + n)(m^2 + mn + n^2) + 2m^2 + 3mn + 2n^2 \\
 &\quad + (\alpha + a)m(4m + 3n + \alpha + a + 1) + (\alpha + b)n(4n + 3m + \alpha + b + 1), \\
 c_{mn}^{(21)}\beta^2 &= -\beta[(m + n + a)m(m + a + 1) + (m + n)(n + b)(m + 2n + b + \alpha + 1)] \\
 &\quad - m(m + a - b)(2m + n + a + \alpha + 1)(2m + n + a + \alpha), \\
 c_{mn}^{(20)}\beta^2 &= m(m + a - b)(2m + n + a + \alpha)(2m + n + a + \alpha)^2 - 1 - (n + \alpha - a - 1)\beta, \\
 C_{mn}^{(2)}\beta^2 &= -m(m + a - b)(m + a)(m + a + 1)\beta \\
 &\quad + (2m + n + a + \alpha + 1)(2m + n + a + \alpha),
 \end{aligned}$$

а коэффициенты двух последующих соотношений определяются из равенств

$$C_{m,n}^{(4)}(a,b) = C_{n+1,m}^{(2)}(b,a), \quad c_{m,n}^{(j+2,k)}(a,b) = c_{n+1,m}^{(j,k)}(b,a), \quad j = 1, 2, \quad k = 0, \dots, 5.$$

Сделаем несколько замечаний.

1) Второе и четвертое рекуррентные соотношения теоремы 2 содержат семь членов, однако из них легко получить 6-членные соотношения, так как $c_{mn}^{(10)} \neq 0$, $c_{mn}^{(30)} \neq 0$.

2) С учетом возможности придать соотношениям 6-членный вид существует пять линейно независимых решений-последовательностей, одна из которых как раз $\{Q_n\}$ (см. (2.8)). В качестве четырех других можно взять функции второго рода относительно каждой из четырех мер ортогональности.

3) О доказательстве теоремы 2. Из системы четырех шестичленных рекуррентных соотношений работы [2], определяющих многочлены “step-line” – (2.7), можно исключить “неродриговские” многочлены с помощью соотношений

$$\begin{aligned} Q_{(m+1,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) &= k_{mn}^{(1)} x Q_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + k_{mn}^{(2)} Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \\ Q_{(m,m,n+1,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x) &= k_{mn}^{(3)} x Q_{(m,m,n,n)}^{a+1,b+1,\alpha,\beta}(x) + k_{mn}^{(4)} Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x), \end{aligned}$$

где $k_{mn}^{(i)}$ – некоторые константы. При этом, так как $k_{mn}^{(1)} \neq 0$, $k_{mn}^{(3)} \neq 0$, можно в каждом соотношении выражать многочлен наибольшей степени через остальные, что приведет нас к рекуррентным соотношениям теоремы 2. Выражения для коэффициентов этих рекурсий проще получать непосредственно. Вычисляя семь старших коэффициентов полиномов $Q_{(m,m,n,n)}^{a,b,\alpha,\beta}(x)$ и приравнявая коэффициенты при различных степенях x слева и справа от знаков равенств в рекурсиях теоремы 2, получаем линейные системы. Решая их, находим явный вид для рекуррентных коэффициентов.

4) О доказательстве теоремы 1. Рассматриваем последовательность многочленов (2.8) при значениях параметров (2.5), т.е. $\{Q_n(x)\}_{n=0}^\infty$, где

$$\begin{aligned} Q_{4k}(x) &= Q_{(k,k,k,k)}^{0,0,1,-1}(x), & Q_{4k+1}(x) &= x Q_{(k,k,k,k)}^{1,1,1,-1}(x), \\ Q_{4k+2}(x) &= Q_{(k+1,k+1,k,k)}^{0,0,1,-1}(x), & Q_{4k+3}(x) &= x Q_{(k+1,k+1,k,k)}^{1,1,1,-1}(x). \end{aligned}$$

Определяем с помощью этих многочленов числа $\tilde{q}_n, \tilde{p}_n \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n - \gamma \tilde{q}_n &= \frac{1}{[n/4]! [(n+2)/4]!} \int_0^\infty Q_n(x) \ln(x) e^{-x} dx, \\ \tilde{q}_n &= \frac{1}{[n/4]! [(n+2)/4]!} \int_0^\infty Q_n(x) e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения теоремы 1 для этих чисел получаются и обосновываются методами работы [4].

В заключение автор выражает благодарность А. И. Аптекареву за полезные советы и обсуждения в процессе работы над этой статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 84 с..
- [2] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде некоторой системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа”, *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 11–26.
- [3] А. И. Боголюбский, “Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных полиномов, задаваемых формулой Родрига”, *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 27–35.
- [4] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Четырёхчленные рекуррентные соотношения для γ -форм”, *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 37–43.
- [5] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Асимптотика γ -форм, генерируемых совместно ортогональными многочленами”, *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 55–62.
- [6] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914.
- [7] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100.

Д. Н. Туляков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

E-mail: dnt@mail.nnov.ru

Поступило

09.07.2008

Исправленный вариант

20.10.2008